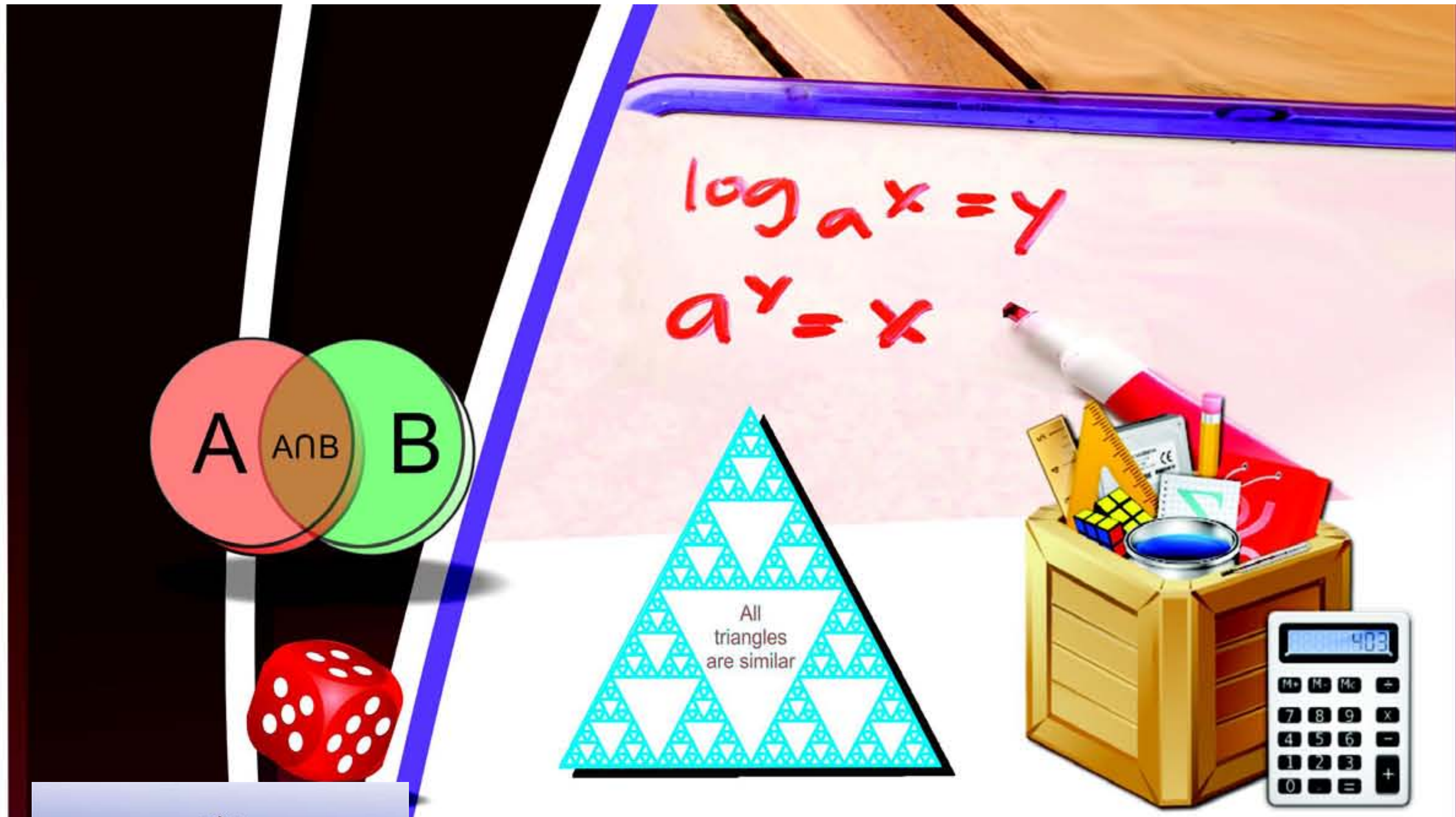


State Council of Educational Reasearch and Training
Telangana, Hyderabad

தெலங்கானா மாநில அரசின் இலவச வெளியீடு

கணிதம்

வகுப்பு 10

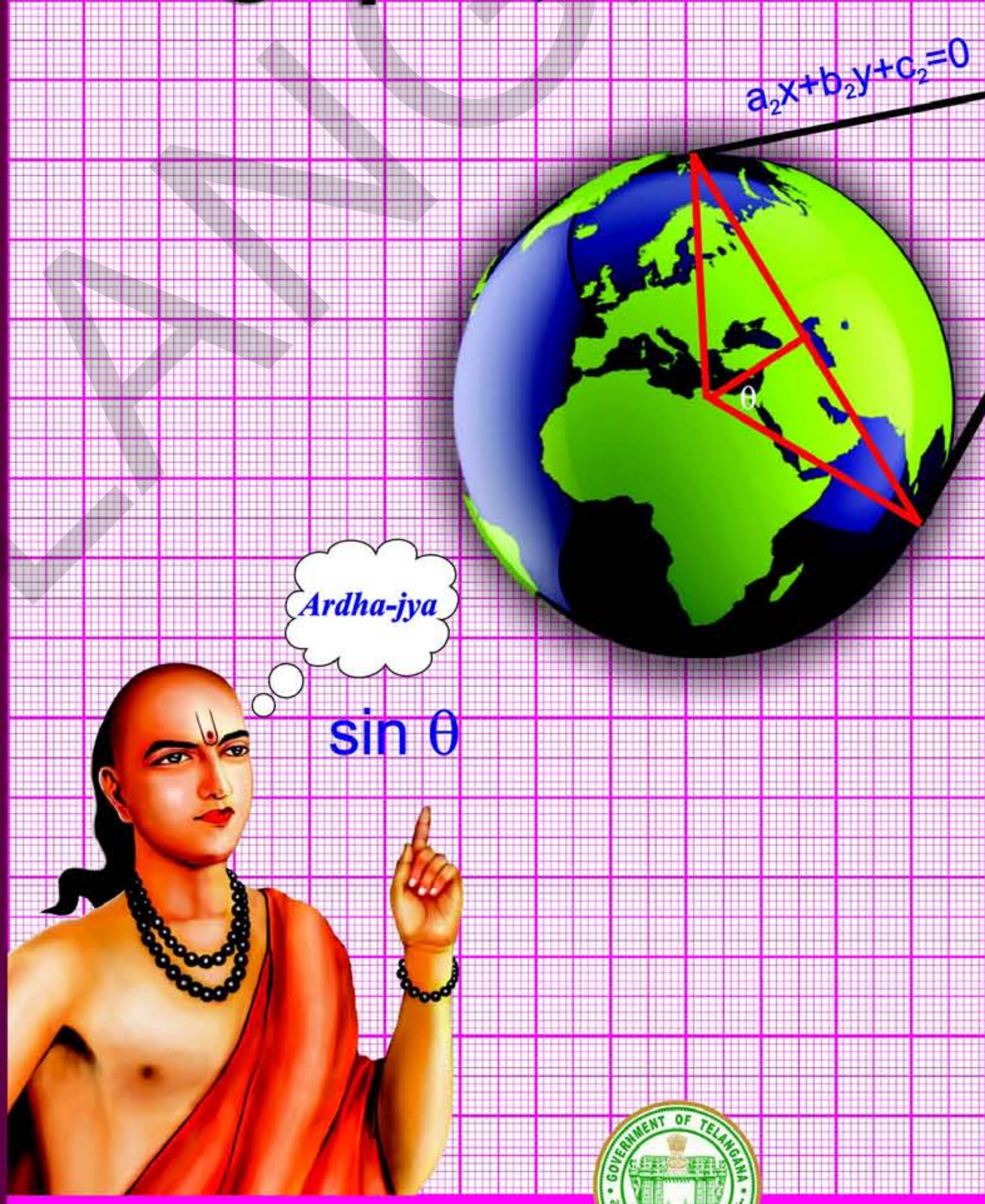
FREE

MATHEMATICS

கணிதம்

Class X

வகுப்பு 10 (TAMIL MEDIUM)



வெளியீடு
தெலங்கானா மாநில அரசு
ஐதராபாத்

தெலங்கானா மாநில அரசின் இலவச வெளியீடு

INSTRUCTIONS TO STUDENTS

- Pictures/figures are provided for many items/situations for better understanding of the concepts in the text book.You have to read them carefully in relation with the concepts.
- Clarify your doubts with the help of your teachers while you are doing the activites related to the concepts time to time.
- "Do this"Problems are meant to test your progress immediately after learning a concept.So you have to do these problems on your own.Check these with your teacher.
- "Try these"items in every chapter are provided to sharpen your ideas and thoughts.some logic will be there behind these questions.You have to try all these questions with out fail.
- Do this and Try these problems are meant to solve in the class room under the guidance of your teacher.Do not leave them at all.
- The questions under "Think discuss and write" are given to test your analytical ability.You can answer these questions by discussing in groups.
- The exercises given at the end of some sub topics arerelated to the concepts learned to a particular level.You try to solve these problems on your own.Do not copy them from guides and from other sources.
- Some projects given in in the textbook are meant to be done with proper plan and guidance with the teacher.you can do this in a group.A report is to be submitted at the end of the project.
- Some blank spaces are provided in tables,try these exercises to facilitate you to answer quickely.You can fill it in the text book it self.
- Every student is required to finish the day's work on the same day it self.Donot post pone it.You may feel burden later.
- Try to collect some more information to create some similar problems based on the concepts you have learned.Ask your friends to solve your questions.
- Games,Puzzles provided in the textbooks shall encourage you to feel joy in doing maths.For recreation collect some more .
- You should always connect the concepts learned in the class with other subject areas and situations out side the class room.
- You have to develop abilities with regard to academic standards prescribed at the end of the text book based on the syllabus .The academic standards at the secondary level are based on a) Problem solving 2)Reasoning and Proof 3)Mathematical communication 4)Connections 5)Representation.
- You have to go through various reference books,Internet,Forums for finding different ways of solutions for a problem and for better understanding of the concepts.
- Optional exercises are provided to think critically to solve certain problems.These exercises will help you to face Talent tests conducted at national level on par with other students.
- The appendix chapter "Mathematical modelling" will help you to know modelling of mathematical concepts in the fields of business,Agriculture,Stock markets etc,You can see the connection of mathematics with different areas.
- Syllabus is also provided at the end of the textbook for your reference that how you are making your progress.You can also compare with others.

We wish you all the best

SIGNS AND SYMBOLS OF SCHOOL MATHEMATICS

Sign/symbol	Read as	Mathematical meaning
$\pm$	plus or minus	Add or Substract
$\neq$	not equal to	unequal
$\therefore$	therefore	logical flow of a statement
∞	infinite	not finite
$\sim$	is similar to	same in geometrical shape
$\cong$	is congruent to	same shape and same size
$\equiv$	is identically equal to	equivalent statements
$\forall$	for all	universal quantifier
$\sqrt{\ }$	square root of	square root of a number
$\sqrt[3]{\ }$	cube root of	cube root of a number
$\bigcup$	cup of	union of sets
$\bigcap$	cap of	intersection of sets
ϕ	phi	symbol for golden ratio
%	percent of	per hundred
o	degree	angle measure
Δ	delta / triangle	symmetric difference in sets/symbol of triangle
$\in$	belongs to	an element belong to a particular set
$\leftrightarrow$	equivilent to	one to one correspondence
α, β, γ	alfa,beta,gamma	greek lettetrs to represent zeroes of polynomial
μ	mu	universal set symbol
π	pi	circumference of a circle / diameter
σ	sigma	sum of scores
$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$	sin theta,cos theta,tan theta	trigonometric ratios
$\overline{x}$	x bar	arithmetic mean
$\log_a x$	log x to the base a	logarthemic function
(a, b)	point (a, b)	ordered pair (a, b)
$\|x\|$	mod x	absolute value of a real number
P(x)	P of x	a polynomial function in x
P(E)	P of E	probability of an event
$\because$	Since	reasoning at a stage
₹	rupee	symbol of Indian rupee
$\|\|$	is parallel to	parallel lines
$\perp$	is perpendicular to	making 90 degree with a line
{ }	flower bracket	used to set notation
$\overset{\frown}{PQ}$	arc PQ	arc of a circle
a^2	a square	square of a number
$\angle$	angle	symbol of angle
θ	theta	measurement of an angle

கணிதம் — 10ஆம் வகுப்பு

MATHEMATICS — **CLASS - X**

(TAMIL MEDIUM)

பாடப்புத்தக மேம்பாடு & வெளியீட்டு குழு

தலைமை அலுவலர்	:	திரு. **G. கோபால்ரெட்டி,** இயக்குநர், SCERT, ஐதராபாத்
தலைமை செயலமைப்பாளர்:		திரு. **B. சுதாகர்,** இயக்குநர், அரசு பாடப்புத்தக அச்சுக்கூடம், ஐதராபாத்
அமைப்பு பொறுப்பாளர்	:	டாக்டர் **N. உபேந்திரரெட்டி,** பேராசிரியர் & தலைவர், பாடதிட்டம் & நூல்துறை SCERT, ஐதராபாத்.

ஆய்வுத்தாள் மற்றும் பாடத்திட்டம் மற்றும் பாடநூல் மேம்பாட்டு அமர்வாளர்

பேராசிரியர் **V.கண்ணன்**

கணிதம் மற்றும் புள்ளியல் துறை, HCU, ஐதராபாத்

தலைமை அறிவுரையாளர்கள்

சுக்கா இராமையா
கணிதத்தின் சிறந்த பண்டிதர்,
ஆந்திரபிரதேசம், ஐதராபாத்

டாக்டர். H.K.தேவன்
கல்வியல் அறிவுரையாளர்
வித்யாபவன் கழகம், உதயப்பூர்

வெளியீடு

தெலங்கானா மாநில அரசு, ஐதராபாத்

சட்டத்தை மதிப்போம்
உரிமைகளை பெறுவோம்

கல்வியால் உயர்வோம்
பணிவாய் நடந்துகொள்வோம்.

தெலங்கானா மாநில அரசின் இலவச வெளியீடு 2020-21

New Edition

New Impression 2019, 2020

This Book has been printed on 70 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

தெலங்கானா மாநில அரசின் இலவச வெளியீடு 2020-21

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

தெலங்கானா மாநில அரசின் இலவச வெளியீடு 2020-21

பாடநூல் மேம்பாட்டுக்குழு

எழுத்தாளர்கள்

திரு. **டாடா வெங்கடராமகுமார்**
H.M., ZPHS, முலுமுடி, SPS நெல்லூர்

திரு. **சோமபிரசாத்பாபு**
PGT. APTWRS, சந்திரசேகரபுரம், SPS நெல்லூர்

திரு. **G. ஆனந்தரெட்டி**
ஓய்வுபெற்ற தலைமையாசிரியர், ரங்காரெட்டி மாவட்டம்

டாக்டர். **பூண்ட்ல ரமேஷ்**
விரிவுரையாளர், Govt. IASE, SPS நெல்லூர் மாவட்டம்

திரு. **கொமாண்டூரு சிரிதராச்சார்யுலு**
SA, ZPHS, ரங்காயபள்ளி, மெதக் மாவட்டம்

திரு. **கந்தால ராமையா**
SA, ZPHS, காசிம்தேவ் பேட்டை, வரங்கல் மாவட்டம்

திரு. **கொட்டுமுக்கல V.B.S.N. இராஜு**
SA, நகராட்சி உயர்நிலைப்பள்ளி, கஸ்பா, விஜயநகரம்

திரு. **படால சுரேஷ் குமார்**
SA,GHS, விஜயநகர் காலணி, ஐதராபாத்

திரு. **பெத்தாடா D.L. கணபதிஷர்மா**
SA,GHS, ஜமிஷ்தான்பூர் மாணிகேஷ்வர்நகர், ஐதராபாத்

திரு. **சர்தார் தர்மேந்திரசிங்**
SA, ZPHS, Dannur (B) அதிலாபத்

திரு. **நாகுல ரவி**
SA, ZPHS, லோகேஷ்வரம், அதிலாபாத்

திரு. **காகுலவரம் ராஜேந்திரரெட்டி**
ஒருங்கிணைப்பாளர், SCERT, ஆ.பி. ஐதராபாத்

முதன்மை தொகுப்பாளர்

டாக்டர். **H.K. தேவன்**
கல்வியல் அறிவுரையாளர், விதியாபவன் கழகம்
உதயப்பூர், ராஜஸ்தான்

தொகுப்பாளர்கள்

பேராசிரியர் **V. சிவராமபிரசாத்**
கணிதத்துறை (ஓய்வு)
ஐகராபாத்

திரு. **A. பத்மநாபம் (ஓய்வு)**
தலைவர், கணிதத்துறை மகாராணி கல்லூரி, பெத்தபுரம்
கிழக்கு கோதாவரி மாவட்டம், ஆந்திரபிரதேசம்

பேராசிரியர் **N.Ch. பட்டாபிராமாச்சார்யுலு**
ஓய்வுபெற்றர், தேசிய தொழில்நுட்பநிறுவனம்,
வரங்கல்

டாக்டர். **G.S.N. மூர்த்தி (ஓய்வு)**
விரிவுரையாளர், கணிதம்
ராஜா R.S.R.K.ரங்காராவ் கல்லூரி, பொப்பிலி,
விஜயநகரம் மாவட்டம், ஆந்திரபிரதேசம்

ஒருங்கிணைப்பாளர்கள்

திரு.**K. ராஜேந்திரரெட்டி**
ஒருங்கிணைப்பாளர், SCERT, ஆ.பி. ஐதராபாத்

திரு.**K. நாராயணரெட்டி**
விரிவுரையாளர், SCERT, ஆ.பி. ஐதராபாத்

கல்வித்தரம் மேம்பாட்டுக்குழு

திரு. **அணிப்பாந்ஹ ப்வல்**
வித்யாபவன் கல்வியல் வளமை மையம், உதய்பூர்

திருமதி. **சினேகபாலஜோஷி**
வித்யாபவன் கல்வியல் வளமை மையம், உதய்பூர்

திருமதி. **பிரீதி மிஷ்ரா**
வித்யாபவன் கல்வியல் வளமை மையம், உதய்பூர்

திருமதி. **தாண்யசக்சேனா**
வித்யாபவன் கல்வியல் வளமை மையம், உதய்பூர்

திருமதி. **M. அர்சனா**
கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் துறை, ஐதராபாத் பல்கலைகழகம்

தமிழாக்கம்

ஒருங்கிணைப்பாளர் :திரு. **P.S.தங்கமணி,** SA (Maths),ZPHS, புதுப்பேட்டை, நகரி மண்டலம்,

தொகுப்பாளர்கள்:திரு.**S.K.மணி,** SA (கணிதம்),ZPHS, பிச்சாட்டூர், பிச்சாட்டூர் மண்டலம், சித்தூர்(Dt)
திருமதி. **G.தனசேகரி,** SA (கணிதம்) ZPHS, புதுப்பேட்டை, நகரி மண்டலம், சித்தூர்(Dt)

மொழிப்பெயர்ப்பாளர்கள் :

திருமதி. **C.நாகலட்சுமி,** SA (கணிதம்) ZPHS, புத்தூர், புத்தூர் மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்.
திருமதி. **V.கிரிஜாவதி,** SA, (கணிதம்), GHS, நகரி, நகரி மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்
திரு. **M.M.நடராஜன்,** SA (கணிதம்), ZPHS. சிந்தலப்பட்டடை, நகரி மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்.
திரு. **S.குமரவேலு,** SA (கணிதம்), ZPHS. சத்திரவாடா, நகரி மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்.
திரு. **V.S.ஜெகந்நாதன்,** SA (கணிதம்), ZPHS. சத்திரவாடா, நகரி மண்டலம், சித்தூர் மாவட்டம்.

முன்னுரை

கல்வி என்பது அறிவொளியையும் ஆற்றலையும் வழங்கும் வழிமுறையாகும். கல்வியின் சிறப்புத் தன்மையை உணர்ந்து அனைவருக்கும் தரமான கல்வி வழங்கவேண்டும் என்றும் வெளிப்படையான நோக்கத்தோடு அனைத்து முன்னேற்றக் கழகங்களும் ஆரம்பக் கல்வியின் பொதுமைப் படுத்துதலுக்குத் தங்களை அர்ப்பணித்துக் கொண்டன. அடுத்தபடியாக இடைநிலைக் கல்வியில், கல்வியைப் பொதுமைபடுத்துதல் முக்கியத்துவம் பெற்றுள்ளது.

இடைநிலைக் கல்வியானது உயர் ஆரம்ப நிலையில், பயின்ற சார்புக் கணிதத்திலிருந்து ஒரு நற்பயிற்சியாக கணிதத்தைப் பயிலும் நிலைக்கு மாற்றமடைவதைக் குறிக்கிறது. இந்நிலையில் கூற்றுகளின் தர்க்க நிருபணங்கள், தேற்றங்கள் போன்றவை அறிமுகம் செய்யப்படுகிறது.

கணிதம் ஒரு சிறப்புப் பாடமாக இருப்பதோடு பகுத்தறிவுடன், பகுப்பாய்வில் ஈடுபடும் எந்த ஒரு பாடத்திற்கும் இணைபிரியாது தொடர்ந்து வரக்கூடிய ஒன்றாகக் கருதப்படுகிறது என்னும் நம்பிக்கை எனக்கு உள்ளது. இந்த நூலைப் பயில்வதால் கணிதத்தை தங்களுடைய வாழ்க்கை அனுபவத்தை, கணிதத்தின் அடிப்படை அமைப்பை புரிந்துக்கொள்வர் என்றும் நம்புகின்றேன்.

ஆசிரியர்களுக்கு பாடத்திட்ட மற்றும் கற்ப்பித்தல் பகுத்தறிவுத்திறன்களை புரிந்துகொள்ளவும் சிக்கலான பிரச்சினைகளை கிரகிக்கவும். மதிப்பெண்களுக்குப் பதிலாக கற்றல் மீது கவனத்தை செலுத்துவதும் தற்போது அவசியமாக உள்ளது. கற்றல் கற்பித்தல் செயல்முறையில் பாடத்திட்டத்தைச் சிறந்த முறையில் பரிமாற்றம் செய்ய ஒரு கலப்படமான வகுப்பறைச் சூழலுடன் தன்னை சரிசெய்துகொள்வது மிகவும் தேவையான ஒன்று. வாழ்க்கை முறையில் வேறுபட்ட கருத்துகளையும் எண்ணங்களையும் கொண்ட குழந்தைகளிடையே தன்னம்பிக்கையை வளர்க்க வகுப்பறை கலாச்சாரத்தை ஏற்படுத்த வேண்டும். கற்பித்தல் பணியில் வாழ்க்கையை அறிவுடன் இணைப்பது கட்டாயமாக உள்ளது.

தெலங்கான மாநில பாடத்திட்ட வடிவமைப்புப்பணி (SCF-2011) ல் மேற்கூறிய கணிதக் கற்பித்தல் கண்ணோட்டமானது கணித ஆய்வுத்தாளில் விரிவாக கூறப்பட்டுள்ளது. அதில் நம் மாநிலத்தில் கணிதத்தைக் கற்பிக்கும் பள்ளியாண்டு திட்டங்கள் தெளிவாக விளக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த பாடநூல் அனைத்து விதமான கருத்துகளையும் வழங்கும் முயற்சியை மேற்கொண்டுள்ளது.

ஆந்திரப்பிரதேச மாநில கல்வி ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் இந்த பாடநூலை உருவாக்குவதில் துணைபுரிந்த மாநிலத்தின் பல ஆசிரியர்களையும் மற்றும் பாடநூல் மேம்பாட்டுக்குழுவின் கடின உழைப்பையும் பாராட்டுகிறது. இதை சாத்தியமாக்கிய மாவட்டக் கல்வி அலுவலர்களுக்கும், மண்டலக்கல்வி அதிகாரிகளுக்கும் தலைமைப்பொறுப்பு வகித்த ஆசிரியர்களுக்கும் நன்றி கூற கடமைப்பட்டுள்ளேன். இப்பாட நூல் உருவாக்குவதில் ஒத்துழைப்பு நல்கிய பள்ளிக்கல்வி குழு மற்றும் இயக்குநகரத்திற்கும் நன்றி கூற கடமைப்பட்டுள்ளேன். தங்களுடைய விமர்சனங்களையும் அறிவுரைகளையும் வரவேற்கிறோம்.

இடம் : ஐதராபாத் — இயக்குநர்
தேதி : 17.10.2012 — SCERT, ஐதராபாத்

முகவுரை

மூன்று ஆண்டுகள் ஆரம்பநிலை (6,7,8) கல்வியையும் ஓர் ஆண்டு இடைநிலை கல்வியையும் (9ஆம் வகுப்பு) கற்ற மாணவ மாணவிகளுக்கான புத்தகம் இது. 10ஆம் வகுப்போடு தன் (இடைநிலை) கல்வியை முடித்துக்கொள்ளப்போகிற மாணவ, மாணவிகள், தாம் கற்ற கணிதக்கருத்துக்களை அன்றாட வாழ்க்கை அனுபவங்களோடு ஒப்பிட்டுப்பார்க்கும் அறிவாற்றலை பெறுவதற்கு அவர்களை ஊக்குவிக்க வேண்டும்.

கணிதம் ஒவ்வொருவருக்கும் அவசியமான ஒன்று. அதனால் இடைநிலைக்கல்வியின் இறுதிவரை கணிதப்பாடம் கட்டாய பாடமாக்கப்பட்டுள்ளது. தற்காலத்திலும் கூட பிள்ளைகளுக்கும் பெரியவர்களுக்கும் மற்ற பாடங்களை ஒப்பிடும்போது கணிதகற்றல் என்பது கடினமான ஒன்றாக உள்ளது. ஒரு சிலருக்கு மட்டும் மிகவும் கடினமானதாக உள்ளது. பிள்ளைகள், ஆசிரியர்கள் மட்டுமல்லாமல் ஒட்டுமொத்த சமுதாயமே கணிதக்கற்றலை கடினமான ஒன்றாக பாவிக்கிறது. தற்காலத்தில் கணித பாடம் முக்கியமான ஒன்று மட்டுமல்லாமல் மற்ற பாடங்களோடு தொடர்புடைய ஒரு பிரதான பாடப்பகுதியாக உள்ளது. கணிதத்தின் அடிப்படை கூறுகளை கற்றுக்கொள்வதோடு நின்றுவிடாமல், அவைகளை எவ்வாறு கணக்குகளின் தீர்வுகளை காண்பதில் பயன்படுத்துவது என்பதனையும் அறிந்துக்கொள்ள வேண்டும். கணிதப்பாடம், மதிப்பெண்கள் பெறக்கூடிய சாதனமாக கருதாமல், கற்ற கணித சிந்தனைகளை அன்றாட வாழ்க்கையில் பயன்படுத்தும் விதமாக மாற்றினால் பிள்ளைகளிடையே கணிதப்பாடம் ஒரு விருப்பமான பாடப்பகுதியாக மாறும்.

கணிதவியலில் ஏற்படும் மாற்றங்களை மாணவர்கள் எவ்வாறு எதிர்கொள்ள செய்வது என்பதே கணிதக்கற்பித்தலில் நாம் எதிர்கொள்ளவேண்டிய முக்கிய பிரச்சனையாகும். கணிதம் என்பது மிகவும் சிக்கலான கருத்துக்களை மிக எளிய வார்த்தைகளால் புரியவைக்கும் ஒரு மொழியாகும். கணிதக்கற்பித்தலில் எண்கள், கடினமான கணக்கீடுகள், நினைவில் வைத்துக்கொள்ளவேண்டிய அடிப்படை பாடக்கூறுகள், வழிமுறைகள், எளிமையான முறைகள் மற்றும் தீர்வுகள் ஆகியவையே அடங்கியுள்ளன. பொதுவாக கணித கணக்குகளை தீர்ப்பதில் ஒரேஒரு சரியான முறையும் அவைகளுக்கு பல்வேறு தீர்வுகள் இல்லாமல் ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே உள்ளது. இந்தவித காரணங்களினால் பிள்ளைகளின் ஆக்குமை திறன்களும் புதிய சிந்தனைகளும் வெளிப்படுவதில் தடை ஏற்படுகின்றன.

ஒவ்வொரு கணக்குகளையும் பல்வேறு முறைகளில் தீர்த்தல், கணித கருத்துக்களை புரிந்துக்கொள்வதற்கு தேவையான பரிசோதனை முறைகளை செய்தல், அவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்புகளை காணல் வாயிலாக சீரான சிந்திக்கும் திறனையும் சிக்கலான பிரச்சனைகளைப் பகுத்தாராயும் ஆற்றலையும் பெறுவார்கள். ஆகவே ஒவ்வொரு கணக்கிற்கும் பல்வேறு முறைகளில் தீர்வு காணல், கருத்துக்களை புரிந்துக்கொள்ளல், விதிகளை உருவாக்குதல், பல்வேறு பாடக்கூறுகளை ஒன்றோடு ஒன்று தொடர்புபடுத்துதல் போன்ற திறன்களை பெறுவதற்கு போதுமான அளவு வாய்ப்புகளை ஆசிரியர்கள் ஏற்படுத்தி தரவேண்டும். எனவே கணிதம் என்பது வெறும் கணக்கீடுகளை மட்டுமே செய்வது அல்ல, அது அறிவுசார்பகுதியை முறையாக செயல்படுத்துவது ஆகும். மற்ற மாணவர்கள் கண்டுபிடித்த, உபயோகப்படுத்திய பலவித முறைகளை, அமைப்புக்களை ஆராய்ந்து புதுமைகளை வெளிப்படுத்தும் திறமையை ஒவ்வொரு மாணவனும் பெறவேண்டும். மாணவர்கள், தங்களுக்குள் அடங்கியுள்ள உள்ளார்ந்த திறன்களை வெளிக்கொணரும்விதமாக கணிதக்கற்றல் அமையவேண்டும். கணிதக்கற்றல் என்பது கடினமானஒன்று என்று பாவிக்காமல் உள்ளார்ந்த ஊக்கத்தோடு கற்றலில் ஈடுபடும்விதமாக மாற்றவேண்டும்.

பத்தாம் வகுப்பு என்பது இடைநிலைக் கல்வியின் கடைசி கல்விஆண்டாகும். மாணவர்கள் தாம்கற்ற கணிதக்கூறுகள் சார்ந்த அறிவை, அன்றாடவாழ்க்கையில் எதிர்கொள்ளும் பிரச்சனைகளுக்கு தீர்வுகளை காண பயன்படுத்துவார்கள். ஆனால் அன்றாட வாழ்க்கை சம்பவங்களிலிருந்து கணிதக்கூறுகளை பெறவேண்டிய அவசியமில்லை. இவ்வித திறமைகளைபெற்ற மாணவர்கள் ஒருநிகழ்ச்சியை எவ்வாறு புரிந்துக்கொள்கிறார்களோ அவ்வாறே தர்க்கசிந்தனையின் அடிப்படையில் வரிசைகிரமமாக விவரித்து கூறுவார்கள்.

கணிதத்தை தங்களுடைய வாழ்க்கை அனுபவங்களோடு ஒருங்கிணைந்த கற்கும்விதமாக இந்த 10ஆம் வகுப்பு கணிதப்பாடப்புத்கம் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது வகுப்பறையில் மாணவர்கள் தங்களுடைய அனுபவங்களுடன் கணிதப்பாடக்கூறுகளை உள்ளார்ந்த கருத்தியல் சிந்தனைகளுடன் ஒருங்கிணைந்து உணர்வுபூர்வமாக கற்றுக்கொள்வார்கள். நம்மைச்சுற்றி நாள்தோறும் எழக்கூடிய சிக்கல்களுக்கு தீர்வு காண்பதற்கான புதிய விதிகளை உருவாக்கி, அதை விவரிக்கும் திறமைகளையும் பெறுவார்கள். இத்திறமைகளைப்பெற கணித அறிவுடன் மொழித்திறமையும் அவசியம் என்பதை மாணவர்களுக்கு உணரவைக்க வேண்டும். இத்திறமைகளை பெறவதற்கு போதுமான அளவு படிப்பதும் படைப்பதும் வாழ்வின் சிறப்பு அம்சமாகும். வாழ்க்கையை சிறக்கவைக்க உதவும் ஒரு இசைக்கருவி அதனை மீட்டும் ஞானத்தைப் பெறுவோம்.

மகிழ்வோம்! மலர்வோம்! வளர்வோம்!! வாழ்வோம்!!

இப்பாடப்புத்தகம் கல்லூரி மற்றும் பள்ளிகளில் பணியாற்றும் ஆசிரியர்கள் உள்ளடக்கிய வல்லுநர் குழுவால் உருவாக்கப்பட்டது. இப்பாடபுத்தகம் வடிவமைப்பதற்கு உழைத்த அனைவருக்கும் எங்களுடைய இதயபூர்வமான நன்றி தெரிவித்துக்கொள்கிறோம். தங்களுடைய விமர்சனங்களையும் அறிவுரைகளையும் வரவேற்கிறோம்.

இப்படிக்கு

பாடநூல் மேம்பாட்டுக்குழு

கணிதம் பத்தாம் வகுப்பு

தேசிய கீதம்

– இரவீந்திரநாத் தாகூர்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
பஞ்சாப ஸிந்த் குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா
உச்சல ஜலதி தரங்கா
தவ சுப நாமே ஜாகே
தவ சுப ஆசிஸ மாகே
காஹே தவ ஜய காதா
ஜன கண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
ஜய ஹே ஜய ஹே ஜய ஹே
ஜய ஜய ஜய ஜய ஹே!

உறுதிமொழி

'இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன்பிறப்புகள்.

என் நாட்டை நான் பெரிதும் நேசிக்கிறேன். இந்நாட்டின் பழம்பெருமைக்காகவும் பன்முக மரபுச் சிறப்பிற்காகவும் நான் பெருமிதம் அடைகிறேன். இந்நாட்டின் பெருமைக்குத் தகுந்து விளங்கிட என்றும் பாடுபடுவேன்.

என்னுடைய பெற்றோர், ஆசிரியர்கள், எனக்கு வயதில் மூத்தோர் அனைவரையும் மதிப்பேன். எல்லோரிடமும் அன்பும் மரியாதையும் காட்டுவேன். விலங்குகளிடத்தில் கருணை காட்டுவேன்.

என் நாட்டிற்கும் என் மக்களுக்கும் உழைத்திட முனைந்து நிற்பேன். அவர்கள் நலமும் வளமும் பெறுவதிலே நான் என்றும் மகிழ்ச்சி காண்பேன்.'

அத்தியாயம்

1 மெய் எண்கள் (REAL NUMBERS)

1.1. அறிமுகம்

நம்முடைய வாழ்க்கை எண்களால் நிரம்பியுள்ளது. நீங்கள் பிறந்த நேரத்தை கற்பனை செய்து பாருங்கள். உன்னுடைய பெற்றோர்கள் நீ பிறந்த நேரத்தையும், உன்னுடைய உயரத்தையும், குறிப்பாக உன்னுடைய கை விரல்கள் மேலும் கால்விரல்களை எண்ணி மகிழ்வார்கள். இவ்வாறு நம்முடைய வாழ்க்கையில் எண்கள் கடைசிவரை நம்முடனேயே இருக்கும்.

எண்களை நீங்கள் வேறு எந்தெந்த சூழ்நிலைகளில் கையாளுகின்றீர்கள்?

நம்முடைய வயதை கண்டுபிடிக்கவும், வருமானம், செலவு மற்றும் சேமிப்பை கணிப்பதில் எண்களை பயன்படுத்துகிறோம்.

இந்த அத்தியாத்தில் நாம் எண்களைப் பற்றி மேலும் சில கருத்துகளை பார்ப்போம். கணித சாம்ராஜ்யத்தில் எண்கள் முதன்மையான பாத்திரத்தை பெற்றுள்ளன. எண்களின் மேன்மையை பற்றியும் அவற்றின் ஆச்சர்யப்படுத்தும் தன்மையை பற்றியும் பார்ப்போம். சில தொகுப்புகளிலுள்ள அமைப்புகளை, உற்றுநோக்கும் போது அவற்றிலுள்ள அழகுணர்ச்சி மற்றும் கலைநயம் நம்மை மகிழ்விக்கிறது.

இப்போது ஒரு எடுத்துக்காட்டை பார்ப்போம். நாம் ஒரு பூந்தோட்டத்தை பார்த்துக் கொண்டிக்கும் போது தேனீக்கள் கூட்டம் பூக்களின் மீது அமர்வதை காணலாம். இத்தகைய ஒரு நிகழ்வை கற்பனை செய்துகொள்வோம். ஒரு தோட்டத்தில் தேனீக்கள் இரண்டு பூக்களின் மீது சமமான எண்ணிக்கையில் அமரும் போது ஒரு தேனீ மீதமாகிறது. மூன்று பூக்களின் மீது சமமான எண்ணிக்கையில் அமரும் போது இரண்டு தேனீக்கள் மீதமாகிறது. நான்கு பூக்களின் மீது சமமான எண்ணிக்கையில் அமரும் போது மூன்று தேனீக்கள் மீதமாகிறது. இவ்வாறே ஐந்து பூக்களின் மீது சமமான எண்ணிக்கையில் அமரும் போது எந்த தேனீயும் மீதமாவதில்லை. தோட்டத்தில் அதிகபட்சமாக 50 தேனீக்கள் இருந்தால் பூக்களின் மீது அமரும் தேனீக்கள் எத்தனை?

இப்போது இந்த புதிரை தீர்ப்போம்.

பூக்களின் மீது அமரும் தேனீக்களின் எண்ணிகை 'x'. எனக்கொண்டு கவனித்தால் நமக்கு $x \leq 50$. என கிடைக்கிறது.

பூக்களின் மீது அமரும் தேனீக்களை ஐந்து சமமான பாகங்களாகப் பிரித்தால் ஒரு தேனீகூட மீதமாவதில்லை என்பதை நினைவு கூர். இதை ஒரு இயல் எண் 'a' உடன் தொடர்பு படுத்தும்போது $x = 5a + 0$ என எழுதலாம்.

பூக்களின் மீது அமரும் தேனீக்களை 4 சமமான பாகங்களாக பிரிக்கும் போது 3 தேனீக்கள் மீதமாகிறது இதை இயல் எண் 'b' உடன் தொடர்பு படுத்தும்போது $x = 4b + 3$ என கிடைக்கிறது.

பூக்களின் மீது அமரும் தேனீக்களை 3 சமமான பாகங்களாக பிரிக்கும் போது 2 தேனீக்கள் மீதமாகிறது இதை இயல் எண் 'c' உடன் தொடர்பு படுத்தும்போது $x = 3c + 2$ என கிடைக்கிறது.

பூக்களின் மீது அமரும் தேனீக்களை 2 சமமான பாகங்களாக பிரிக்கும் போது 1 தேனீ மீதமாகிறது இதை இயல் எண் 'd' உடன் தொடர்புபடுத்தும்போது $x = 2d + 1$ என கிடைக்கிறது.

அதாவது ஒவ்வொரு வகையிலும் ஒரு x மேலும் இதை மிகை முழு எண் y (இந்த எடுத்துக்காட்டில் yன் மதிப்புகள் வரிசையாக $5, 4, 3$ மேலும் $2)$ y ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி 'r' (இங்கு r என்பது $0, 3, 2), y$ என்பது yஐ விட சிறியது.

இந்த சூழ்நிலையில் நாம் சமன்பாட்டை எழுதும் போது யூக்ளிட்டின் வகுத்தல் விதியை பயன்படுத்துகிறோம்.

இனி நம்முடைய புதிருக்கும் சென்றால் எவ்வாறு இதை தீர்ப்பது தெரியுமா? $x = 5a + 0$. ஐ திருப்திபடுத்தும் 5ன் மடங்குகளே நமக்கு தேவையான தீர்வு ஆகும்.

ஒரு எண்ணை 2ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 1 கிடைத்தால் அதை ஒற்றை எண் என்கிறோம். இந்த புதிரை தீர்ப்பதில் 5ன் மங்குகள் ஒற்றை எண் ஆனதால் $5, 15, 25, 35$ மற்றும் 45 ஆகியவற்றை எடுத்துக்கொள்ளலாம். இவ்வாறே மற்ற இரண்டு நிபந்தனைகளையும் திருப்திபடுத்தும் எண் 35 என நமக்கு கிடைக்கிறது.

எனவே பூக்களின் மீது அமரும் தேனீக்களின் எண்ணிக்கை 35 ஆகும். இப்போது விடையை சரிப்பார்ப்போம்.

35ஐ 2ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 கிடைக்கும். இதை

$35 = 2 \times 17 + 1$ என எழுதலாம்.

35ஐ 3ஆல் வகுத்தால் மீதி 2 கிடைக்கும். இதை

$35 = 3 \times 11 + 2$ என எழுதலாம்

35ஐ 4ஆல் வகுத்தால் மீதி 3 கிடைக்கும். இதை

$35 = 4 \times 8 + 3$ என எழுதலாம்

35ஐ 5ஆல் வகுத்தால் மீதி '0'. கிடைக்கும். இதை

$35 = 5 \times 7 + 0$ என எழுதலாம்

இதிலிருந்து நாம் ஒரு முடிவுக்கு வரலாம். ஒவ்வொரு மிகைமுழு ஜோடி a மேலும்

$a = bq + r, 0 \leq r < b$ ஐ திருப்திபடுத்தும் படி கண்டுபிடிக்கலாம்.

இதை செய்

பின்வரும் மிகைமுழுக்கள் a மேலும் b, $a = bq + r$. ஐ திருப்திபடுத்துகிறது எனில் q மேலும் r ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

(i) $a = 13, \quad b = 3$ (ii) $a = 80, \ b = 8$ (iii) $a = 125, \ b = 5$

(iv) $a = 132, \ b = 11$

சிந்திந்து கலந்துரையாடு

மேலுள்ள இதைசெய் வினாவில் q மேலும் r ன் தன்மை என்ன?

தோற்றம் 1.1 : வகுத்தல் கோட்பாடு (Division Algorithm)

$a = bq + r, \ 0 \le r < b$. ஐ திருப்திபடுத்தும் படி கொடுக்கப்பட்ட மிகை முழுக்கள் a மேலும் b க்கு தகுந்தவாறு q மேலும் r எனும் தனித்த ஒரு ஜோடி முழுக்கள் இருக்கும்.

இந்த முடிவு யூக்ளிடின் மூலங்கள் எனும் புத்தகங்களில் 7வது புத்தகத்தில் இடம் பெற்றுள்ளது. யூக்ளிடின் வகுத்தல் அல்காரிதம் இந்த விதியை அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளது.

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு முழுக்களின் மீப்பெரு பொதுகாரணி (HCF) ஐ கண்டறிவதற்கு யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாட்டை பயன்படுத்தலாம். a மேலும் b எனும் இரண்டு மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.கா. என்பது a மேலும் b ஐ வகுக்கும் மிகப்பெரிய பொதுகாரணி d ஆகும் என்பதை நினைவு கூர்க.

60 மேலும் 100 ன் மீ.பொ.கா. வை பின்வரும் செயல்பாட்டின் மூலம் கண்டறிவோம்.

செயல்பாடு: 60செ.மீ மற்றும் 100செ.மீ அளவுடைய மேலும் சமமான அகலமுடைய இரண்டு காகிதத்துண்டுகளை எடுத்துக்கொள். இந்த இரண்டு காகிதத் துண்டுகளையும் மீதமில்லாமல் அளக்கும் மிகப்பெரிய நீளமுடைய காகிதத்துண்டை கண்டுபிடி.

100செ.மீ அளவுடைய காகிதத்துண்டிலிருந்து 60செ.மீ காகிதத்துண்டை அளந்து வெட்டி எடுத்தால் 40செ.மீ காகிதத்துண்டு மீதமாகும்.

40செ.மீ காகிதத்துண்டைக் கொண்டு 60செ.மீ காகிதத்துண்டை வெட்டி எடுக்கும் போது 20செ.மீ மீதமாகிறது.

இப்பொழுது 20செ.மீ காகிதத்துண்டைக் கொண்டு 40செ.மீ காகிதத்துண்டை வெட்டி எடுக்கும் போது 20செ.மீ மீதமாகிறது. மேலும் இதை 20செ.மீ அளவுடைய அளவு நாடாவால் அளக்கும் போது இரண்டும் ஒன்றன் மீது ஒன்று சரியாக ஒன்றுகிறது. அதாவது ஏதும் மீதமில்லை.

எனவே 100செ.மீ மற்றும் 60செ.மீ காகிதத்துண்டுகளை மீதமில்லாமல் அளக்கும் மிகப்பெரிய காகிதத்துண்டின் அளவு 20செ.மீ என்ற முடிவுக்கு வரலாம்.

இந்த செயல்பாட்டை யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாட்டுடன் தொடர்புபடுத்தினால் 60 மேலும் 100ன் மீ.பொ.கா.வை பெறலாம்.

100ஐ 60 ஆல் வகுத்தால் மீதி 40 கிடைக்கிறது. இதை

$100 = (60 \times 1) + 40$ என பெறலாம்.

மேலுள்ளவற்றில் வகுக்கும் எண்.60 மேலும் மீதி 40ஐ யூக்ளிடின் வகுத்தல் விதியோடு தொடர்புபடுத்தினால்

$60 = (40 \times 1) + 20$ என பெறலாம்.

மேலுள்ளவற்றில் வகுக்கும் எண்.40 மேலும் மீதி 20ஐ யூக்ளிடின் வகுத்தல் விதியோடு தொடர்புபடுத்தினால்

$40 = (20 \times 2) + 0$ என பெறலாம்.

இங்கு மீதி பூஜ்ஜியம் கிடைத்தது. எனவே இதை மேற்கொண்டு நீட்டிக்க முடியாது என கவனி. இந்நிலையில் வகுக்கும் எண் 20 என்பது 60 மேலும் 100ஐ வகுக்கும். அதாவது மீ.பொ.கா. 20. மேலும் 60 மற்றும் 100ன் அனைத்து காரணிகளையும் எழுதி இதை எளிதாக சரிபார்க்கலாம்.60 மற்றும் 100ன் மீ.பொ.கா-வை கண்டறிவதற்கான நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட தொடர் என்பதை அறியலாம். இதை **யூக்ளிட் வகுத்தல்** கோட்பாட்டின் படி தெளிவாக காணலாம்.

இரண்டு மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.காவை கண்டறிய பின்வரும் படிகளை பின்பற்று (c மற்றும் d இரண்டு மிகை முழுக்கள் மேலும் $c > d$)

படி 1 : c மற்றும் dக்கு யூக்ளிட் வகுத்தல் கோட்பாட்டை பயன்படுத்தினால் q மற்றும் r அதாவது $c = dq + r, 0 \leq r < d$ என உள்ளவாறு ஒரு ஜோடி முழு எண்களை கண்டறியவும்.

படி 2 : $r = 0$ எனில் c மற்றும் dன் மீ.பொ.கா d ஆகும். $r \neq 0$ எனில் d மற்றும் rக்கு மீண்டும் யூக்ளிட் வகுத்தல் கோட்பாட்டை பயன்படுத்து.

படி 3 : மீதி பூஜ்ஜியம் வரும்வரை இந்த முறையை தொடர்ந்து செய்ய வேண்டும். இப்பொழுது கிடைக்கும் வகுக்கும் எண் தான் தேவையான மீ.பொ.கா ஆகும்.

இந்த வழிமுறை HCF (c, d) = HCF (d, r) உடன் ஒத்து இருக்கிறது. இங்கு HCF (c, d) எனும் குறியீடு c மற்றும் dன் மீ.பொ.காவை குறிக்கிறது.

இதை செய்

யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றின் மீ.பொ.கா. கண்டுபிடி.

(i) 50 மேலும் 70 (ii) 96 மேலும் 72 (iii) 300 மேலும் 550

(iv) 1860 மேலும்2015

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

1.2 மேலும் 0.12ன் மீ.பொ.கா. வை கண்டுபிடிக்க முடியுமா? உன்னுடைய விடையை நியாயப்படுத்து.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாடு பெரிய எண்களின் மீ.பொ.கா கண்டறிவதற்கு மட்டுமல்லாமல் கணினி திட்டமிடல் பணிகளில் பயன்படுத்தப்பட பழமையான கோட்டுபாடுகளில் இதுவும் ஒன்றாகும்.

கவனிக்க வேண்டியவை :

1. யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாடு மேலும் வழிமுறைகள் இவை இரண்டும் ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்பு கொண்டுள்ளதால். மக்கள் இதை வகுத்தல் வழிமுறை என்றும் கூறுவர்.
2. யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாடு வெறும் மிகை முழுக்கள் மீதே பயன்படுத்தப்பட்டது. இதை அனைத்து முழுக்களின் மீதும் விரிவுப்படுத்தலாம். (அதாவது a மற்றும் b இங்கு $b \neq 0$.) ஆனால் இங்கு இதைப்பற்றி விவாதிக்கப்போவதில்லை.

எண்களின் பண்புகளை கண்டறிவதில் யூக்ளிட்டின் வகுத்தல் கோட்பாட்டின் செயல்பாடுகள் பல்வேறு உள்ளன. இவற்றுள் சில செயல்பாடுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு : 1 q ஏதேனும் ஒரு முழு எனில் ஒவ்வொரு மிகை இரட்டை முழுவும் $2q$ வடிவில் இருக்கும் எனக்காட்டு. மேலும் ஒவ்வொரு மிகை ஒற்றை முழுவும் $2q + 1$ வடிவில் இருக்கும் எனக்காட்டு.

தீர்வு : a என்பது ஒரு மிகை முழு மேலும் $b = 2$. என்க. யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாட்டின்படி $a = 2q + r$, ஏதேனும் சில முழு $q \geq 0$, க்கு $r = 0$ அல்லது $r = 1$, ஏனெனில் $0 \leq r < 2$. எனவே $a = 2q$ அல்லது $2q + 1$. ஆகும்.

a என்பது $2q$ விடிவில் இருந்தால் அது ஒரு இரட்டை முழு ஆகிறது. மேலும் ஒரு மிகை முழு இரட்டை அல்லது ஒற்றை எண் ஆக இருக்கவேண்டும். எனவே எந்த ஒரு மிகை ஒற்றை முழுவின் வடிவம் $2q + 1$. ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு : 2 q என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு எனில் ஒவ்வொரு மிகை ஒற்றை முழுவையும் $4q + 1$ அல்லது $4q + 3$ வடிவில் எழுத முடியும் எனக்காட்டு.

தீர்வு : a என்பது மிகை ஒற்றை முழு என்க. யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி a மேலும் $b = 4$. என கிடைக்கிறது.

$a = 4q + r, q \geq 0, 0 \leq r < 4$, எனவே $0, 1, 2$ மேலும் 3. ஆகியவை மீதியாக கிடைக்க வாய்ப்பு உள்ளது.

அதாவது, a ஆனது $4q$, அல்லது $4q + 1$, அல்லது $4q + 2$, அல்லது $4q + 3$, ஆக இருக்கலாம். இங்கு q என்பது ஈவை குறிக்கிறது. a என்பது ஒற்றை எண் என்பதால் a ஆனது $4q$ அல்லது $4q + 2$ ஆக இருக்க வாய்ப்பு இல்லை (ஏனெனில் இவை இரண்டும் 2 ஆல் வகுபடக்கூடியவை).

எனவே எந்த ஒரு ஒற்றை முழுவும் $4q + 1$ அல்லது $4q + 3$. வடிவில் இருக்கும்.

பயிற்சி - 1.1

1. யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றின் மீ.பெ.வ. கண்டுபிடி.
   (i) 900 மேலும் 270 (ii) 196 மேலும்38220 (iii) 1651 மேலும் 2032
2. q என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு எனில் யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு மிகை ஒற்றை முழுவையும் $6q + 1$ அல்லது $6q + 3$ அல்லது $6q + 5$, வடிவில் எழுத முடியும் எனக்காட்டு.
3. யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி ஏதேனும் ஒரு மிகை முழுவின் வர்க்கம் $3p$ அல்லது $3p + 1$ வடிவில் இருக்கும் எனக்காட்டு.
4. யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி ஏதேனும் ஒரு மிகை முழுவின் கணம் $9m$, $9m + 1$ அல்லது $9m + 8$. வடிவில் இருக்கும் எனக்காட்டு.
5. n என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகை முழு எனில் n, $n + 2$ அல்லது $n + 4$ இவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்று மட்டுமே 3 ஆல் வகுபடும் எனக்காட்டு.

1.2 எண் கணித அடிப்படை தேற்றம்

யூக்ளிடின் வகுத்தல் $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ ஐ திருப்திபடுத்தும்படி கொடுக்கப்பட்ட மிகை முழுக்கள் a மேலும் b க்கு தகுந்தவாறு q மேலும் r எனும் தனித்த ஒரு ஜோடி முழுக்கள் இருக்கும் என நமக்குத் தெரியும்.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாடு $a = bq + r$ல் $r=0$ எனில் a,b மேலும் qக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

மேற்கண்ட விவாதத்திலிருந்து 'a' ஆனது 'b' ஆல் வகுப்பட்டால் 'b' ஆனது 'a' ன் காரணி ஆகும் என்பதை தெரிந்துவைத்திருப்பீர்கள்.

எடுத்துக்காட்டாக
$$24 = 2 \times 12$$
$$24 = 8 \times 3$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$24 = 2 \times 12$ எனில் 2 மேலும் 12ஐ 24ன் காரணிகள் என்கிறோம். இதை பகாகாரணிகளின் பெருக்கற்பலனை $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ என எழுதலாம் என்று நமக்குத் தெரியும்.

சில பகாஎண்கள் $2, 3, 7, 11$ மேலும் 23. ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். இவற்றில் சிலவற்றை அல்லது அனைத்தையும், எந்த எண்ணையும் எத்தனை முறையாயினும் எடுத்துக்கொண்டு பெருக்கினால் எண்ணற்ற மிகப்பெரிய மிகைமுழுக்களை நாம் உருவாக்கலாம். சிலவற்றை பட்டியலிடுவோம்.

$2 \times 3 \times 11 = 66$ $7 \times 11 \times 23 = 1771$

$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$ $2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$

$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$ $2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

இப்பொழுது நீங்கள் எடுத்துக்கொண்ட ஒரு பகா எண்களின் தொகுப்பில் வாய்ப்புள்ள அனைத்து பகா எண்கள் உள்ளன எனக்கொள்வோம். அவ்வாறான தொகுப்பை நீங்கள் ஊகிக்க முடிகிறதா? இந்த தொகுப்பில் பகு எண்களின் எண்ணிக்கை எண்ணக்கூடிய அளவில் இருக்குமா? அல்லது எண்ணற்றவையாக இருக்குமா? உண்மையில் முடிவில்லா பகா எண்கள் இருக்கின்றன. ஆதலால் நாம் அனைத்து பகா எண்களையும் பல்வேறு முறைகளில் பெருக்கினால் நமக்கு முடிவில்லா பகு எண்கள் கிடைக்கும்.

தேற்றம் - 1.2 : (எண் கணித அடிப்படைத் தேற்றம்) : ஒவ்வொரு பகு எண்ணையும் பகா எண்களின் பெருக்கலாக எழுதலாம் மற்றும் பகா காரணிகளின் வரிசை எதுவாகிலும் இந்த காரணிகளின் பெருக்கல் ஒன்றே காரணிப்படுத்தலாம்.

இது நமக்கு எண் கணித அடிப்படை தேற்றத்தை கொடுக்கிறது. ஒவ்வொரு பகு எண்களையும் பகாக் காரணிகளின் பெருக்கலாக எழுதலாம். இதை மேலும் தெளிவுபட கூற வேண்டுமெனில் பகா எண்களின் வரிசை எதுவாகினும் ஒவ்வொரு பகு எண்ணையும பகா காரணிகளின் பெருக்கலாக ஒரே ஒரு வழியில் (Unique) எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக நாம் 210 என்ற எண்ணை காரணிப்படுத்தும் போது 2 x3 x 5x7 என்பதும் 3x 5x7x 2, என்பது அல்லது வேறுவிதமான வரிசையின் பெருக்கலாகவும் எழுதினாலும் ஒன்றே என்று கருதலாம். ஆகவே எந்த ஒரு பகு எண்ணையும் பகா காரணிகளின் பெருக்கலாக ஒரே ஒரு விதமாக எழுதலாம்.

சாதரணமாக கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பகு எண் x ஐ $x = p_1p_2...p_n$, என்க. இதில் p_1, p_2..., p_n என்பவை ஏறுவரிசையில் எழுதப்பட்ட பகாஎண்கள் அதாவது $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n$. இந்த நிலையில் ஒரே விதமான பகா காரணிகளை பயன்படுத்தினால் பகா எண்களின் அடுக்குகள் கிடைக்கும். ஒரு முறை நாம் இந்த எண்கள் ஏறுவரிசையில் உள்ளன என நினைத்தால், இந்த பெருக்கல் ஒரே விதமாக இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக

$$27300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 13$$

முயற்சி செய்க

2310ஐ பகாக்காரணிகளின் பெருக்கலாக எழுதுங்கள். இந்த எண்ணை உன் நண்பர்கள் எவ்வாறு காரணிப்படுத்தினார்கள் என்பதை பாருங்கள். உன்னைப்போன்றே அவர்களும் செய்தார்களா? கடைசி விளைவை, உன் நண்பர்களின் விளைவுகளுடன் சரிபார்க்கவும். இதை மேலும் 3 அல்லது 4 எண்களை எடுத்துக்கொண்டு முயற்சிக்கவும். நீ அறிவது என்ன?

இப்போது எண்கணித அடிப்படை தேற்றத்தை பயன்படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டு-3. 4^n என்ற எண்களை கருதுவோம். இங்கு n ஓர் இயல்எண். nன் எந்த மதிப்பிற்காவது 4^n என்ற எண் '0' (பூச்சியம்) என்ற இலக்கத்துடன் முடிவடைகிறதா இல்லையா என சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு : n ஓர் இயல் எண்ணாக உள்ள 4^n என்ற எண் பூச்சியத்துடன் முடிவடையவேண்டுமெனில் அது 5ஆல் சரியாக வகுபடவேண்டும். அதாவது 4^n என்ற எண்ணின் பகாக்காரணிகளில் 5 என்ற பகா எண் இருக்க வேண்டும். ஆனால் இது சாத்தியமல்ல. ஏனெனில் $4^n = (2)^{2n}$ ஆகவே 4^nன் காரணிகளில் இருக்கக்கூடிய ஒரே பகாஎண் 2 மட்டுமே. பகாகாரணிகளில் 5 இல்லாததால், 4^n '0' வில் முடியுமாறு இயல் எண் n எதுவும் இல்லை.

எண் கணித அடிப்படை தேற்றத்தை பயன்படுத்தி இரண்டு மிகை எண்களின் மீ.பொ.கா. (மீப்பெருபொதுகாரணி) மற்றும் மீ.பொ.ம. (மீச்சிறு பொது மடங்கு) ஆகியவற்றை எவ்வாறு காண்பது என்பதை முன்பே கற்றிருக்கிறீர்கள். இந்த முறை பகா காரணியாக்கல் முறை என்று அழைக்கப்படுகிறது. கீழ்கண்ட எடுத்துக்காட்டின் மூலம் நாம் இதை ஒருமுறை நினைவுக்கு கொண்டுவருவோம்.

எடுத்துக்காட்டு-4. 12 மற்றும் 18 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.கா மற்றும் மீ.பொ.ம ஆகியவற்றை பகா காரணியாக்கல் முறையில் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $12 = 2 \text{ X } 2 \text{ X } 3 = 2^2 \text{ X } 3^1$

$18 = 2 \text{ X } 3 \text{ X } 3 = 2^1 \text{ X } 3^2$ என நமக்குத் தெரியும்.

12, 18ன் மீ.பொ.கா $= 2^1 \text{ X } 3^1 = 6$ = **எண்களின் பொது காரணிகளின் மிகச்சிறிய அடுக்குகளின் பெருக்கல்**

12, 18ன் மீ.பொ.ம. $= 2^2 \text{ X } 3^2 = 36$ = **எண்களின் பொது காரணிகளின் மிகப்பெரிய அடுக்குகளின் பெருக்கல்**

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, (12,18)ன் மீ.பொ.கா X (12, 18)ன் மீ.பொ.ம = 12 X 18 என நீங்கள் கவனித்திருப்பீர்கள். உண்மையில் இரண்டு மிகை முழுக்கள் a மேலும் bக்கு மீ.பொ.கா. (a, b) X மீ.சி.ம(a, b) = a X b ஆகுமென சரிபார்க்கலாம். இதிலிருந்து இரண்டு மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.ம. தெரிந்தால் அந்த எண்களின் மீ.பொ.கா காணலாம்.

இதை செய்

கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஒரு ஜோடி எண்களுக்கு மீ.பொ.கா மற்றும் மீ.பொ.ம. ஆகியவற்றை பகா காரணியாக்கல் முறையில் கண்டுபிடி.

(i) 120, 90 (ii) 50, 60 (iii) 37, 49

முயற்சி செய்

'n' மேலும் 'm' ஏதேனும் இயல் எண்களுக்கு $3^n \times 4^m$ன் தீர்வு 0 அல்லது 5 ஆல் முடிவடையாது எனக்காட்டு.

பயிற்சி - 1.2

1. கீழ்கண்டவற்றை பகாக்காரணிகளின் பெருக்கலாக எழுது .

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. கீழ்கண்ட முழுக்களுக்கு மீ.பொ.ம மற்றும் மீ.பொ.கா ஆகியவற்றை பகாக்காரணியாக்கல் முறையில் கண்டுபிடி.

   (i) 12, 15 மற்றும் 21 (ii) 17, 23 மற்றும் 29 (iii) 8, 9 மற்றும் 25

   (iv) 72 மற்றும் 108 (v) 306 மற்றும் 657

3. n ஓர் இயல் எண் எனில் 6^n என்ற எண் பூச்சியத்துடன் முடிவடையுமா, இல்லையா என சரிபார்க்கவும்.

4. 7 X 11 X 13 + 13 மற்றும் 7 X 6 X 5 X 4 X 3 X 2 X 1 + 5 ஆகியவை எவ்வாறு பகுஎண்கள் ஆகின்றன என்பதை விவரி.

5. (17 X 11 X 2) + (17 X 11 X 5) என்பது ஒரு பகு எண் என்பதை எவ்வாறு நிரூபிப்பாய்?

6. 6^{100}.ன் கடைசி இலக்கம் என்ன?

மெய்எண்களைப்பற்றி மேலும் ஆய்வதற்கு எண்கணித அடிப்படை தேற்றத்தை பயன்படுத்துவோம். முதலில் இந்தப்பகுதியில் முடிவுறு தசம எண்களாக இருக்கும் மற்றும் முடிவுறா சுழல் தசம எண்களாக இருக்கும் விகிதமுறு எண்களைபற்றி ஆராயப் போகிறோம். பின்னர் $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{5}$ எனும் விகிதமுறா எண்களுக்கு இதை பயன்படுத்துவோம்.

1.2.2 விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் அவற்றின் தசம வடிவம்

இதுவரை நாம் முழுக்களின் பண்புகளைப் பற்றி விவாதித்தோம். கொடுக்கப்பட்ட முழுவிற்கு முன்னி தொடரி முழுக்களை எவ்வாறு நிர்ணயிப்பது?

ஒரு முழுவிற்கு மற்றும் அதன் முன்னி அல்லது தொடரி முழுவிற்கு இடைப்பட்ட வித்தியாசம் 1 என்பதை நினைவில் வைத்திருப்பீர்கள். இந்த பண்பை ஆதாரமாகக்கொண்டு தேவையான முழுக்களை நிர்ணயிக்கலாம்.

0 மற்றும் 1 அல்லது 1 மற்றும் 2...... இவற்றிற்கு இடையில் ஏதேனும் எண்கள் இருக்கும் என நினைக்கிறாயா? இத்தகைய எண்களை என்னவென்று அழைப்பர்? இவற்றையே விகிதமுறு எண்கள் என்று அழைக்கிறோம்.

விகிதமுறு எண்கள் முடிவுறு தசம வடிவிலும் முடிவுறா சுழல் தசம வடிவிலும் இருக்கும் என 9ஆம் வகுப்பில் நீங்கள் கற்றிருப்பீர்கள். இந்த பகுதியில் ஒரு விகிதமுறு எண் $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ என்பது எப்பொழுது முடிவுறு தசம வடிவில் இருக்கும்? எப்பொழுது முடிவுறா சூழல் தசம வடிவில் இருக்கும்? என்பதை பின்வரும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் காண்போம்.

கீழ்கண்ட சில விகிதமுறு எண்களின் முடிவுறு தசம வடிவத்தை ஆராய்வோம்.

(i) 0.375 (ii) 1.04 (iii) 0.0875 (iv) 12.5 (v) 0.00025

இப்போது இந்த எண்களை $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதுவோம்.

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $1.04 = \frac{104}{100} = \frac{104}{10^2}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{125}{10^1}$

நாம் எடுத்துக்கொண்ட முடிவுறு தசம எண்களின் பகுதி 10ன் அடுக்களாக உடைய விகிதமுறு எண்ணாக எழுதமுடியும் என்பதை நாம் பார்க்கலாம். இப்பொழுது நாம் தொகுதி, பகுதிகளை பகா காரணியாக்கி மிகச் சுருங்கிய விகிதமுறு வடிவில் எழுதலாம்.

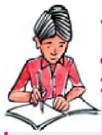
இப்பொழுது (i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$

(ii) $1.04 = \frac{104}{10^2} = \frac{2^3 \times 13}{2^2 \times 5^2} = \frac{26}{5^2}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{5^3 \times 7}{2^4 \times 5^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$

(iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{5^3}{2 \times 5}$

ஒவ்வொரு பகுதிகளின் அமைப்புகளை கவனித்தீர்களா. அவைகள் மிகச்சுருங்கிய விகிதமுறு $(\frac{p}{q})$ எண்ணாக எழுதப்படுகிறது. இங்கு p மற்றும் q ஆகியவை சார்பகா எண்கள். மேலும் பகுதி (அதாவது q) 2 அல்லது 5 அல்லது இவ்விரண்டின் அடுக்குகளாக மட்டுமே உள்ளதை கவனிக்கலாம். ஏனெனில் 10ன் அடுக்குகள் 2 மற்றும் 5ன் அடுக்குகளை மட்டுமே காரணிகளாக பெற்றிருக்கும்.



இதை செய்

கீழே உள்ள முடிவுறு தசமஎண்களை $\frac{p}{q}$, வடிவில் எழுதவும். ($q \neq 0$ மற்றும் p, q என்பவை சார்பகா எண்கள்)

(i) 15.265 (ii) 0.1255 (iii) 0.4 (iv) 23.34 (v) 1215.8

இவற்றிலிருந்து பகுதிகளைப் 2^n5^m வடிவில் எழுது.

நீ அறிவது எனன?

நாம் சில எடுத்துக்காட்டுகளை மட்டுமே ஆராய்ந்தபோதிலும் முடிவுறு தசம எண்ணாக எழுதக்கூடிய எந்தஒரு விகிதமுறு எண்ணையும் பகுதி 10ன் அடுக்காக உள்ள விகிதமுறு எண்ணாக எழுதமுடியும் என்பதை நீ பார்க்கலாம். 10ன் பகாக்காரணிகள் 2 மற்றும் 5 மட்டுமே. ஆகவே ஒரு விகிதமுறு எண்ணை சுருக்கும் போது அந்த எண் $\frac{p}{q}$, வடிவில் இருக்கும் என்பதை காணலாம். இங்கு q ன் பகாக்காரணிகள் 2^n5^m வடிவில் இருக்கும். மேலும் n, m என்பவை ஏதேனும் இரண்டு குறை முழுக்கள் அல்லாத எண்கள்.

இந்த முடிவை நாம் தேற்றம் உருவத்தில் கீழ்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

தேற்றம்-1.3 : முடிவுறு தசம எண்ணாக உடைய ஒரு விகிதமுறு எண் x ஐ $\frac{p}{q}$, வடிவில் எழுத முடியும். இங்கு p மற்றும் q ஆகியவை சார்பகா எண்கள் மேலும் qன் பகா காரணிகள் n,m ஆகியவை குறை முழுக்கள் இல்லாத எண்கள் 2^n5^m வடிவில் இருக்கும்.

இதன் மறுதலையை நாம் ஆராய்ந்தால் நமக்கு ஓர் அதிசயத்தக்க ஆலோசனை ஏற்படாமல் போகாது. அதாவது $\frac{p}{q}$ வடிவில் ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் qன் வடிவம் 2^n5^m (இங்கு n,m என்பவை குறை முழுக்கள் அல்ல) இருந்தால் $\frac{p}{q}$ ஒரு முடிவுறு தசமஎண் ஆகுமா?

ஆகவே $\frac{p}{q}$, (இங்கு q என்பது 2^n5^m) வடிவில் உள்ள ஒரு விகிதமுறு எண்ணை அதற்கு சமானமாக உள்ள $\frac{a}{b}$, (b என்பது 10ன் அடுக்குகள்) என்ற விகிதமுறு எண்ணாக மாற்று.

(i) $\frac{25}{2} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{125}{10} = 12.5$ (ii) $\frac{26}{25} = \frac{26}{5^2} = \frac{13 \times 2^3}{2^2 \times 5^2} = \frac{104}{10^2} = 1.04$

(iii) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$ (iv) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகள் $\frac{p}{q}$ (இதில் q என்பது 2^n5^m ஆகும்) உள்ள ஒரு விகிதமுறு எண்ணை அதற்கு சமமான விகிதமுறு எண் $\frac{a}{b}$ ஆக எழுதலாம். இதில் b என்பது 10ன்

அடுக்கு ஆகும். எனவே இதுபோன்ற விகிதமுறு எண்கள் முடிவுறு தசமஎண்கள் ஆகும். அதாவது q என்பது 10ன் அடுக்கு எண்ணாக இருந்தது $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதக்கூடிய ஒரு விகிதமுறு எண் முடிவுறு தசமஎண்ணாக இருக்கும்.

எனவே, தேற்றம் 1.3ன் மறுதலையும் உண்மையே. இதை நாம் கீழ்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

தேற்றம்- 1.4 : n, m என்பவை குறை முழுக்கள் அல்ல. மேலும் qன் பகாக் காரணிகள் 2^n5^m வடிவில் உள்ள ஒரு விகிதமுறு எண் $x = \frac{p}{q}$ எனில் x என்பது ஒரு முடிவுறு தசமஎண்ணை பெற்றிருக்கும்.

இதை செய்

கீழே உள்ள விகிதமுறு எண்கள் $\frac{p}{q}$, வடிவில் உள்ளன. இங்கு qன் வடிவம் 2^n5^m. n, m என்பவை குறை முழுக்கள் அல்ல எனில் இவற்றை தசமஎண்ணாக மாற்றவும்

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{51}{64}$ (iv) $\frac{14}{23}$ (v) $\frac{80}{81}$

1.2.3 விகிதமுறு எண்களில் முடிவுறா சுழல் தன்மை கொண்ட தசமஎண்கள்

நாம் இப்போது முடிவுறா, மற்றும் சுழல் தன்மை கொண்ட தசம எண்களை உடைய விகிதமுறு எண்களை ஆராய்வோம். இதற்காக நாம் ஒரு எடுத்துக்காட்டை ஆராய்வோம்,

$\frac{1}{7}$ ன் தசம வடிவத்தை பார்ப்போம்.

$\frac{1}{7} = 0.1428571428571$ ..... இது ஒரு முடிவுறா, மற்றும் சுழல் தன்மை கொண்ட தசமஎண். ஈவில் '142857' எனும் இலக்கங்களின் தொகுப்பு மீண்டும் வருவதை கவனிக்கவும்.

இந்த விகிதமுறு எண்ணில் பகுதி 7, 2^n5^m எனும் வடிவில் இல்லை என்பதை கவனிக்கவும்.

$$
\begin{array}{r}
0.1428571 \\
7\overline{)1.0000000} \\
7 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
20 \\
14 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
40 \\
35 \\
\hline
50 \\
49 \\
\hline
10 \\
7 \\
\hline
30
\end{array}
$$

இதை செய்

கீழே உள்ள விகிதமுறு எண்களை தசமஎண்களாக மாற்றவும், ஈவில் சுழல் தன்மை கொண்ட இலக்கங்களின் தொகுப்பை காண்க.

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{5}{11}$ (iv) $\frac{10}{13}$

மேலே நீங்கள் செய்த இதைசெய் பயிற்சி மற்றும் மேலே காட்டியுள்ள எடுத்துக்காட்டு இவற்றின் மூலமாக நாம் கீழ்கண்ட தேற்றத்தை வரையறுக்கலாம்.

தேற்றம்-1.5 : n,m என்பவை குறை முழுக்கள் அல்ல மற்றும் qன் பகாக்காரணிகள் 2^n5^m என்ற வடிவில் இல்லாத ஒரு விகிதமுறு எண் $x = \frac{p}{q}$ எனில் x என்பது ஒரு முடிவுறா, சுழல் தன்மை கொண்ட தசமஎண்ணைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு-5. மேலே வரையறுக்கப்பட்ட தேற்றங்களின் ஆதாரமாக, வகுத்தல் செய்யாமலேயே கீழ்கண்ட விகிதமுறு எண்கள் முடிவுறு தசம எண்களா அல்லது முடிவுறா சுழல் தன்மை கொண்ட தசம எண்களா என்பதை தெரிவிக்கவும்.

(i) $\frac{16}{125}$ (ii) $\frac{25}{32}$ (iii) $\frac{100}{81}$ (iv) $\frac{41}{75}$

தீர்வு : (i) $\frac{16}{125} = \frac{16}{5 \times 5 \times 5} = \frac{16}{5^3}$ முடிவுறு தசம எண்

(ii) $\frac{25}{32} = \frac{25}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{25}{2^5}$ முடிவுறு தசம எண்

(iii) $\frac{100}{81} = \frac{100}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{10}{3^4}$ முடிவுறா சுழல் தசம எண்

(iv) $\frac{41}{75} = \frac{41}{3 \times 5 \times 5} = \frac{41}{3 \times 5^2}$ முடிவுறா சுழல் தசம எண்

எடுத்துக்காட்டு-6. கீழ்கண்ட விகிதமுறு எண்களை வகுக்காமலேயே தசம வடிவில் எழுது.

(i) $\frac{35}{50}$ (ii) $\frac{21}{25}$ (iii) $\frac{7}{8}$

தீர்வு : (i) $\frac{35}{50} = \frac{7 \times 5}{2 \times 5 \times 5} = \frac{7}{2 \times 5} = \frac{7}{10^1} = 0.7$

(ii) $\frac{21}{25} = \frac{21}{5 \times 5} = \frac{21 \times 2^2}{5 \times 5 \times 2^2} = \frac{21 \times 4}{5^2 \times 2^2} = \frac{84}{10^2} = 0.84$

(iii) $\frac{7}{8} = \frac{7}{2 \times 2 \times 2} = \frac{7}{2^3} = \frac{7 \times 5^3}{\left(2^3 \times 5^3\right)} = \frac{7 \times 25}{\left(2 \times 5\right)^3} = \frac{875}{\left(10\right)^3} = 0.875$

பயிற்சி - 1.3

1. கீழ்கண்ட விகிதமுறு எண்களை தசம வடிவில் எழுதுக. இவற்றில் எவை முடிவுறு தசம எண்கள், எவை முடிவுறா சுழல் தசம எண்கள் என்று கூறுக.

(i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{229}{400}$ (iii) $4\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{2}{11}$ (v) $\frac{8}{125}$

2. வகுக்காமலேயே கீழ்கண்ட விகிதமுறு எண்களில் எவை முடிவுறு தசம எண்கள் அல்லது எவை முடிவுறா சுழல் தசம எண்களை பெற்றிருக்கின்றன எனக்கூறு.

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{11}{12}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{9}{15}$ (ix) $\frac{36}{100}$ (x) $\frac{77}{210}$

3. தேற்றம் 1.1 ஐ பயன்படுத்தி கீழ்கண்ட விகிதமுறு எண்களை தசம எண் வடிவில் எழுதுக.
(i) $\frac{13}{25}$ (ii) $\frac{15}{16}$ (iii) $\frac{23}{2^3.5^2}$ (iv) $\frac{7218}{3^2.5^2}$ (v) $\frac{143}{110}$

4. பின்வரும் தசம எண்களை $\frac{p}{q}$ வடிவில் தெரிவிக்கவும். மேலும் q ன் பகாக்காரணிகளை எழுது. நீ அறிவது என்ன?
(i) 43.123 (ii) 0.1201201 (iii) $43.\overline{12}$ (iv) $0.\overline{63}$

1.3 விகிதமுறா எண்கள்

p,q என்பவை முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$ எனில் $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுத இயலாத மெய் எண்களை விகிதமுறா எண்கள் ("Q^1" அல்லது "S") என்று அழைக்கப்படுவதை நினைவுபடுத்திக்கொள்ளுங்கள். நீங்கள் ஏற்கனவே தெரிந்துகொண்ட சில விகிதமுறா எண்கள் சிலவற்றை காண்போம்.

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots,$$ போன்றவை.

இந்த பகுதியில் நாம் எண்கணித அடிப்படைத் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி சில மெய்யெண்களை விகிதமுறா எண்களாக நிரூபிக்கலாம். அதாவது $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ போன்றவையும், பொதுவாக p ஒரு பகா எண் எனில் $\sqrt{p}$ ம் விகிதமுறா எண் என நிரூபிக்கலாம்.

$\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண் என நிரூபிக்கும் முன் இதை எண்கணித அடிப்படைத்தேற்றம் ஆதாரமாக நிரூபிக்கப்பட்ட கூற்றை தெரிந்துகொள்வோம்.

கூற்று -1.6 : p என்பது ஒரு பகா எண் மற்றும் a ஒரு மிகை முழு எனில் a^2 ஐ p சரியாக வகுத்தால் a ஐ p சரியாக வகுக்கும்.

நிரூபணம் : a என்பது ஒரு மிகை முழு என்க. அன் பகாக்காரணியை கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$a = p_1p_2 \ldots p_n$, இதில் $p_1, p_2, \ldots, p_n$ என்பவை பகாஎண்கள் மற்றும் வெவ்வேறாக இருக்கத்தேவை இல்லை.

ஆகவே, $a^2 = (p_1p_2 \ldots p_n)(p_1p_2 \ldots p_n) = p^2_1p^2_2 \ldots p^2_n$.

a^2 ஐ p சரியாக வகுக்கிறது எனக்கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் எண் கணித அடிப்படை தேற்றத்தின்படி a^2 ன் பகா காரணிகளில் ஒன்று p ஆகும். மேலும் தனித்தன்மையை (Uniqueness) பயன்படுத்தி அறியலாம். $p_1 p_2 \ldots p_n$. களில் p ம் ஒன்று ஆகும். இப்பொழுது p என்பது $p_1, p_2, \ldots p_n$ களில் ஒன்றாக இருப்பதால் அது a ஐ சரியாக வகுக்கும்

இதை செய்

p= 2, p = 5 மற்றும் $a^2 = 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64$ மற்றும் 81 எனில் மேலே நிரூபித்த கூற்றை இந்த மதிப்புகளுக்கு சரிபார்க்கவும்.

நாம் இப்போது $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண் என நிரூபிப்பதற்கு முயற்சிப்போம். முரண்பாடு நிரூபண முறையை நாம் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-7. **$\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என நிரூபி**

தீர்வு : முரண்பாடு நிரூபண முறையில் செய்வதால் நாம் $\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் எனக் கொள்வோம்.

இது ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் r மற்றும் s எனும் இரண்டு முழுக்கள் $(s \neq 0)$ $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ ஆக இருக்கும்படி இருக்கும்.

r மற்றும் s களுக்கு 1ஐ தவிர மற்றொரு பொதுகாரணி உண்டு என்போம்.

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, (a, b என்பவை சார்பகா எண்கள்) ஆகக் கிடைக்குமாறு பொதுகாரணியால் வகுப்போம். எனவே, $b\sqrt{2} = a$ ஆகும். இதை இருபுறங்களிலும் வர்க்கபடுத்தி ஒழுங்காக அமைத்தால் நமக்கு $2b^2 = a^2$. அதாவது a^2 ஐ 2 வகுக்கும். அதாவது a^2 ஐ 2 வகுக்கும். கூற்று-1.6ன் படி a^2 ஐ 2 வகுத்தால் a வை கூட இது வகுக்கும். ஆகவே $a = 2c$ (இங்கு c என்பது ஒரு முழு) என எழுதலாம். aன் மதிப்பை பிரதியிட, நமக்கு $2b^2 = 4c^2$, என கிடைக்கும். அதாவது $b^2 = 2c^2$ என கிடைக்கும். அதாவது b^2 ஐ 2 வகுக்கும் மற்றும் bஐ 2 வகுக்கும். (கூற்று-1.6ல் $p= 2$). ஆகவே a, b ஆகியவற்றிற்கு 2 ஒரு பொதுகாரணி ஆகும்.

a,b என்பவை ஒன்றுக்கொன்று பகாக்காரணிகள் மற்றும் 1ஐ தவிர இவற்றிற்கு வேறெந்த பொது காரணிகளும் இல்லை என்ற கூற்றுக்கு முரண்பாடாக உள்ளது. முன்மொழிந்த $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறு எண் எனும் கருத்துக்கு முரண்பாடாக உள்ளது. ஆகவே $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண் என்றும் முடிவு செய்யலாம்.

பொதுவாக d என்பது ஒரு மிகை முழுவாக இருந்து, வேறு எந்த முழுவுக்கும் வர்க்கமாகவில்லை எனில் $\sqrt{d}$ ஐ நாம் ஒரு விகிதமுறா எண் என கூறலாம். இந்த நிலையில் $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{15}$ $\sqrt{24}$ போன்றவற்றையும் விகிதமுறா எண்களாக சொல்லலாம்.

கீழ்வகுப்புகளில் நாம் தெரிந்து கொண்டபடி

- ஒரு விகிதமுறு மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண்களின் மொத்தம் அல்லது வித்தியாசம் வேறொரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
- ஒரு பூச்சியமற்ற விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் கூட வேறொரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

நாம் சில எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் இவற்றை நிரூபிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-8. $5-\sqrt{3}$ ஐ ஒரு விகிதமுறா எண் என நிரூபி.

தீர்வு : நாம் நிரூபிக்க வேண்டிய கருத்துக்கு எதிராக $5-\sqrt{3}$ ஐ ஒரு விகிதமுறு எண் என கொள்வோம். அதாவது $5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$. என்றிருக்குமாறு காண வேண்டும். a மற்றும் b சார்பகா எண்கள். $(b \neq 0)$ ஆகவே $5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$.

சமன்பாட்டை மாற்றினால் நமக்கு $\sqrt{3}=5-\frac{a}{b}$ என கிடைக்கும்.

a, b என்பவை முழுக்கள், ஆகவே நமக்கு $5-\frac{a}{b}$ என்ற விகிதமுறு எண் கிடைக்கும். ஆகவே $\sqrt{3}$ கூட விகிதமுறு எண்ணே ஆகும். ஆனால் இரு ஒரு விகிதமுறா எண் என்ற கருத்திற்கு முரண்பாடாக உள்ளது. நாம் ஊகித்து செய்த $5-\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறு எண் எனும் கருத்திற்கு முரண்பாடாக உள்ளது.

ஆகவே $5-\sqrt{3}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என நாம் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-9. $3\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என காட்டு.

தீர்வு : நாம் நிரூபிக்க வேண்டிய கருத்துக்கு எதிராக $3\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் என கொள்வோம்.

$3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ என்றவாறு $a, b, (b \neq 0)$ என்ற சார்பகா எண்களை காணவேண்டும். மாற்றி அமைப்பதால், நமக்கு $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}$ என கிடைக்கும்.

இதில் $3, a, b$ என்பவை முழுக்கள். ஆகவே $\frac{a}{3b}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண். ஆகவே $\sqrt{2}$ கூட ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும். இது $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனும் உண்மைக்கு எதிரான கருத்து. ஆகவே, இது ஒரு முரண்பாடு ஆகும். ஆகவே நாம் $3\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண் என கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-10. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என நிரூபி.

தீர்வு : $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் என கொள்வோம்.

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{a}{b}$, என்க இங்கு a, b என்பவை முழுக்கள் $b \neq 0$

ஆகவே $\sqrt{2}=\frac{a}{b}-\sqrt{3}$ ஆகும். இருபுறமும் வர்க்கபடுத்த நமக்கு $2=\frac{a^2}{b^2}+3-2\frac{a}{b}\sqrt{3}$ என கிடைக்கும். இதை ஒழுங்குபடுத்தி அமைத்தால் $2=\frac{a^2}{b^2}+3-2\frac{a}{b}\sqrt{3}$

$\frac{2a}{b}\sqrt{3}=\frac{a^2}{b^2}+3-2 \quad =\frac{a^2}{b^2}+1$ அதாவது $\sqrt{3}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$

a, b என்பவை முழுக்கள், ஆகவே, $\frac{a^2+b^2}{2ab}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண். இவ்வாறே $\sqrt{3}$ கூட ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும். இது $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனும் உண்மைக்கு முரண்பாடு ஆகும். ஆகவே $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

குறிப்பு :

1. இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் மொத்தம் எப்போதும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாக இருக்கத் தேவையில்லை.

   எடுத்துக்காட்டாக $a=\sqrt{2}$ மற்றும் $b=-\sqrt{2}$ இங்கு a, b என்ற இரண்டும் விகிதமுறா எண்கள் ஆனால் $a+b=0$ விகிதமுறுஎண்.

2. இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கல் எப்போதும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாக இருக்கத்தேவையில்லை.

   எடுத்துக்காட்டாக $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{8}$, எனில் a மற்றும் b ஆகிய இரண்டும் விகிதமுறாஎண்கள். ஆனால் $ab=\sqrt{16}=4$ இது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

பயிற்சி-1.4

1. கீழ்கண்டவற்றை விகிதமுறா எண்கள் என நிரூபிக்கவும்.

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ (iii) $6+\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{5}$ (v) $3+2\sqrt{5}$

2. p,q என்பவை பகா எண்கள் எனில் $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என நிரூபிக்கவும்.

1.4 அடுக்குகள் மறுவடிவம்

'a^n' அதாவது ஒரு எண் 'a' ன் அடுக்கு 'n' ஆனது ஒரு இயல் எண் எனில் இதன் பொருள் 'a'வை 'n' முறைகள் பெருக்குவதற்கு சமம் என்பதாகும். அ த ா வ து

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a}_{n-\text{factors}}$$

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ .... என்பவை 2ன் அடுக்குகள்

$3^0, 3^1, 3^2, 3^3$ .... என்பவை 3ன் அடுக்குகள்

81ஐ 3^4 ஆக எழுதலாம் என நமக்குத் தெரியும். இதையே நாம் $81=3^4$ என எழுதுகிறோம். எண் '4' ஆனது 'அடுக்கு' எனவும்3 ஐ 'அடிமானம்' எனவும் கூறுகிறோம். மேலும் இதை" 81 ஆனது 3ன் அடுக்கு 4" என படிக்கிறோம்.

சில அடுக்குக் குறி விதிகளை நினைவு கூர்வோம்.

a, b மெய் எண்கள், $a \neq 0, b \neq 0$ மேலும் m,n முழுக்கள் எனில்

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$; (ii) $(ab)^m = a^m.b^m$ (iii) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

(iv) $(a^m)^n = a^{mn}$, (v) $a^0 = 1$ if $a \neq 0$ (vi) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ $a \neq 0$

இதை செய்

1. மதிப்பிடு

(i) 2^1 (ii) $(4.73)^0$ (iii) 0^3 (iv) $(-1)^4$ (v) $(0.25)^{-1}$ (vi) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^2$ (vii) $\left(1\dfrac{1}{4}\right)^2$

2. (a) 10, 100, 1000, 10000, 100000 ஆகியவற்றை அடுக்குக் குறி வடிவில் தெரிவி

(b) பின்வருவனவற்றை அடுக்குக் குறிகளின் சுருங்கிய வடிவில் எழுது.

(i) 16×64 (ii) 25×125 (iii) $128 \div 32$

அடுக்குகளும் மடக்கைகளும்

விகிதமுறு எண்களை அடுக்குகலாகக் கொண்டவை அடுக்குக்குறி வடிவம் என நமக்குத் தெரியும்.

5^2 என்பது 5ன் வர்க்கத்தை குறிக்கிறது.மேலும் 5 என்பது 5^2ன் வர்க்கமூலம் ஆகும்.

5^3என்பது 5ன் கணத்தை குறிக்கிறது.மேலும் 5 என்பது 5^3ன் கனமூலம் ஆகும்.

$5^{1.73} = 5^{173/100}$ என்பது '5' raised to 173ஐ அடுக்காகக் கொண்ட அடிமானம் '5'ன் படிவரிசை 100 என்பதை குறிக்கிறது.

பின்வருவனவற்றை கவனிப்போம்

$2^x = 4 = 2^2$ எனவே $x = 2$

$3^y = 81 = 3^4$ எனவே $y = 4$

$10^z = 100000 = 10^5$ எனவே $z = 5$

கீழுள்ளவற்றில் xன் மதிப்பை கண்டறிய முடியுமா?

$2^x = 5,$ $3^x = 7$, $10^x = 5$

ஆம் எனில் xன் மதிப்பு என்ன?

$2^x = 5$ல் 2ன் அடுக்கை எதுவரை உயர்த்தும் போது 5கிடைக்க வாய்ப்பு உள்ளது?

இதை கண்டறிய xக்கும் 5க்கும் இடையே ஒரு புது உறவை ஏற்படுத்த வேண்டியுள்ளது.

இவ்வாறான சூழ்நிலைகளில் மடக்கைகள் எனப்படும் புதிய உறவு அறிமுகப்படுத்தப்படுகிறது.

$y = 2^x$ எனும் போது x, y களின் எந்த மதிப்புகளுக்கு இது 5க்கு சமமாகும்? $x = 1$ எனில் $y = 2^1 = 2$, $x = 2$ எனில் $y = 2^2 = 4$, $x = 3$ எனில் $y = 2^3 = 8$ இதிலிருந்து நாம் அறிவது xன் மதிப்பு 2 மேலும் 3க்கு இடையில் அமைகிறது.

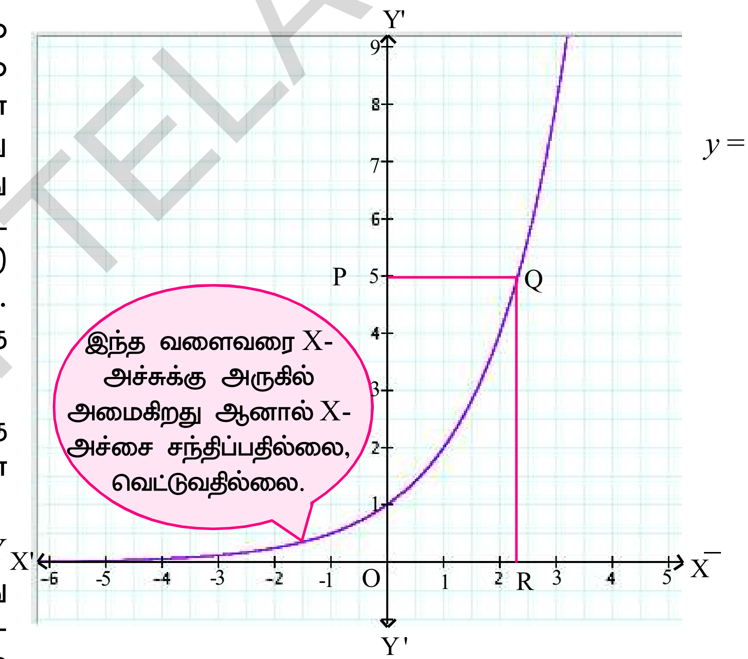
$y = 2^x$ எனும் வரைபடத்தை வரையலாம்

இதை வரைவதற்கு 'x'க்கு ஒரு மதிப்பை எடுத்துக்கொண்டால் 'y'க்கு மற்றொரு மதிப்பு கிடைக்கும்.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

மேற்கண்ட புள்ளிகளை குறித்து மேலும் இணைப்பதன் மூலம் நாம் வளைவரையை பெறலாம்.

குறிப்பு: இங்கு 'x'ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும் போது $y = 2^x$ன் மதிப்பும் அதிகரிக்கிறது. 'x'ன் மதிப்பு குறையும் போது 2^x ன் மதிப்பும் குறைந்து கொண்டே பூஜ்ஜியத்திற்கு (0) அருகில் செல்கிறது. ஆனால் பூஜ்ஜியத்தை அடைவதில்லை.



$y = 2^x$ எனில் xன் எந்த மதிப்பிற்கு yஆனது 5என இருக்கும்.

இந்த வரைப்படத்தில் Y அச்சு 2^xன் மதிப்பை குறிக்கிறது என நமக்குத் தெரியும். X - அச்சு எதை குறிக்கிறது? என்பதை உற்றுநோக்கினால் அது xன் மதிப்பு என்பது தெரியும். Y - அச்சின் மீது 5 அலகு தூரத்தில் "P"எனும் புள்ளியை குறி. "P"ன் வழியே X – அச்சுக்கு இணையான கோடு ஒன்று வரைக. இது வரைபடத்தை Qல் வெட்டும்.

இப்போது X -அச்சுக்கு செங்குத்தாக QR ஐ வரைக. வரைபடத்திலிருந்து QR ன் நீளத்தை தோராயமக கண்டறிய முடியுமா? அல்லது இது எங்கு அமைந்துள்ளது. சிந்தித்துப்பார். 2^x என உள்ளவாறு "R"ன் X -அச்சு தூரம் தேவையான மதிப்பு ஆகும்.

x ன் இம் மதிப்பே 2ஐ அடிப்படையாகக் கொண்ட மடக்கை 5 அல்லது $\log_2 5$.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

பின்வரும் அளவுதிட்டத்தை உற்றுநோக்கு

X - அச்சில் (விகிதம்-விகிதசமம் ஒப்பிடு

10 இடங்கள் = 1 அலகு

20 இடங்கள்= 1 அலகு

40 இடங்கள்= 1 அலகு

Y-அச்சின் மீதுள்ள 5க்கு ஏற்ற மதிப்பை X - அச்சின் மீது உன்னால் கற்பனை செய்து பார்க்க முடியுமா?

மேலே உள்ளவற்றை பின்வருமாறு மாற்றி அமைத்தல்

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$x = \log_2 y$	-2	-1	0	1	2	3

$y = 2^x$எனும் வரைபடத்தை உற்றுநோக்கினால் மடக்கையின் வரையறை கிடைக்கும்.

$y = \frac{1}{4}$; $x = -2$ அதாவது $2^{-2} = \frac{1}{4}$ மேலும் $-2 = \log_2 \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{2}$; $x = -1$ அதாவது $2^{-1} = \frac{1}{2}$ மேலும் $-1 = \log_2 \frac{1}{2}$

$y = 2$; $x = 1$ அதாவது $2^1 = 2$ மேலும் $1 = \log_2 2$

$y = 4$; $x = 2$ அதாவது $2^2 = 4$ மேலும் $2 = \log_2 4$

$y = 8$; $x = 3$ அதாவது $2^3 = 8$ மேலும் $3 = \log_2 8$

அதாவது வளைவரையில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் y –அச்சு தூரங்கள் 2ன் அடுக்கு x ஆகவும் மேலும் வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் x – அச்சு தூரம் 2ஐ அடிமானமாகக் கொண்ட y – அச்சு தூரத்தின் மடக்கையாகும்.

மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம்.

$10^y = 25$ எனில் இதை $y = \log_{10} 25$ அல்லது $y = \log 25$ என குறிப்பிடலாம்.

10ஐ அடிப்படையாகக் கொண்ட மடக்கை பொதுமடக்கை எனப்படுகிறது.

மடக்கையின் பொதுவடிவம் பின்வருமாறு

பொதுவாக $a^x = N$ எனில் $x = \log_a N$ இங்கு $a > 0, a \neq 1$ $N > 0$ மேலும் a, N ஆகியவை மெய் எண்கள் என வரையறுக்கிறோம்.

இதை செய்

(1) கீழுள்ளவற்றை மடக்கை வடிவில் எழுது.

(i) $7 = 2^x$ (ii) $10 = 5^b$ (iii) $\frac{1}{81} = 3^c$ (iv) $100 = 10^z$ (iv) $\frac{1}{257} = 4^a$

(2) கீழுள்ளவற்றை அடுக்குக்குறி வடிவில் எழுது.

(i) $\log_{10}100 = 2$ (ii) $\log_5 25 = 2$ (iii) $\log_2 2 = 1$

முயற்சி செய்

கீழுள்ளவற்றை தீர்க்க

(i) $\log_2 32 = x$ (ii) $\log_5 625 = y$ (iii) $\log_{10}10000 = z$

(iv) $\log_x 16 = 2 \quad \therefore \quad x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 4$, இது சரியா?

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

(1) $\log_2 0$ என்பது இருக்குமா? காரணம் கூறு.

(2) நிரூபி: (i) $\log_b b = 1$ (ii) $\log_b 1 = 0$ (iii) $\log_x b^x = x$

மடக்கைகளின் பண்புகள்

மடக்கைகள் பல்வேறு செயல்கள் மேலும் மேம்பட்ட கணிதம் இவற்றிற்கு மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாக கருதப்படுகிறது. இப்போது மடக்கை கோவைகளை கையாளுவதற்கு தேவையான சில அடிப்படை பண்புகளை உறுவாக்குவோம்.

(1) பெருக்கல் விதி :

அடுக்குக்குறிகளின் விதிகள் மடக்கைகளின் விதிகளுக்கு ஒத்து இருக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரே அடிமானம் உள்ளவற்றை பெருக்கும் போது நாம் அடுக்குகளை கூட்டிக்கொள்வோம்.

அதாவது $a^x . a^y = a^{x+y}$

இந்த பண்பு மடக்கையின் பெருக்கல் விதியானது அடுக்குகளின் பெருக்கல் விதியுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது எனும் முக்கியத்துவத்தை உணர்த்துகிறது.

தேற்றம்: a, x **மற்றும்** y **ஒரு மிகை மெய் எண்கள் என்க மேலும்** $a \neq 1$ **எனில்**

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

அதாவது மடக்கையின் பெருக்கல் என்பது மடக்கைகளின் கூடுதல் ஆகும்.

நிரூபணம் :

$\log_a x = m$ என்க மேலும் $\log_a y = n$ என்க.
இதிலிருந்து $a^m = x$ மற்றும் $a^n = y$ என கிடைக்கிறது.

இப்போது $xy = a^m \, a^n = a^{m+n}$

$\therefore \quad \log_a xy = m + n = \log_a x + \log_a y$

முயன்று செய்

$\log_{10} 100000 = 5$ என நமக்கு தெரியும்.

$100000 = 1000 \times 100$ என எழுதும்போது ஒரே மாதிரியான விடை கிடைக்கும் எனக்காட்டு மேலும் வகுத்தல் விதியை பயன்படுத்தி விடையை சரிபார்.

இதை செய்

பின்வரும் மடக்கைகளின் பெருக்கற்பலனை இரண்டு மடக்கைகளின் கூடுதலாக தெரிவி.

(i) 35×46 (ii) 235×437 (iii) 2437×3568

(ii) ஈவு விதி

ஒரே விதமான அடிமானம் உள்ளவற்றை வகுக்கும் போது அடுக்குகளை கழிக்கிறோம்.

அதாவது $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

இந்த பண்பு வகுத்தலின் ஈவு விதிக்கு வழிவகுக்கிறது.

***a, x* மற்றும் *y* ஒரு மிகை மெய் எண்கள் என்க மேலும் $a \neq 1$ எனில்**

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

மடக்கையின் ஈவானது ஒரே வரிசையில் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட இரண்டு எண்களின், மடக்கைகளின் வித்தியாசம் ஆகும்.

முயன்று செய்

$\log_2 32 = 5$ என நமக்குத் தெரியும். 32ஐ $\dfrac{64}{2}$ என எழுதும் போது இதே விடை கிடைக்கிறதா? பெருக்கல் விதியை பயன்படுத்தி உன்னுடைய விடையை சரிபார்.

இதை செய்

பின்வரும் மடக்கைகளை இரண்டு மடக்கைகளின் வித்தியாசங்களாக தெரிவி.

(i) $\dfrac{23}{34}$ (ii) $\dfrac{373}{275}$ (iii) $4325 \div 3734$ (iv) $5055 \div 3303$

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ஐ பயன்படுத்தி ஈவு விதியை நிரூபி.

(iii) அடுக்கு விதி

ஒரு அடுக்கு வடிவிலான கோவை மீண்டும் ஒரு அடுக்காக உயர்த்தப்பட்டால் அந்த இரண்டு அடுக்குகளையும் பெருக்குவோம்.

அதாவது $\quad (a^m)^n = a^{m.n}$

இந்த பண்பு அடுக்கு விதிக்கு வழிவகுக்கிறது.

a மற்றும் x ஒரு மிகை மெய் எண்கள் என்க மேலும் $a \neq 0$ மேலும் n ஒரு மெய் எண் எனில்

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

அடுக்கு வடிவில் உள்ள ஒரு எண்ணின் மடக்கையானது அடுக்குகளின் பெருக்கற்பலனாக மேலும் அந்த எண்ணின் மடக்கையாக இருக்கும்.

முயன்று செய்

$\log_2 32 = 5$ என கிடைக்கும், $32 = 2^5$ என எழுதும் போதும் இதே விடை கிடைக்கும் எனக்காட்டு மேலும் அடுக்கு விதியை பயன்படுத்தி விடையை சரிபார்.

$2^x = 3^5$ எனில் x ன் மதிப்பை காண்டறிய முடியுமா? இவற்றை தீர்க்க $3^5 = 243$ எனும் மதிப்பை கண்டறிய வேண்டும். பிறகு xன் மதிப்பை கணக்கிட வேண்டும். 2^xன் எந்த மதிப்பிற்கு 243 சமமாகும்.

$\log_a x^n = n \log_a x$ எனும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி மடக்கையை சேர்த்தால் 3^{25}, 3^{33} போன்றவற்றின் மதிப்பைகளையும் எளிதில் கண்டறியலாம்.

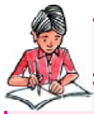
$$2^x = 3^5$$

மடக்கை வடிவில் எழுதினால்

$$\log_2 3^5 = x$$

$$5 \ \log_2 3 = x \quad \left(\because \log_a x^n = n \ \log_a x\right)$$

இங்கு xன் மதிப்பு 5 மற்றும் $\log_2 3$ மதிப்பின் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.



இதை செய்

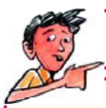
$\log_a x^n = n \log_a x$ எனும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி கீழ்கண்டவற்றை விரித்து எழுது.

(i) $\log_2 7^{25}$ (ii) $\text{logs}_5 8^{50}$ (iii) $\log 5^{23}$ (iv) $\log 1024$

குறிப்பு: $\log x = \log_{10} x$

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

$\log \frac{x}{y} = \log (x.y^{-1})$ என எழுதலாம். பெருக்கல் மற்றும் அடுக்கு விதிகளை பயன்படுத்தி $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$ என நிரூபி.



முயன்று செய்

கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பை கண்டுபிடி

(i) $\log_2 32$ (ii) $\log_c \sqrt{c}$ (iii) $\log_{10} 0.001$ (iv) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

$7 = 2^x$ எனில் $x = \log_2 7$ என நமக்கு தெரியும். ஆனால் $2^{\log_2 7}$ ன் மதிப்பு என்ன? உன்னுடைய விடையை நியாயப்படுத்து. மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் கொண்டு மேலுள்ளவற்றை $a^{\log_a N}$ உடன் எவ்வாறு பொதுமைப்படுத்துவாய்.

எடுத்துக்காட்டு 11 : $\log \frac{343}{125}$ ஐ விரிவுபடுத்துக.

தீர்வு : $_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ என நமக்குத்தெரியும்

$$\log \frac{343}{125} = \log 343 - \log 125 \text{ எனவே}$$

$$= \log 7^3 - \log 5^3$$

$\log_a x^n = m \log_a x$ எனவே

$$= 3\log 7 - 3\log 5$$

எனவே $\frac{343}{125} = 3(\log 7 - \log 5)$.

எடுத்துக்காட்டு : 12. $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$ ஐ ஒரே மடக்கையாக எழுதுக.

தீர்வு : $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$

$= \log 3^2 + \log 5^3 - \log 2^5$ ($\log_a x = \log_a x^n$ ஆனதினால்)

$= \log 9 + \log 125 - \log 32$

$= \log (9 \times 125) - \log 32$ ($\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ ஆனதினால்)

$= \log 1125 - \log 32$

$= \log \dfrac{1125}{32}$ (Since $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$)

எடுத்துக்காட்டு-13. தீர்க்க. $3^x = 5^{x-2}$.

தீர்வு : $x \log_{10} 3 = (x-2) \log_1 5$

$x \log_{10} 3 = x\log_{10} 5 - 2\log_{10} 5$

$x\log_{10} 5 - 2\log_{10} 5 = x \log_{10} 3$

$x\log_{10} 5 - x \log_{10} 3 = 2\log_{10} 5$

$x(\log_{10} 5 - \log_{10} 3) = 2\log_{10} 5$

$$x = \frac{2\log_{10} 5}{\log_{10} 5 - \log_{10} 3}$$

எடுத்துக்காட்டு-14. $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3 = \log x$ எனில் x ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $\log x \;= 2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3$

$= \log 5^2 + \log 9^{\frac{1}{2}} - \log 3$

$= \log 25 + \log \sqrt{9} - \log 3$

$= \log 25 + \log 3 - \log 3$

$\log x = \log 25$

$\therefore \quad x = 25$

பயிற்சி - 1.5

1. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி

(i) $\log_{25}5$ (ii) $\log_{81}3$ (iii) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$

(iv) $\log_7 1$ (v) $\log_x\sqrt{x}$ (vi) $\log_2 512$

(vii) $\log_{10}0.01$ (viii) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right)$ (ix) $2^{2+\log_2 3}$

2. கீழ்கண்டவற்றை logN வடிவத்திற்கு சுருக்கி N மதிப்பை கண்டுபிடி (மடக்கையின் அடிமானத்தை 10ஆக எடுத்துக்கொள்ளலாம். ஆனாலும் எந்த அடிமானத்திற்கும் விளைவுகள் சமம்)

(i) $\log 2 + \log 5$ (ii) $\log_2 16 - \log_2 2$ (iii) $3\log_{64}4$

(iv) $2\log 3 - 3\log 2$ (v) $\log 10 + 2\log 3 - \log 2$

3. $x = \log_2 3$ மேலும் $y = \log_2 5$ என கொடுக்கப்பட்டால் பின்வருவனவற்றின் மதிப்பை x மேலும் y ல் கூறவும்.

(i) $\log_2 15$ (ii) $\log_2 7.5$ (iii) $\log_2 60$ (iv) $\log_2 6750$

4. கீழ்கண்டவற்றை விரிவுபடுத்துக.

(i) $\log 1000$ (ii) $\log\left(\frac{128}{625}\right)$ (iii) $\log x^2y^3z^4$ (iv) $\log\frac{p^2q^3}{r}$ (v) $\log\sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$

5. $x^2 + y^2 = 25xy$, எனில் $2\log(x + y) = 3\log 3 + \log x + \log y$. என நிரூபி.

6. $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$, எனில் $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$. ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி

7. $(2.3)^x = (0.23)^y = 1000$ எனில் $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$. ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி

8. $2^{x+1} = 3^{1-x}$ எனில் x. ன் மதிப்பை காண்க.

9. (i) $\log 2$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்ணா அல்லது விகிதமுறா எண்ணா?

(ii) $\log 100$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்ணா அல்லது விகிதமுறா எண்ணா? உன்னுடைய விடையை நியாயப்படுத்து.

விருப்பப் பயிற்சி (மேம்பட்ட கற்றலுக்காக)

1. n ஓர் இயல் எண் எனில் 6^nன் ஒன்று தானத்தில் 5 இருக்குமா? காரணம் கூறு.
2. $7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3$ என்பது பகு எண்ணா? உன் பதிலை நியாயப்படுத்தவும்.
3. $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என நிரூபி. இவ்வாறே $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$ என்பது விகிதமுறு எண்ணா? அல்லது விகிதமுறா எண்ணா? என சரிபார்.
4. $x^2 + y^2 = 6xy$, எனில் $2 \log (x + y) = \log x + \log y + 3 \log 2$ என நிரூபி.
5. $\log_{10} 2 = 0.3010$ எனில் 4^{2013} என்ற எண்ணில் எத்தனை இலக்கங்கள் இருக்கும்?

குறிப்பு : ஒரு எண்ணின் மடக்கையில் முழு எண் பாகம் எது? தசம எண் எது? என உன் ஆசிரியரை கேட்டு தெரிந்துகொள்ளவும்.

செயல்திட்டம்:

யூக்ளிட் வகுத்தல் கோட்பாடு- மீ.பொ.கா

வண்ண ரிப்பன் அல்லது கட்டத்தாளைப் பயன்படுத்தி யூக்ளிட் வகுத்தல் கோட்பாட்டின்படி மீ.பொ.கா.வை கண்டுபிடி

நாம் கற்றவை

1. யூக்ளிடின் வகுத்தல் கோட்பாடு $a = bq + r, 0 \leq r < b$ ஐ திருப்திபடுத்தும் படி கொடுக்கப்பட்ட மிகை முழுக்கள் a மற்றும் b க்கு தகுந்தவாறு q மற்றும் r எனும் தனித்த ஒரு ஜோடி முழுக்கள் இருக்கும்.
2. எண்கணித அடிப்படை தேற்றத்தின்படி எல்லா பகு எண்களையும், பகாக் காரணிகளின் பெருக்கலாக எழுத முடியும். பகாக் காரணிகளின் வரிசை எப்படியிருப்பினும் இதன் மதிப்பு மாறாது.
3. p ஒரு பகா எண் a ஒரு மிகை முழு எனில் a^2 ஐ p சரியாக வகுத்தால் a ஐ p சரியாக வகுக்கும்.
4. x ஒரு விகிதமுறு எண். இதன் தசம வடிவம் முடிவுறு தசம எண் எனில் x ஐ (p,q ஆகியவை சார்பகா எண்கள்) $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதலாம். q ன் பகாக்காரணிகள் 2^n5^m வடிவில் இருக்கும். இங்கு n, m என்பவை குறை முழு அல்ல.
5. n, m என்பவை குறை முழுக்கள் அல்ல. qன் பகாக் காரணிகளின் வடிவம் 2^n5^m உள்ள விகிதமுறு எண் $x = \frac{p}{q}$ எனில் x ன் தசம வடிவம் ஒரு முடிவுறு தசம எண்ணாகும்.

6. n, m என்பவை குறை முழுக்கள் அல்ல, q ன் பகாக் காரணிகளின் வடிவம் 2^n5^m ஐ பெறாத விகிதமுறு எண் $x = \frac{p}{q}$ எனில் x ன் தசம வடிவம் முடிவுறா சுழல் தசம எண்ணாகும்.

7. a, x என்பவை மிகை முழுக்கள், மேலும் $a \neq 1$ $a^n = x$ எனில் $\log_a x = n$ என நாம் வரையறுக்கலாம்.

8. மடக்கை விதிகள்:

(i) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (ii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(iii) $\log_a x^m = m \log_a x$

9. மடக்கைகள் அதிகமாக பொறியியல், அறிவியல், வியாபாரம், பொருளாதாரம் போன்ற துறைகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

அத்தியாயம்

2 கணங்கள்
(SETS)

2.1 அறிமுகம்

ஒரு நபரைப்பற்றி வர்ணித்து கூறும்படி உங்களிடம் கேட்டால் நீங்கள் எப்படி கூறுவீர்கள். கீழே சில நபர்கள் பற்றி கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ராமானுஜம் ஒரு கணித மேதை மேலும் எண்கோட்பாட்டில் ஆர்வமுள்ளவர்.

தாசரதி ஒரு தெலுங்கு புலவர் மேலும் சுதந்திர போராட்ட வீரர்.

ஆல்பர்ட் ஐன்ஸ்டீன் ஜெர்மன் நாட்டை சேர்ந்தவர்.பிறப்பு முதல் இயற்பியல் துறையை தேர்ந்தெடுத்தவர்.இசை அவரது பொழுதுபோக்கு.

மர்யாம் மிர்ஜாகான் என்பவர் கணிதத்துறையில் பதக்கம் வென்ற ஒரே பெண் கணித மேதை ஆவார்.

பெரும்பான்மையான உறுப்பினர்கள் கொண்ட குழுவிலிருந்த ஒரு தனிப்பட்ட நபரை அடையாளம் காண அவருடைய சிறப்பு பண்புகளையும்,விருப்பங்களையும் கொண்டு வகைப்படுத்துகிறோம். ஒரு நபர் தங்களை சுற்றியுள்ள உலகத்தை புரிந்து கொள்ளவும் அவர்களோடு உறவை ஏற்படுத்திக் கொள்ளவும் மக்கள் சில பண்புகளின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்துவர்.

ஒரு நூலகத்தில் புத்தகங்கள் பாடவாரியாக அடுக்கி வைக்கப்பட்டிருக்கும் இதனால் நமக்குத் தேவையானவற்றை எளிதில் கண்டறியலாம்.

இயற்பியலில் தனிமங்களின் பொதுவான பண்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு வகைப்படுத்தலாம்.

நம்முடைய பத்தாம் வகுப்பு கணித பாடப்புத்தகத்திலுள்ள 14 அத்தியாயங்களும் வெவ்வேறு தலைப்புளின் அடிப்படையில் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன.

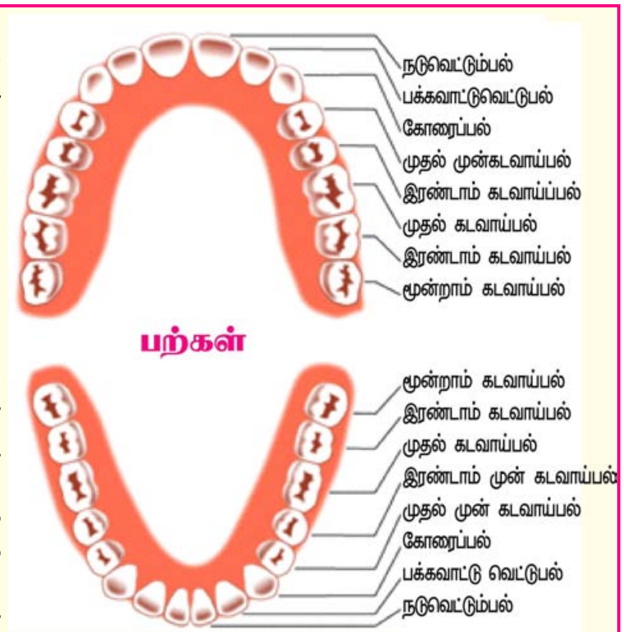
பற்களின் சூத்திரம்

மனிதனின் பற்களை உற்றுநோக்கினால் அவற்றின் செயல்களைப் பொருத்து 4 வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(i) வெட்டு பற்கள் (ii) கோரை பற்கள்

(iii) முன்கடவாய் பற்கள் (iv) கடவாய்பற்கள்

ஒவ்வொரு காற்பகுதியிலும் வெட்டுபற்கள், கோரைபற்கள், முன்கடவாய்பற்கள், கடவாய்பற்கள் ஆகியவை வரிசைப்படி அமர்ந்திருக்கும். இவற்றை நேரடியாக குறிப்பிடாமல் பற்களின் சூத்திரம் 2,1,2,3 என எழுதலாம்.கணிதம் மற்றவற்றிலிருந்து வேறுபடவில்லை. இதற்கு அர்த்தமுள்ள தொகுப்புகளிலிருந்து சேகரிக்கப்பட்ட பொருட்கள் தேவைப்படுகிறது.



கணிதத்தில் பொதுவான பண்புகள் தன்னுள் அடங்கி இருக்கும். எனவே இதை ஒற்றைத்தன்மை கொண்டவை என கருதலாம்.

கணிதத்தில் நாம் பொதுவாக பயன்படுத்தும் தொகுப்புகள் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

N = இயல் எண்களின் தொகுப்பு 1, 2, 3....

W = முழு எண்களின் தொகுப்பு 0, 1, 2, 3.....

I or Z = முழுக்களின் தொகுப்பு ....–3, –2, –1, 0, 1, 2 ......

Q = விகிதமுறு எண்களின் தொகுப்பு அதாவது ஓர் எண்ணை $\frac{p}{q}$ (இங்கு p, q ஆகியவை முழுக்கள் மேலும் $q \neq 0$) வடிவில் எழுதக் கூடிய எண்கள்.

R - மெய்எண்களின் தொகுப்பு அதாவது தசம வடிவில் எழுதக் கூடிய எண்கள்.

மேலுள்ளவற்றை உற்றுநோக்கினால் அவற்றின் பண்புகள் மேலும் பயன்படுத்தும் முறை அல்லது செயல்கள் இவற்றைக் கொண்டு தருக்கத்தை பயன்படுத்தி பொதுவான கூற்றை உறுவாக்கலாம்..

இதை செய்

கீழ்வரும் தொகுப்புகளின் பொதுப்பண்புகளை கண்டறிந்து எழுது.

1) 2, 4, 6, 8, … 2) 2, 3, 5, 7, 11, … 3) 1, 4, 9, 16, …

4) ஜனவரி, பிப்ரவரி, மார்ச், ஏப்ரல்........

5) கட்டைவிரல், ஆள்காட்டி விரல், நடுவிரல், மோதிரவிரல், சுண்டுவிரல்

சிந்தித்து உரையாடு

கீழ்வரும் தொகுப்புகளை கவனித்து அவற்றின் பண்புகளை தெரிவிக்கும் பொதுமை கூற்றுகளை எழுது.

1) 2, 4, 6, 8,… 2) 1, 4, 9, 16,…

சில நேரங்களில் பொதுவான பண்புகள் அல்லாத சில பொருட்களை குழுக்களாக காணலாம். உதாரணமாக,

2, இரமேஷ், ஜனவரி

இக்குழு ஏற்பட சில காரணங்கள் அமையலாம். ஆனால் இவற்றிடையே பொதுப்பண்பு இல்லை. இங்கு மூன்று உறுப்புகள் மட்டுமே உள்ளன என கூறமுடியும். சில சமயம் குழுக்களில் உள்ளவற்றை "நன்கு வரையறுக்கப்பட்டவை" என கூறமுடியும்.

2.2 கணம்

பொதுவான பண்பு அல்லது விதியை அடிப்படையாக கொண்ட பொருட்களின் தொகுப்பை கணம் என்போம். கனங்களிலுள்ள பொருட்களை அக்கணத்தின் உறுப்புகள் என்கிறோம். கணத்தின் உறுப்புகளை இருதலை பூ அடைப்புக்குள் { } எழுதி கமா (,) குறியின் மூலம் வேறுபடுத்தி காட்ட வேண்டும். பொது பண்பின் அடிப்படையில்தான் உறுப்புகள் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன.

உதாரணமாக முதல் ஐந்து பகாஇயல் எண்களை கொண்ட கணத்தை $\{2,3,5,7,11\}$ என எழுதலாம் மேலும் வெட்டும் பற்களின் கணத்தை {நடு வெட்டுபற்கள், பக்கவாட்டு வெட்டுபற்கள்} என எழுதலாம்.

இதை செய்

பின்வரும் கணங்களை எழுது.

1) முதல் ஐந்து மிகை முழுக்கள்
2) 100ஐ விட அதிகமாகவும் 125ஐ விட குறைவாகவும் உள்ள 5ன் மடங்குகளின் கணம்
3) முதல் ஐந்து கண எண்களின் கணம்
4) இராமானுஜ எண்களை கொண்ட கணம்.

2.2.1 பட்டியல் வடிவம் மேலும் கண அமைப்பு வடிவம்

நீண்ட வாக்கியங்களை கொண்டு கணங்களை வரையறுப்பது சில சமயம் கடினமாக இருக்கும். எனவேதான் கணங்களை ஆங்கில பெரிய எழுத்துக்களான A,B,C..... பயன்படுத்தி குறித்து காட்டுவர்.

உதாரணமாக, M என்பது கடவாய் பற்களின் கணம் எனில் M கனத்தை

M={முதல் கடவாய் பல், இரண்டாம் கடவாய் பல், மூன்றாம் கடவாய் பல்}.

என எழுதலாம்.

மற்றொரு உதாரணத்தை பார்ப்போம். Q என்பது குறைந்த பட்சம் இரண்டு சமமான பக்கங்களை கொண்ட நாற்கரங்கள் எனில் Q கணத்தை கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

Q = { சதுரம், செவ்வகம், சாய்சதுரம், இணைகரம், பட்டம், இருசமபக்க சரிவகம்}

இங்கு உறுப்புகளை பட்டியலிட்டு கணங்களை குறித்து காட்டினோம். இவ்வாறான கண குறியீட்டு முறையை பட்டியல் முறை என்போம்.

மேற்கண்ட இரண்டு உதாரணங்களிலிருந்து கணத்தின் ஒரு உறுப்பு அக்கணத்தை சார்ந்ததா என்பதை விவாதிப்போம். உதாரணமாக இரண்டாம் கடவாய்பல் Mஐ சார்ந்தது. இதை இரண்டாம் கடவாய் பல் $\in$ M" எனக் குறிப்பிடுவர். இதுபோலவே சாய்சதுரம் $\in$ Q" எனக்குறிப்பிடலாமா? ஆம் எனில் இதை எவ்வாறு படிப்பது? சாய்சதுரம் நாற்கரத்தின் உறுப்பு ($\in$ என்பதை ஆங்கிலத்தில் belongs to என படிப்பர்.) சாய்சதுரம் $\in$ Q" சதுரம் கணம் M ல் இல்லை இதை எவ்வாறு குறிப்பிடுவது? சதுரம் $\notin$ M" என குறிப்பிடலாம். இதை சதுரம், கனம் M ன் உறுப்பல்ல என படிக்கலாம். ($\notin$ ஆங்கிலத்தில் not belongs to என படிப்பர்.)

இயல் எண்கள் கணத்தை N, முழுக்கள் கணத்தை Z, விகிதமுறு எண்கள் கணத்தை Q, மெய்யெண்கள் கணத்தை R என குறிப்பிடுவதை படித்திருப்பீர்கள்.

இதை செய்

கீழே சில எண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவை எந்த எண் கணங்களை சேர்ந்தவை? எந்த எண் கணங்களை சேராதவை? என்பதை குறியீட்டுவடிவில் குறித்து காட்டு.

i) 1 ii) 0 iii) -4 iv) $\frac{5}{6}$ v) $1.\bar{3}$

vi) $\sqrt{2}$ vii) $\log 2$ viii) 0.03 ix) π x) $\sqrt{-4}$

சிந்தித்து உரையாடு

அனைத்து விகிதமுறு எண்களையும் உறுப்புகளாக கொண்ட ஒரு கணத்தை பட்டியல் வடிவில் உன்னால் எழுத முடியுமா?

மேற்காணும் உரையாடல் மூலம் விகிதமுறு எண்கள் முழுவதையும் பட்டியல் வடிவில் குறிப்பிட்டு காட்டுவது கடினம் என உணர்ந்திருப்பீர்கள். மேலும் விகிதமுறு எண்களை $\frac{p}{q}(q \neq 0$ and p,q மிகை முழுக்கள்) வடிவில் குறிப்பிடலாம் என அறிவோம் ஒரு கணத்தை அதிலுள்ள உறுப்புகளின் பொதுவான பண்புகளின் அடிப்படையில் குறித்து காட்டுவதை கண அமைப்பு வடிவம் என்பர் இதை ஒரு உதாரணம் மூலம் பார்ப்போம். கணம் A என்பது 20ஐ விட குறைவான 3 மடங்குகளை கொண்ட கணம் என்க.

A ன் பட்டியல் வடிவத்தை $A=\{3,6,9,12,15,18\}$ என எழுதலாம்.

இதையே நாம் கண அமைப்பில் $A=\{x : x$ என்பது 3ன் மடங்கு $x<20\}$ என குறிப்பிடுவோம். இந்த கண அமைப்பில் 'x:' என்பதை ஆங்கிலத்தில் x such that என படிக்கின்றோம்.

$A=\{x$: x என்பது 3ன் மடங்கு $x<20\}$

கணம் x **such that** x என்பது 3ன் மடங்கு $x<20$

இப்போது விகிதமுறு எண்களை கன அமைப்பில் எழுதும் போது $\mathbb{Q}=\{x : x=\frac{p}{q}$, q $\neq 0$ முழுக்கள்$\}$ என எழுதலாம். {2, இரமேஷ், ஜனவரி} இங்கு இவற்றிடையே பொதுப்பண்பு இல்லை. எனவே கணஅமைப்பு வடிவில் எழுத முடியாது.

குறிப்பு : (i) பட்டியல் வடிவில் கனங்களை குறித்து காட்டும்போது உறுப்புகளை வரிசைகிரமமாக எழுதவேண்டிய அவசியமில்லை. உதாரணமாக இராமானுஜ எண்களின் கணத்தை பட்டியல் வடிவில் எழுதும்போது $\{1,7, 2, 9\}$ என எழுதுகிறோம். இதில் ஒரு வரிசையை நாம் பின்பற்றவில்லை.

(ii) பட்டியல் வடிவில் கனங்களை குறித்து காட்டும்போது ஒரு உறுப்பை ஒரு முறை மட்டுமே இடம்பெறுமாறு எழுதவேண்டும். உதாரணமாக “SCHOOL” எனும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துகளை கணமாக எழுதும்போது {S, C, H, O, L} என எழுத வேண்டும். ஆனால் {S, C, H, O, O, L} என எழுதக் கூடாது.

இப்போது சில கணங்களின் பட்டியல் வடிவம் மேலும் கன அமைப்பு வடிவங்களை கவனிப்போம்.

பட்டியல் வடிவம்	கணஅமைப்பு வடிவம்
$V = \{a, e, i, o, u\}$	$V = \{x : x$ என்பது ஆங்கில உயிரெழுத்து$\}$
$A = \{-2,-1,0,1,2\}$	$A = \{x : -2 \le x \le 2, x \in \mathbb{Z}\}$
$B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$	$B = \{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \le 5\}$
$C = \{2,5,10,17\}$	$C = \{x : x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}, n \le 4\}$

இதை செய்

1. கீழ்கண்ட கணங்களிலுள்ள உறுப்புகளை எழுதுக.
   (i) G என்பது 20ன் அனைத்து காரணிகளைக் கொண்ட கணம்
   (ii) F என்பது 17,61க்கு இடையே உள்ள 4ன் மடங்காகவும், அவை 7ஆல் வகுபடும் எண்களாகவும் உள்ள உறுப்புகளின் கணம்.
   (iii) $S = \{x : x$ என்பது 'MADAM' எனும் சொல்லிலுள்ள எழுத்து$\}$
   (iv) $P = \{x : x$ என்பது 3.5 மேலும் 6.7 க்கு இடையே உள்ள முழுஎண்$\}$
2. கீழ்கண்ட கணங்களை பட்டியல் வடிவில் எழுதுக.
   (i) B என்பது ஒரு வருடத்தில் ஒரு மாதத்திற்கு 30 நாட்கள் கொண்ட மாதங்களின் கணம்.
   (ii) P என்பது 10க்கு குறைவான அனைத்து பகா எண்களின் கணம்.
   (iii) X என்பது வானவில்லில் காணப்படும் அனைத்து வண்ணங்களின் பெயர்களைக் கொண்ட கணம்.
3. A என்பது 12ன் காரணிகளின் கணம். கீழ்கண்டவற்றில் A கணத்தில் உறுப்பாக இல்லாதது
   (A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 12

முயற்சி செய்

1. எண் கணிதம், கோட்டுக்கணிதம் ஆகியவற்றின் கருத்துகளைக் கொண்ட சில கணங்களை நீங்களே ஏற்படுத்துங்கள்.
2. பட்டியல் வடிவத்தையும், அதற்கு சமமான கண அமைப்பு வடிவத்தையும் பொருத்துக.

(i)	$\{P, R, I, N, C, A, L\}$	(a) $\{x : x$ என்பது 18ன் காரணி மற்றும் மிகைமுழு$\}$
(ii)	$\{0\}$	(b) $\{x : x$ ஒரு முழு மேலும் $x^2 - 9 = 0\}$
(iii)	$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$	(c) $\{x : x$ ஒரு முழு மேலும் $x + 1 = 1\}$
(iv)	$\{3, -3\}$	(d) $\{x: x$ என்பதுPRINCIPAL எனும் சொல்லிலுள்ள ஒரு எழுத்து$\}$

பயிற்சி - 2.1

1. கீழ்கண்டவற்றில் எவை கணங்கள்? உன் பதிலை நியாயப்படுத்து.
   (i) "J" எனும் எழுத்துடன் ஆரம்பமாகும் ஒரு வருடத்திலுள்ள அனைத்து மாதங்களின் தொகுப்பு.
   (ii) இந்தியாவிலுள்ள மிகவும் திறமையான 10 எழுத்தாளர்களின் தொகுப்பு.
   (iii) உலக அளவில் நன்றாக கிரிக்கெட் ஆடக்கூடிய 11 பேட்ஸ்மேன்களின் குழு.
   (iv) உன் வகுப்பிலுள்ள அனைத்து மாணவர்களின் தொகுப்பு
   (v) அனைத்து இரட்டை முழுக்களின் தொகுப்பு.
2. $A=\{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{3, 5, 7\}$, $C = \{p, q, r\}$ எனில் கீழ்கண்ட காலி இடங்களில் $\in$ அல்லது $\notin$ ஐ நிரப்புக.
   (i) $0 \ldots\ldots A$ (ii) $3 \ldots\ldots C$ (iii) $4 \ldots\ldots B$
   (iv) $8 \ldots\ldots A$ (v) $p \ldots\ldots C$ (vi) $7 \ldots\ldots B$
3. கீழ்கண்ட வாக்கியங்களை குறிகளைப் பயன்படுத்தி எழுதுக.
   (i) 'x' எனும் உறுப்பு கணம் 'A'வில் இல்லை.
   (ii) 'd' என்பது 'B'கணத்தில் உறுப்பாக உள்ளது.
   (iii) '1' என்பது இயல் எண்கணம் Nல் உள்ளது.
   (iv) '8' என்பது P எனும் பகா எண்களின் கணத்தில் இல்லை.
4. கீழ்கண்ட வாக்கியங்கள் சரியா? தவறா? கூறுக.
   (i) $5 \notin$ {பகா எண்கள்}
   (ii) $S = \{5, 6, 7\}$ எனில் $8 \in S$.
   (iii) $-5 \notin W$ இங்கு 'W' என்பது முழுஎண்கள் கணம்.
   (iv) $\frac{8}{11} \in Z$, இங்கு 'Z' என்பது முழுக்கள் கணம்.
5. கீழ்கண்ட கணங்களை பட்டியல் வடிவத்தில் மாற்றுக.
   (i) $B = \{x : x$ என்பது 6ஐ விட சிறிய இயல்எண்$\}$
   (ii) $C = \{x : x$ என்பது இலக்கங்களின் மொத்தம் 8ஆக உள்ள ஈரிலக்க எண்$\}$.
   (iii) $D = \{x : x$ என்பது 60ஐ வகுக்கும் ஒரு பகா எண்$\}$.
   (iv) $E = \{$BETTER எனும் சொல்லிலுள்ள மொத்த எழுத்துக்கள்$\}$.
6. கீழ்கண்ட கணங்களை கண அமைப்பு வடிவில் எழுதுக.
   (i) $\{3, 6, 9, 12\}$ (ii) $\{2, 4, 8, 16, 32\}$
   (iii) $\{5, 25, 125, 625\}$ (iv) $(1, 4, 9, 25, \ldots\ldots 100\}$
7. கீழ்கண்ட கணங்களை பட்டியல் வடிவத்தில் மாற்றுக.
   (i) $A = \{x : x$ என்பது 50க்கு அதிகமாக, 100க்கு குறைவாக உள்ள இயல்எண்$\}$
   (ii) $B = \{x : x$ ஒரு முழு, $x^2 = 4\}$
   (iii) $D = \{x : x$ என்பது "LOYAL" எனும் சொல்லிலுள்ள ஒரு எழுத்து$\}$

8. பட்டியல் வடிவத்தை கண அமைப்பு வடிவத்துடன் பொருத்துக

(i)	$\{1, 2, 3, 6\}$	(a)	$\{x : x$ ஒரு பகா எண், 6ஐ வகுக்கும்$\}$
(ii)	$\{2, 3\}$	(b)	$\{x : x$ என்பது10க்குகுறைவான ஒற்றை இயல்எண்$\}$
(iii)	$\{M, A, T, H, E, I, C, S\}$	(c)	$\{x : x$ ஓர் இயல்எண் மேலும் 6ஐ வகுக்கும்$\}$
(iv)	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	(d)	$\{x : x$ என்பதுMATHEMATICSஎனும் சொல்லிலுள்ள ஒரு எழுத்து$\}$

2.3 வெற்று கணம்

கீழ்கண்ட கணங்களுக்கு தொடர்பான சில எடுத்துக்காட்டுகளை ஆராய்வோம்.

(i) $A = \{x : x$ என்பது 1க்கும் குறைவான ஓர் இயல் எண்$\}$

(ii) $D = \{x : x$ என்பது 2ஆல் வகுபடும் ஒற்றைப்பகா எண்$\}$

A, D கணங்களில் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன? 1க்கும் சிறிய இயல் எண் எதுவும் இல்லை என நமக்குத்தெரியும். ஆகவே, கணம் Aவில் எந்த ஒரு உறுப்பும் இருக்காது. இது போன்ற கணங்கள் வெற்றுக்கணம் எனப்படும். ஆகவே கணம் A ஒரு வெற்றுகணமாகும்.

அவ்வாறே, 2ஆல் வகுபடும் ஒற்றைப்பகா எண் எதுவும் இல்லை. ஆகவே கணம் Dகூட வெற்றுக்கணமே.

உறுப்புகளே இல்லாத கணம் **வெற்று கணம்** எனப்படும். இதை ϕ அல்லது $\{\ \}$ எனும் குறியால் குறிக்கப்படும்.

வெற்றுகணங்களுக்கு மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் கீழே உள்ளன.

(i) $A = \{x : 1 < x < 2, x$ ஓர் இயல் எண்$\}$

(ii) $B = \{x : x^2 - 2 = 0,\ x$ ஒரு விகிதமுறு எண்$\}$

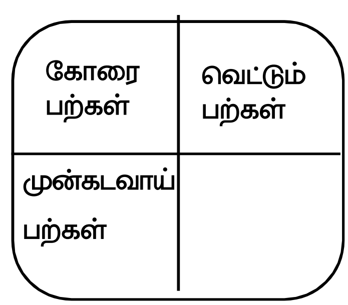
குறிப்பு: ϕ, $\{0\}$ இவை இரண்டும் வெவ்வேறு கணங்களாகும். கணம் $\{0\}$வில் ஒரே ஒரு உறுப்பு 0(பூஜ்ஜியம்) உள்ளது. ஆனால் $\{\}$ அல்லது ϕ என்பது வெற்று கணமாகும்.

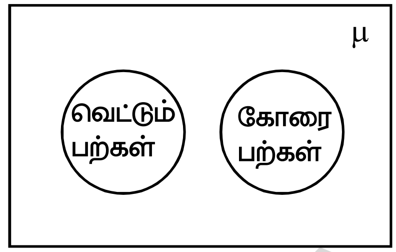
2.4 அனைத்து கணம் மற்றும் உட்கணம்

இவ்வத்தியாயத்தின் ஆரம்பத்தில் நாம் பார்த்த பற்கள் கணத்தை பற்றி எடுத்துக்கொள்வோம். பற்கள் 4 வகைகளாக பிரிக்கப்பட்டுள்ளதை அறிவோம்.அவை வெட்டுபற்கள், கோரைபற்கள், முன்கடவாய்பற்கள், கடவாய்பற்கள். ஆனால் கடவாய்பற்களின் கணமானது, மொத்த பற்களின் கணத்தின் உறுப்புகள் என்பது சரியா?தவறா?

இங்கு மொத்த பற்களின் கணமானது, நான்கு வகை பற்கள் கணத்தின் "அனைத்து கணம்" எனப்படுகிறது.

பற்கள் கணம்





பற்களின் கணத்தை அனைத்து கணமாக கருதும் போது வெட்டும் பற்களையும், கோரைப்பற்களையும் அருகிலுள்ள படத்தில் காட்டி படி குறிப்பிடலாம்.

படத்தை கவனிக்கும்போது வட்டங்களை தவிர மீதமுள்ள வெற்றிடம் எதை குறிப்பிடுகிறது?

அனைத்து கணங்களுக்கு மேலும் சில உதாரணங்களை பார்ப்போம்.

(i) நமது மாநிலத்திலுள்ள மக்கள் சாதி, வருவாய், பணியின் அடிப்படையில் வெவ்வேறு கணம் எனில் ஆந்திரமாநில மக்கள் என்பது அனைத்து கணமாகும்.

(ii) நமது நாட்டிலுள்ள மக்கள் சமூகங்கள் அனைத்திற்கும் இந்திய மக்கள் கணம் என்பது அனைத்து கணமாகும்.

அனைத்து கணத்தை 'μ' என குறிப்பிடுவர். சில நேரங்களில் U எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது. அனைத்து கணத்தை பட வடிவில் காட்டும்போது செவ்வக படங்களை பயன்படுத்துகிறோம்.

இயல் எண்கள் கணம் $\mathbb{N}=\{1,2,3,4...\}$. ஐ கருதுவோம். இதிலிருந்து இரட்டை எண்கள் கணத்தை வருவிக்கலாம். எனவே இயல் எண்கள் கணம் N ஆனது இரட்டை எண்கள் கணத்திற்கு அனைத்து கணமாகிறது. N என்பது ஒற்றை எண்கள் கணத்திற்கும் அனைத்து கணமாகுமா? $A = \{1,2,3\}$ எனும் கணத்தை கருதுவோம். இக்கணத்திலுள்ள உறுப்புகளை கொண்டு எத்தனை வெவ்வேறான கணங்களை உருவாக்க முடியும்?

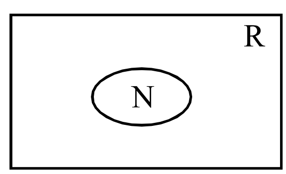
1. $x<3$, எனில் $x<4$", ஆகும் இதை "$x<3 \Rightarrow x<4$". என எழுதுவோம்.
2. "$x-2$ என இருந்தால் மட்டுமே $x=7$ ஆகும். இதை "$x-2=5 \Leftrightarrow x=7$" என எழுதுவோம்.

இப்போது $\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$ and $\{1,2,3\}$ என்ற கணங்களை உருவாக்க முடிந்தது. மேலும் சில கணங்களை உன்னால் உருவாக்க முடியுமா? மேற்காணும் கனங்களை கணம் A.க்கு உட்கணங்கள் என்கிறோம். $\{1,2\}$ என்பது கணம் A க்கு உட்கணம் எனில் அதை $\{1,2\} \subseteq A$. என எழுதுவோம். கணங்களுடன் $\{1,2,3\}$ கணத்தையும் A ன் உட்கணம் என்கிறோம்.

கணம் A லுள்ள உறுப்புகளில் ஏதேனும் சிலவோ அல்லது அனைத்தும் கனம் B இல் இருப்பின் B யை A ன் உட்கணம் என்கிறோம் இதை $B \subseteq A$. என குறிப்பிடுவோம். அதாவது கணம் B ல் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் Aல் இருந்தால் மட்டுமே *(if and only if)* $B \subseteq A$ ஆகும்.

எனவே இரண்டு கணங்கள் *A, B*க்கு

$B \subseteq A \Leftrightarrow a \in B \Rightarrow a \in A,$



குறிப்பு: வெற்று கணம் எல்லா கணத்திற்கும் உட்கணம் ஆகும்.

மெய்யெண்கள் கணம் $\mathbb{R}$; றை கருதுவோம். இதற்கு பல உட்கணங்கள் உண்டு.

உதாரணமாக இயல் எண்கள் $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ……\}$

முழு எண்கள் கணம் $W = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

முழுக்களின் கணம் $\mathbb{Z} = \{…., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …..\}$

விகிதமுறு எண்கள் அல்லாத மெய்யெண்களை விகிதமுறா எண்கள் என்போம். எனவே, $\mathbb{Q}' = \{x : x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}\}$ உதாரணம் $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi$.

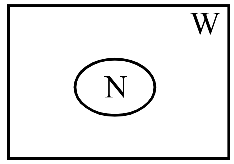
அவ்வாறே, இயல் எண் கணம், N என்பது முழு எண் கணம், Wக்கு உட்கணமாகும்.

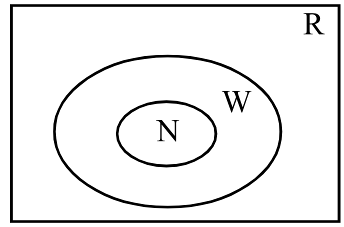
இதை $N \subset W$ஆல் குறிக்கிறோம்.

அவ்வாறே W என்பது Rக்கு உட்கணம்.

எனவே, $N \subset W$ மேலும் $W \subset R$

$\Rightarrow \quad N \subset W \subset R$





உட்கணங்களுக்கு தொடர்பான சில

உறவுகளை கீழே காண்போம்.$N \subset Z \subset Q \subset R$, $Q \subset R$, $N \not\subset Q$

ஆங்கில உயிர் எழுத்துகளை எழுதுவோம். $V = \{a, e, i, o, u\}$. ஆங்கில எழுத்துகள் அனைத்தையும் ஒரு கணமாக எடுத்துக்கொள்வோம். $A = \{a, b, c, d, \ldots\ldots, z\}$.கணம் Vல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும், கணம் Aன் உறுப்பாக உள்ளது. ஆனால், கணம் Aவில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும், கணம் Vல் இல்லை. ஆகவே கணம் V, கணம் Aவுக்கு உட்கணம். $V \subset A$ அதாவது $a \in V$, எனில் $a \in A$ ஆகும்.

இதை செய்

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $F = \{\ \}$.

   எனில், கீழ்கண்ட காலி இடங்களை $\subset$அல்லது $\not\subset$ ஆல் நிரப்புக.

   (i) A ….. B (ii) C ….. A (iii) B ….. A

   (iv) A ….. C (v) B ….. C (vi) ϕ ….. B

2. கீழ்கண்டவைகளில் எவை மெய் கூற்று என்று கூறு.

   (i) $\{\ \} = \phi$ (ii) $\phi = 0$ (iii) $0 = \{0\}$

முயற்சி செய்

1. $A = \{$நாற்கரங்கள்$\}$, $B = \{$சதுரம், செவ்வகம், சரிவகம், சாய்சதுரம்$\}$ $A \subset B$ அல்லது $B \subset A$ என தெரிவி. உன் விடையை நியாயப்படுத்து.

2. $A = \{a, b, c, d\}$ எனில் A கணத்திற்கு எத்தனை உட்கணங்கள் உள்ளன? (வெற்றுகணம், சமகணம், ஆகியவற்றை நினைவுக்கு கொண்டு வரவும்)

   (A) 5 (B) 6 (C) 16 (D) 65

3. P என்பது 5ன் காரணிகளின் கணம். Q என்பது 25ன் காரணிகளின் கணம். R என்பது 125ன் காரணிகளின் கணம். எனில் கீழ்கண்டவற்றில் எது தவறு.

(A) $P \subset Q$ (B) $Q \subset R$ (C) $R \subset P$ (D) $P \subset R$

4. A என்பது 10க்கு குறைவான பகா எண்களின் கணம். B என்பது 10க்கு குறைவான ஒற்றை எண்களின் கணம், C என்பது 10க்கு குறைவான இரட்டை எண்களின் கணம், எனில் கீழ்கண்டவற்றில் மெய்கூற்று எத்தனை?

(i) $A \subset B$ (ii) $B \subset A$ (iii) $A \subset C$

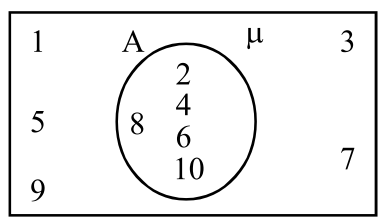
(iv) $C \subset A$ (v) $B \subset C$ (vi) $\phi \subset A$

2.5 வென்படங்கள் (Venn Diagrams)

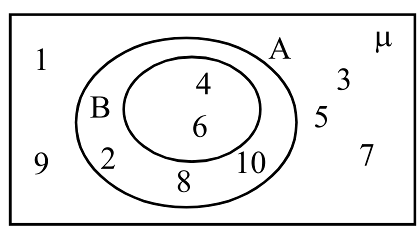
படங்களை பயன்படுத்தி கணங்களை குறித்துகாட்டுவதை நாம் ஏற்கனவே பார்த்தோம். இப்போது அவை பற்றி மேலும் விவரமாக கற்போம். கணங்களின் இடையேயான உறவை குறித்துக்காட்ட வென் ஆயிலர்படம் அல்லது வென்படம் (சுருக்கமாக) பயன்படுத்துகிறோம். செவ்வகம், வட்டம் போன்ற படங்களை வென்படங்களாக பயன்படுத்துவோம்.

இந்த அத்தியாயத்தில் இதற்கு முன்னே கூறிய படி, அனைத்து கணத்தை செவ்வக வடிவமாக காட்டுவோம்.

(i) $\mu = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ இதை அனைத்து கணம் எனக் கொண்டால் $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ அனைத்து கணத்துக்கு உட்கணமாகும். இதை வென்படத்தில் இவ்வாறு காட்டலாம்.

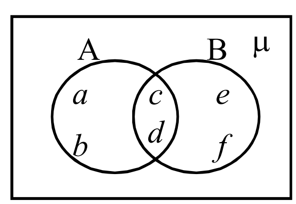


(ii) $\mu = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ அனைத்துகணம், $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{4, 6\}$ என்பவை உட்கணங்கள். மற்றும் $B \subset A$. எனில் இதை வென்படத்தில் இவ்வாறு காட்டலாம்.



(iii) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$.

இக்கணங்களை வென்படத்தில் இவ்வாறு காட்டலாம்.



2.6 கணங்களின் மீது அடிப்படை செயல்கள்

எண் கணிதத்தில் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் போன்ற செயல்கள் இருக்குமென நமக்கு தெரியுமல்லவா! அவ்வாறே கணங்களிலும் சேர்ப்பு, வெட்டு, வித்தியாசம் போன்ற செயல்களை வரையறுப்போம்.

2.6.1 கணங்களின் சேர்ப்பு

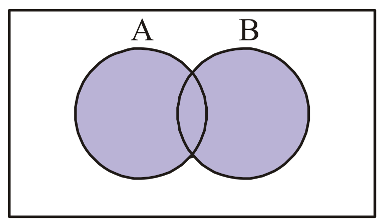
உன் வகுப்பு மாணவர்களில் செவ்வாய்கிழமை அன்று பள்ளிக்கு வராத மாணவர்களை கணம் A என்றும், புதன் கிழமை அன்று பள்ளிக்கு வராத மாணவர்களை கணம் B என்றும் எடுத்துக்கொள்வோம். அப்போது,

A = {ரோஜா, ராமு, ரவி},

B = {ராமு, பிரீதி, ஹனீப்}

செவ்வாய், புதன் ஆகிய இரு நாட்களிலும் பள்ளிக்கு வராத மாணவர் கணத்தை K எனக்கொண்டால், ரோஜா $\in$ K ஆகுமா? ராமு $\in$ K ஆகுமா? ரவி $\in$ K ஆகுமா? பிரீதி $\in$ Kஆகுமா? ஹனீப் $\in$ K ஆகுமா? அகிலா $\in$ Kஆகுமா?

ரோஜா, ராமு, ரவி, பிரீதி, ஹனீப் என்பவர்கள் கணம் Kவில் இருப்பர். ஆனால் அகிலா கணம் Kவில் இருக்கமாட்டாள். ஏனெனில் அகிலா கணம் A, கணம் B ஆகிய இரண்டு கணங்களில் எந்த ஒரு கணத்திலும் இல்லை.



இங்கு கணம் K என்பது A,B ஆகிய இரண்டு கணங்களின் சேர்ப்பு ஆகும். A,B கணங்களின் சேர்ப்பு என்றால் A கணத்திலுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தையும், B கணத்திலுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தையும் சேர்த்து ஒரே கணமாக எழுதுவது ஆகும். பொது உறுப்பை ஒரு முறைமட்டுமே எழுத வேண்டும். கணங்களின் சேர்ப்பு '$\cup$' எனும் குறியால் குறிக்கப்படுகிறது.

A, B என்பவை, ஏதேனும் இரண்டு கணங்கள் எனில் அவற்றின் சேர்ப்பை $A \cup B$ என எழுதி, A சேர்ப்பு B என படிக்கிறோம்.

$A \cup B = \{x : x \in A$ அல்லது $x \in B\}$

எடுத்துக்காட்டு-1. $A = \{2, 5, 6, 8\}$, $B = \{5, 7, 9, 1\}$ எனில் $A \cup B$ கண்டுபிடி.

தீர்வு : $A \cup B = \{2, 5, 6, 8\} \cup \{5, 7, 9, 1\}$

$= \{2, 5, 6, 8, 5, 7, 9, 1\}$

$= \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

A,B கணங்களின் பொது உறுப்பான 5ஐ ஒருமுறை மட்டும் எழுதவேண்டும் என்பதை கவனிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-2. $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, i, u\}$. எனில் $A \cup B = A$ எனக்காட்டு.

தீர்வு : $A \cup B = \{a, e, i, o, u\} \cup \{a, i, u\}$

$= \{a, e, i, o, u, a, i, u\}$

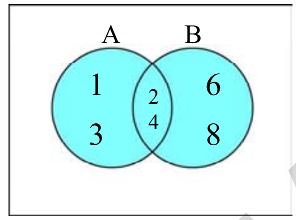
$= \{a, e, i, o, u\} = A$.

இந்த எடுத்துக்காட்டின் மூலம் கணம் A, அதன் உட்கணம் B ஆகிய இரண்டு கணங்களின் சேர்ப்பு, கணம் A ஆகும் என நமக்கு தெரிகிறது. அதாவது $B \subset A$, எனில் $A \cup B = A$.

எடுத்துக்காட்டு-3. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ எனில் $A \cup B$ஐ கண்டுபிடி.

தீர்வு : $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 2, 4, 6, 8\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$



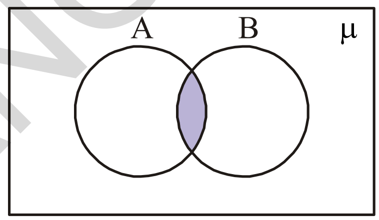
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

2.6.2 கணங்களின் வெட்டு

பள்ளிக்கு வராத மாணவர்களின் எடுத்துக்காட்டை மீண்டும் ஆராய்வோம். செவ்வாய், புதன் ஆகிய இரண்டு நாட்களிலும் பள்ளிக்கு வராத மாணவர்களை இந்த முறை கணம் L என எடுத்துக்கொள்வோம். L = {ராமு} என காணலாம்.

இங்கு Lஐ A,B கணங்களின் வெட்டு எனக்கூறுவோம்.

சாதாரணமாக A, B கணங்களின் பொது உறுப்புகளைக் கொண்ட கணத்தை A,B கணங்களின் வெட்டு என்கிறோம். அதாவது A, B ஆகிய இரண்டு கணங்களிலும் உள்ள உறுப்புகள். கணங்களின் வெட்டை $A \cap B$ என குறிக்கிறோம். A வெட்டு B என படிக்கிறோம்.



$A \cap B$

$$A \cap B = \{x : x \in A, \text{ மற்றும் } x \in B\}$$

A, Bகணங்களின் வெட்டு பக்க படத்தில் காட்டியவாறு உள்ள நிழலிட்ட பகுதி ஆகும்.

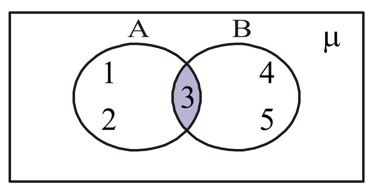
எடுத்துக்காட்டு-4. $A = \{5, 6, 7, 8\}$, $B = \{7, 8, 9, 10\}$ எனில் $A \cap B$ கண்டுபிடி.

தீர்வு : A, B கணங்களின் பொது உறுப்புகள் 7, 8.

$\therefore A \cap B = \{7, 8\}$.

எடுத்துக்காட்டு-5. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ எனில் $A \cap B$ஐ வென்படம் மூலம் விவரி.

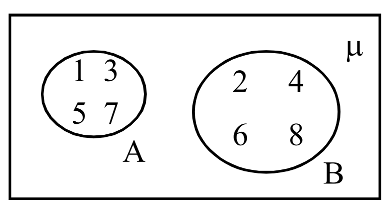
தீர்வு : A, B கணங்களின் வெட்டை வென்படத்தில் கீழ்கண்டவாறு காட்டலாம்.



$A \cap B = \{3\}$

ஒவ்வா கணங்கள்

A {1, 3, 5, 7}, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ எனக்கொள்வோம். A,B கணங்களில் பொது உறுப்பு இல்லை என்பதை நாம் கவனிக்கலாம். இவ்வாறான கணங்களை ஒவ்வா **கணங்கள்** எனப்படுகின்றன. ஒவ்வா கணங்களின் வென்படத்தை பக்க படத்தில் காணலாம்.



$A \cap B = \phi$

இதை செய்

1. $A = \{1, 3, 7, 8\}, B = \{2, 4, 7, 9\}$ எனில் $A \cap B$ கண்டுபிடி.
2. $A = \{6, 9, 11\}; B = \{\ \}$, எனில் $A \cup \phi$ கண்டுபிடி.
3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}; B = \{2, 3, 5, 7\}$. எனில் $A \cap B$ கண்டுபிடி. நீ அறிவது என்ன?
4. $A = \{4, 5, 6\}; B = \{7, 8\}$ எனில் $A \cup B = B \cup A$ எனக்காட்டு.

முயற்சி செய்

1. A, B கணங்கள் ஒவ்வா கணங்கள் ஆகும்படியான உறுப்புகளை கொண்ட கணங்களை பட்டியலிடு.
2. $A = \{2, 3, 5\}$, எனில் $A \cup \phi$, $\phi \cup A$ ஆகியவற்றை கண்டுபிடித்து ஒப்பிடுக.
3. $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ எனில் $A \cup B$, $A \cap B$ ஆகியவற்றை கண்டுபிடி. நீ அறிவது என்ன?
4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ எனில் A வெட்டு B கண்டுபிடி.

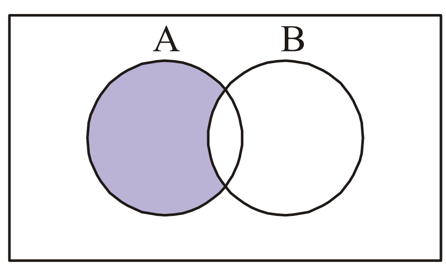
சிந்தித்து கலந்துரையாடு

ஏதேனும் இரண்டு ஒவ்வா கணங்களின் வெட்டு, வெற்று கணமாகும். இந்த வாக்கியம் சரியா? தவறா?

2.6.3 கணங்களின் வித்தியாசம்

A என்பது ஒற்றை எண்களை கொண்ட கனம் என்க. B என்பது 30ன் காரணிகளை கொண்ட கணம் என்க. அதாவது $A=\{1,3,5,...\}$ மேலும் $B= \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. ஒற்றை எண்கள் அல்லாத 30ன் காரணிகளை கண்டறிய வேண்டுமெனில் அது $\{2,6,10,30\}$. எனும் கணம் ஆகும். இந்த கணத்தை B-A என எழுதலாம் அதாவது.

$B\text{-}A=\{2,6,10,30\}$.



நாம் இப்போது A,B கணங்களின் வித்தியாசத்தை வரையறுப்போம். A கணத்தில் உள்ள ஆனால் B கணத்தில் இல்லாத உறுப்புகள் அடங்கிய கணத்தை A,B கணங்களின் வித்தியாசம் என்பர். இதை $A – B$ என எழுதி “A வித்தியாசம் B” என படிக்கிறோம்.

$$A – B = \{x : x \in A \text{ மேலும் } x \notin B\}.$$

எடுத்துக்காட்டு-6. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; B = \{4, 5, 6, 7\}$. எனில் $A - B$ கண்டுபிடி.

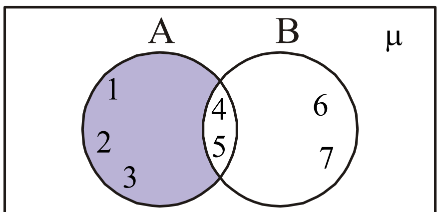
தீர்வு : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. A கணத்தில் உள்ளதும், B கணத்தில் இல்லாததுமான உறுப்புகளை மட்டும் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$\therefore A - B = \{1, 2, 3\}$. 4,5 ஆகிய உறுப்புகளை எடுத்துக்கொள்ளவில்லை. ஏனெனில் அவை B கணத்தின் உறுப்புகள். இவ்வாறே $B - A$ காண வேண்டுமெனில் B கணத்தில் உள்ளதும், A கணத்தில் இல்லாததுமான உறுப்புகளை மட்டுமே எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

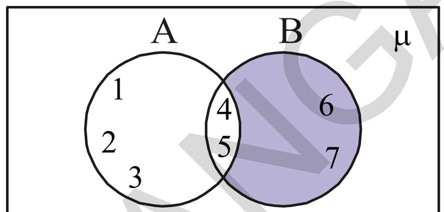
$\therefore B - A = \{6, 7\}$ (4, 5 ஆகிய உறுப்புகளை எடுத்துக்கொள்ளவில்லை. ஏனெனில் அவை A கணத்தின் உறுப்புகள் ஆகும்).

$A - B \neq B - A$ என கவனிக்கவும்.

A-B, B-A ஆகியவற்றின் வென்படங்களை கீழே காணலாம்.



$A - B = \{1, 2, 3\}$



$B - A = \{6, 7\}$

இதை செய்

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; B = \{4, 5, 6, 7\}$ எனில் $A - B, B - A$ காண்க. $A - B, B - A$ இவ்விரண்டும் சமமா?
2. $V = \{a, e, i, o, u\}, B = \{a, i, k, u\}$, எனில் $V - B, B - V$ காண்க.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

$A - B, B - A, A \cap B$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று ஒவ்வா கணங்களாகும். சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் கொண்டு இந்த உண்மையை ஆராய்க.

பயிற்சி - 2.2

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ எனில் $A \cap B, B \cap A$ கண்டுபிடி. இவை சமமா?
2. $A = \{0, 2, 4\}$ எனில் $A \cap \phi$, $A \cap A$ கண்டுபிடி. இவற்றின் மீது உன் ஆலோசனையை விவரி.
3. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, எனில் $A - B, B - A$ கண்டுபிடி.
4. A, B என்பவை கணங்கள். $A \subset B$ எனில் $A \cup B$ கண்டுபிடி.

5. $A = \{x : x$ ஓர் இயல் எண்$\}$

$B = \{x : x$ ஓர் இரட்டை இயல் எண்$\}$

$C = \{x : x$ ஓர் ஒற்றை இயல் எண்$\}$

$D = \{x : x$ ஒரு பகா எண்$\}$ எனில்

கீழ்கண்டவற்றை கண்டுபிடி.

$A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D, C \cap D$

6. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$; $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$; $D = \{5, 10, 15, 20\}$ எனில் கீழ்கண்டவற்றை கண்டுபிடி.

(i) $A - B$ (ii) $A - C$ (iii) $A - D$ (iv) $B - A$ (v) $C - A$

(vi) $D - A$ (vii) $B - C$ (viii) $B - D$ (ix) $C - B$ (x) $D - B$

7. கீழ்கண்ட கூற்றுகள் (வாக்கியங்கள்) சரியா, தவறா எனக்கூறு. உன் விடையை நியாயப்படுத்து.

(i) $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{3, 6\}$ கணங்கள் ஒவ்வாகணங்கள்.

(ii) $\{a, e, i, o, u\}$, $\{a, b, c, d\}$ கணங்கள் ஒவ்வாகணங்கள்.

(iii) $\{2, 6, 10, 14\}$, $\{3, 7, 11, 15\}$ கணங்கள் ஒவ்வாகணங்கள்.

(iv) $\{2, 6, 10\}$, $\{3, 7, 11\}$ கணங்கள் ஒவ்வாகணங்கள்.

2.7. சம கணங்கள்

கீழ்கண்ட கணங்களை கவனிப்போம்.

A = {சச்சின், திராவிட், கோஹ்லி}

B = {திராவிட், சச்சின், தோனி}

C = {கோஹ்லி, திராவிட், சச்சின்}

இந்த A, B, C கணங்களிலிருந்து நீங்கள் கவனித்தது என்ன? கணம் Aவிலுள்ள ஆட்டக்காரர்கள் அனைவரும், கணம் Cல் உள்ளனர். ஆனால் Bல் இல்லை. அதாவது A, C கணங்களில் ஒரே விதமான உறுப்புகள் உள்ளன. ஆனால் A,B கணங்களில் ஒரே விதமான உறுப்புகள் இல்லை. ஆகவே A,C கணங்கள் சம கணங்கள் எனப்படும், A,B கணங்கள் சம கணங்கள் அல்ல.

A, C கணங்கள் **சம கணங்கள்** ஆகவேண்டுமெனில் கணம் Aவிலுள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் கணம் Cல் இருக்க வேண்டும். அவ்வாறே கணம் Cல் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் கணம் Aவில் இருக்க வேண்டும்.

A, C கணங்கள் சம கணங்கள் எனில் அதை $A = C$ ஆல் குறிப்பர்.

மேலும் இதை $C \subseteq A$, $A \subseteq C \Leftrightarrow A = C$ என குறிப்பர். இங்கு $\Leftrightarrow$ எனும் இருவழிச்சுட்டு குறியீடு பொதுவாக ஆங்கிலத்தில் **if and only if** என கூறப்படுகிறது. (சுருக்கமாக "iff" என எழுதலாம்). A மற்றும் C கணங்களில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் சமம் எனில் $A = C$.

நாம் அறிவது என்னவெனில் "எல்லா கணங்களும் அதற்கு அதே உட்கணமாகும்".

எடுத்துக்காட்டு-7. $A = \{p, q, r\}$ மற்றும் $B = \{q, p, r\}$ எனில் $A = B$ என்பது சரியா? தவறா? என சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு : இங்கு $A = \{p, q, r\}$ மற்றும் $B = \{q, p, r\}$

A கணத்திலுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் B கணத்தில் உள்ளன. $\therefore A \subset B$.

அவ்வாறே, B கணத்திலுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் A கணத்தில் உள்ளன. $\therefore B \subset A$.

அதாவது, $B \subset A, A \subset B$ எனவே $A = B$.

எடுத்துக்காட்டு-8: $A = \{1, 2, 3, \ldots.\}$ Nஇயல் எண்களின் கணம் எனில் A, N கணங்கள் சம கணங்களா என சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு : இவ்விரண்டு கணங்களிலும் ஒரே விதமான உறுப்புகள் உள்ளன. ஆகவே A, N கணங்கள் இரண்டுமே இயல்எண் கணங்களே. எனவே கணம் A, கணம் N சமகணங்கள் ஆகவே, $A = N$.

எடுத்துக்காட்டு-9:. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ எனில் இவை சமகணங்களா?

தீர்வு : A கணத்திலுள்ள உறுப்புகளும், B கணத்திலுள்ள உறுப்புகளும் ஒரேவிதமாக இல்லை. ஆகவே $A \neq B$. $\because A \subset B$ ஆனால் $B \not\subset A$

எடுத்துக்காட்டு-10. 6க்கு குறைவான பகா எண்கள் கணத்தை A எனக்கொள். 30ன் பகாக்காரணிகள் கணத்தை P எனக்கொள். A,P கணங்கள் சமகணங்களா? சரிபார்.

தீர்வு : 6க்கு குறைவான பகா எண்கள் கணம், $A = \{2,3,5\}$

30ன் பகாக்காரணிகளின் கணம், $P = \{2,3,5\}$

கணம் A, கணம் P இரண்டிலும் ஒரே மாதிரியான உறுப்புகளே உள்ளன. ஆகவே A, P கணங்கள் சமகணங்களாகும் எனவே A=P. $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$

எடுத்துக்காட்டு-11: $A = \{x : x$ என்பது ‘ASSASSINATION’ எனும் சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து$\}$

$B = \{x : x$ என்பது STATION எனும் சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து$\}$

எனில் A,B கணங்கள் சமகணங்கள் எனக்காட்டு.

தீர்வு : $A = \{x : x$ என்பது ‘ASSASSINATION’ எனும் சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து$\}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கணம் Aவை, $A = \{A,S,I,N,T,O\}$ எனவும் எழுதலாம். ஏனெனில், கணத்திலுள்ள உறுப்புகளை ஒரு முறைக்கு மேல் திரும்ப எழுதக்கூடாது.

$B = \{x : x$ என்பது STATION எனும் சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து$\}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கணம் ‘B’ யை $B = \{A,S,I,N,T,O\}$ எனவும் எழுதலாம்.

ஆகவே, A, B கணங்கள் சமகணங்கள், எனவே $A = B$

$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$

எடுத்துக்காட்டு-12. ϕ, A = {1, 3}, B = {1, 5, 9}, C = {1, 3, 5, 7, 9}. ஆகிய கணங்களை எடுத்துக்கொள்வோம். கீழே உள்ள ஒவ்வொரு ஜதை கணங்களிலும் $\subset$ அல்லது $\not\subset$ குறியால் நிரப்புக.

(i) ϕ ….. B (ii) A ….. B (iii) A ….. C (iv) B ….. C

தீர்வு : (i) $\phi \subset B$, ஏனெனில் வெற்று கணம் ஒவ்வொரு கணத்துக்கும் உட்கணமாகும்.

(ii) $A \not\subset B$, ஏனெனில் $3 \in A$ ஆனால் $3 \notin B$.

(iii) $A \subset C$ ஏனெனில் $1, 3 \in A \Rightarrow 1, 3, \in C$.

(iv) $B \subset C$ ஏனெனில் Bகணத்திலுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் C கணத்திலும் உறுப்புகளாக உள்ளன.

பயிற்சி - 2.3

1. கீழ்கண்டவற்றில் எவை சம கணங்கள்?

(i) A = {x : x என்பது FOLLOW எனும் சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து}

(ii) B = {x : x என்பது FLOW எனும் சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து}

(iii) C = {x : x என்பது WOLF எனும் சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து}

2. கீழ்கண்ட கணங்களை ஆராய்ந்து அதற்கு அடுத்து உள்ள காலி இடங்களில் '=' அல்லது '$\neq$' குறிகளால் நிரப்பி, மெய்க்கூற்றுகளாக மாற்றுக.

A = {1, 2, 3}; B = {முதல் மூன்று இயல் எண்கள்}

C = {a, b, c, d}; D = {d, c, a, b}

E = {a, e, i, o, u}; F = {ஆங்கில உயிர் எழுத்துகள்}

(i) A ···· B (ii) A ···· E (iii) C ···· D

(iv) D ···· F (v) F ···· A (vi) D ···· E

(vii) F ···· B

3. கீழ்கண்ட ஒவ்வொரு ஜதைகளும் A = B ஆகுமா? ஆகாதா? என தெரிவி.

(i) A = {a, b, c, d} B = {d, c, a, b}

(ii) A = {4, 8, 12, 16} B = {8, 4, 16, 18}

(iii) A = {2, 4, 6, 8, 10} B = {x : x ஒரு மிகை இரட்டை முழு $x < 10$}

(iv) A = {x : x 10ன் மடங்கு} B = {10, 15, 20, 25, 30, …}

4. கீழ்கண்ட வாக்கியங்களுக்கு தகுந்த காரணங்களைக் கூறு.

(i) $\{1, 2, 3, ..., 10\} \neq \{x : x \in N,\ 1 < x < 10\}$

(ii) $\{2, 4, 6, 8, 10\} \neq \{x : x = 2n+1, x \in N\}$

(iii) $\{5, 15, 30, 45\} \neq \{x : x$ 15ன் மடங்கு$\}$

(iv) $\{2, 3, 5, 7, 9\} \neq \{x : x$ ஒரு பகா எண்$\}$

5. கீழ்கண்ட கணங்களின் அனைத்து உட்கணங்களை எழுதுக.

(i) B = {p, q} (ii) C = {x, y, z} (iii) D = {a, b, c, d}

(iv) E = {1, 4, 9, 16} (v) F = {10, 100, 1000}

2.8 முடிவுறு, முடிவுறா கணங்கள்

கீழ்கண்ட கணங்களை ஆராய்வோம்

(i) A = {உன் பள்ளி மாணவர்கள்} (ii) L = {p,q,r,s}

(iii) B = $\{x : x$ ஓர் இரட்டைப்படை எண்$\}$ (iv) J = $\{x : x$ 7ன் மடங்கு$\}$

மேற்கண்ட கணங்களின் உறுப்புகளை உன்னால் எழுதமுடியுமா? (i)ல் உள்ள உறுப்புகள், உன் பள்ளியிலுள்ள அனைத்து மாணவர்களும் ஆவர். (ii) L என்ற கணத்தில் 4 உறுப்புகள் உள்ளன. இவ்விரண்டு கணங்களிலுள்ள உறுப்புகளை நம்மால் எண்ணி கூறமுடியும். ஆகவே இதுபோன்ற கணங்கள் **முடிவுறு கணங்கள்** எனப்படும்.

இது போன்று கணம் B லுள்ள உறுப்புகளை ஆராய்ந்தால், இரட்டைப்படை எண்கள் எண்ணற்றவைகளாக உள்ளன. இவ்வாறே கணம் J விலுள்ள உறுப்புகளையும் எண்ண முடியாது. ஆகவே இதுபோன்ற கணங்கள் **முடிவுறா கணங்கள்** எனப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழியே எண்ணற்ற நேர்கோடுகள் வரையலாம். இது ஒரு முடிவுறா கணம் ஆகும். இவ்வாறே முழுக்களின் தொகுப்பில் கடைசி இரட்டை எண், கடைசி ஒற்றை எண் எவை என நம்மால் கூறமுடியாது. ஆகவே ஒரு கணம் முடிவுறு கணம் அல்ல எனில் அது ஒரு முடிவுறா கணமாகும்.

மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை ஆராய்வோம்.

(i) ஒரு வாரத்திலுள்ள நாட்களின் கணம் 'W' என்க, W ஒரு முடிவுறு கணமாகும்.

(ii) $x^2 - 16 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு கணம் 'S' எனில், S ஒரு முடிவுறு கணமாகும்.

(iii) ஒரு நேர்கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளிகள் கணம் G எனில், G ஒரு முடிவுறா கணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு-13. கீழ்கண்ட கணங்களில் எவை முடிவுறு, முடிவுறா கணங்கள் ஆகின்றன எனக்கூறு.

(i) $\{x : x \in N,\ (x-1)(x-2)=0\}$ (ii) $\{x : x \in N,\ x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in N,\ 2x-2=0\}$ (iv) $\{x : x \in N, x$ ஒரு பகாஎண்$\}$

(v) $\{x : x \in N\ x$ ஓர் ஒற்றை எண்$\}$

தீர்வு :

(i) இந்த நிலையில் xக்கு 1 அல்லது 2 ஆகிய மதிப்புகளை மட்டுமே எடுத்துக்கொள்ளும். இதன் தீர்வு கணம் $\{1,2\}$ஆகும், எனவே இது ஒரு முடிவுறு கணமாகும்.

(ii) $x^2 = 4$, அதாவது $x = +2$ அல்லது -2. ஆனால் $x \in N$. ஆகவே கணம் (ii)ன் உறுப்பு $\{2\}$. இது ஒரு முடிவுறு கணமாகும்.

(iii) கொடுக்கப்பட்ட கணத்தின் உறுப்பு $x = 1$ மேலும் $1 \in N$. ஆகவே கணம் (iii)ன் உறுப்பு $\{1\}$ இது ஒரு முடிவுறுகணமாகும்.

(iv) பகா எண்கள் எண்ணற்றவை. ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட கணம் ஒரு முடிவுறா கணமாகும்.

(v) ஒற்றை எண்கள் எண்ணற்றவை. ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட கணம் ஒரு முடிவுறா கணமாகும்.

2.9 முடிவுறு கணத்தின் ஆதிஎண்

கீழ்கண்ட முடிவுறு கணங்களை ஆராய்வோம்.

$A = \{1, 2, 4\}$; $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$; $C = \{x : x$ என்பது "INDIA" எனும் சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து$\}$

இங்கு,

கணம் Aவிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = 3

கணம் Bயிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = 5

கணம் Cயிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = 4 (இந்த கணத்தில் I என்ற எழுத்து இரண்டுமுறை வருகிறது. ஒரு கணத்தில் உறுப்புகளை எழுதும் போது ஒரு முறைதான் எழுதவேண்டும் என நமக்குத் தெரியும். ஆகவே C கணத்தில் 4 உறுப்புகள் மட்டுமே இருக்கும்).

ஒரு கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அந்த கணத்தின் **ஆதிஎண்** எனப்படும். A கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 3 எனில் $n(A) = 3$ என்று குறிக்கப்படும். அவ்வாறே, $n(B) = 5$, $n(C) = 4$.

குறிப்பு: வெற்றுக்கணத்தில் உறுப்புகள் எதுவும் இருக்காது. வெற்றுக்கணத்தின் ஆதி '0' (பூஜ்ஜியம்) ஆகும். $n(\phi) = 0$

இதை செய்

1. கீழ்கண்ட கணங்களில் எவை முடிவுறு கணங்கள்? எவை முடிவுறா கணங்கள்? உன் விடைக்கான காரணங்களைக் கூறு.

(i) $A = \{x : x \in N,\ x < 100\}$ (ii) $B = \{x : x \in N,\ x \leq 5\}$

(iii) $C = \{1^2, 2^2, 3^2, ...\}$ (iv) $D = \{1, 2, 3, 4\}$

(v) $\{x : x$ வாரத்தில் ஒருநாள்$\}$.

2. கீழ்கண்ட கணங்களில் முடிவுறா கணங்களை (✓) குறியிடுக.

(A) 10க்கு குறைவான முழுஎண்களின் கணம்

(B) 10க்கு குறைவான பகாஎண்களின் கணம்

(C) 10க்கு குறைவான முழுக்களின் கணம் (D) 10ன் காரணிகளின் கணம்

முயற்சி செய்

1. கீழ்கண்டவற்றில் எவை வெற்று கணங்கள்? உன் விடையை நியாயப்படுத்து.

(i) $A = \{x : x^2 = 4,\ 3x = 9\}$.

(ii) ஒரு தளத்திலுள்ள முக்கோணங்களில் மூன்று கோணங்களின் மொத்தம் 180^0 ஐ விட குறைவாக உள்ள முக்கோணங்களின் கணம்.

2. $B = \{x : x + 5 = 5\}$ வெற்றுகணமல்ல, ஏன்?

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

வெற்றுகணம் முடிவுறு கணமாகும். இந்த வாக்கியம் சரியா? அல்லது தவறா? ஏன்?

பயிற்சி - 2.4

1. கீழ்கண்டவற்றில் எவை வெற்றுகணங்கள்? வெற்றுகணங்கள் அல்ல எனக்கூறு.

   (i) ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும் கோடுகளின் கணம்.

   (ii) 2ஆல் வகுபடும் ஒற்றை இயல் எண்களின் கணம்.

   (iii) $\{x : x$ ஓர் இயல் எண், $x < 5$ மேலும் $x > 7\}$

   (iv) $\{x : x$ ஏதேனும் இரண்டு இணைகோடுகளின் பொதுப்புள்ளி$\}$

   (v) இரட்டைப்பகா எண்களின் கணம்.

2. கீழ்கண்டவற்றில் எவை முடிவுறு கணங்கள்? எவை முடிவுறா கணங்கள்?

   (i) ஒரு வருடத்திலுள்ள மாதங்களின் கணம்

   (ii) $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$

   (iii) 99ஐ விட சிறிய பகா எண்கள் கணம்.

   (iv) ஆங்கில மொழியிலுள்ள எழுத்துகளின் கணம்.

   (v) Xஅச்சுக்கு இணையாக உள்ள கோடுகள் கணம்.

   (vi) 5ன் மடங்குகளின் கணம்.

   (vii) ஆதி $(0, 0)$ வழியே செல்லும் வட்டங்களின் கணம்.

எடுத்துக்காட்டு-14. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$ எனில் $n(A \cup B)$ ஐ காண்க.

தீர்வு : கணம் A ஆனது ஐந்து உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளது. $\therefore n(A) = 5$

மேலும் கணம் B ஆனது நான்கு உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளது. $\therefore n(B) = 4$

ஆனால் $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ 9 உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்காமல் 7 உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்டுள்ளது. ஏன்?

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

1. $n(A), n(B), n(A \cap B)$ மேலும் $n(A \cup B)$ ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பு என்ன?
2. A மற்றும் B என்பவை ஒவ்வா கணங்கள் எனில் $n(A \cup B)$ ஐ எவ்வாறு காண்பாய்?

செயல்திட்டம்

உன்னுடைய வகுப்பில், மாணவர்களுக்கு பிடித்த ஏதேனும் இரண்டு விளையாட்டுகள்/ செய்திதாள்கள் / டி.வி சேனல்கள் ஆகியவற்றைப்பற்றிய தகவல்கள் குறித்து கணக்கெடுப்பு நடத்தவும்.

கணங்களை பயன்படுத்தி கீழ்க்கண்டவற்றைக் கண்டுபிடி.

(i) எத்தனை பேர் விளையாட்டு 1 / செய்தித்தாள் 1 / டி.வி சேனல் 1 ன் மீது ஆர்வம் கொண்டுள்ளனர்?

(ii) எத்தனை பேர் விளையாட்டு 2 / செய்தித்தாள் 2 / டி.வி சேனல் 2 ன் மீது ஆர்வம் கொண்டுள்ளனர்?

(iii) எத்தனை பேர் இரண்டின் மீதும் ஆர்வம் கொண்டுள்ளனர்?

(iv) எத்தனை பேர் இரண்டின் மீதும் ஆர்வமற்று உள்ளனர்?

அவற்றைக் கொண்டு வெட்டு, சேர்ப்பு கணங்களை தயாரித்து வென்படங்கள் மூலம் விளக்குக.

நாம் கற்றவை

1. நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருட்களின் தொகுப்பு கணம் எனப்படும். நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது என்றால்

   (i) கணத்திலுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் ஒரே விதமான பண்பை அல்லது குணத்தை பெற்றிருக்கும்.

   (ii) ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு அந்த கணத்தில் உள்ளதா இல்லையா என உறுதிபடுத்தலாம்.

2. ஒரு கணத்திலுள்ள பொருட்களை உறுப்புகள் அல்லது மூலங்கள் எனபர். 'உறுப்பாக உள்ளது' என்பதை குறிக்க '$\in$' எனும் குறியை பயன்படுத்துகிறோம்.

3. கணங்களை பட்டியல் வடிவத்தில் எழுதலாம். இக்கணத்திலுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தையும் காற்புள்ளியிட்டு (commas) வேறுபடுத்தி $\{\,\}$ என்ற அடைப்பில் எழுதவேண்டும்.

4. கணங்களை கண அமைப்பு வடிவத்திலும் எழுதலாம்.

5. ஒரு உறுப்புகூட இல்லாத கணம் வெற்றுகணம் எனப்படும்.

6. ஒரு கணத்திலுள்ள உறுப்புகளை கணக்கிட்டு கூறமுடியுமெனில் அக்கணம் முடிவுறு கணம் எனப்படும்.

7. ஒரு கணம் முடிவுறு கணமல்ல எனில் அது ஒரு முடிவுறா கணமாகும்.

8. ஒரு கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அந்த கணத்தின் ஆதி எண் (Cardinal number) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

9. அனைத்து கணம் 'μ' ஆல் குறிக்கப்படுகிறது. அனைத்து கணத்தை சாதாரணமாக செவ்வக வடிவ பெட்டியாக குறிக்கப்படுகிறது.

10. கணம் A, கணம் B க்கு உட்கணமாகுமென்றால், 'a' என்ற உறுப்பு கணம் Aவில் இருந்து, கணம் Bயிலும் உறுப்பாக இருக்க வேண்டும். இதை இவ்வாறு எழுதுகிறோம். $a \in A \Rightarrow a \in B$ எனில் $A \subset B$. இங்கு A, B என்பவை கணங்கள்.

11. A கணத்திலுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும், B கணத்திலும் உறுப்பாக இருந்து, அவ்வாறே B கணத்திலுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் A கணத்திலும் உறுப்பாக இருந்தால், அவ்விரு கணங்கள் சமகணங்கள் எனப்படுகிறது.

12. A, B கணங்களின் சேர்ப்பை $A \cup B$ என எழுதுகிறோம்.
$A \cup B = \{x : x \in A$ அல்லது $x \in B\}$.

13. A, B கணங்களின் வெட்டை $A \cap B$ என எழுதுவர். $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$

14. A, B கணங்களின் வித்தியாசத்தை $A - B$ என குறிக்கப்படுகிறது. B, A கணங்களின் வித்தியாசத்தை $B - A$ என குறிக்கப்படுகிறது.

15. கணங்களின் செயல்களை காட்டுவதற்கு வென்படங்கள் வசதியாக உள்ளன.

அத்தியாயம்

3 பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

(POLYNOMIALS)

3.1 அறிமுகம்

கீழ்காணும் இரண்டு சூழ்நிலைகளை கவனிப்போம் :

1. ஒரு பூந்தோட்டம் முக்கோண வடிவில் உள்ளது. அதன் மிகப்பெரிய பக்கம் P ஐ விட 4 மடங்கு அதிகமாகவும், மிகச்சிறிய பக்கம் P ஐ விட 2 அலகுகள் சிறியதாகவும் உள்ளது. மேலும் மீதியுள்ள பக்கம் P ஐ விட மூன்று மடங்கு அதிகம் எனில் P ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு இம்முக்கோணத்தின் சுற்றளவை கண்டுபிடி?

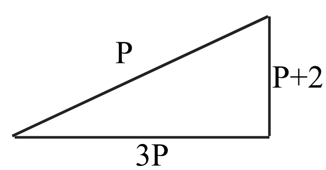
2. ஒரு உணவுக்கூடத்தின் நீளம் அகலத்தைப்போல் இரண்டு மடங்கு பெரியது. அந்த கூடத்தின் அகலம் x அலகுகள் எனில் கூடத்தின் பரப்பளவை கண்டுபிடி?

மேற்காணும் இரண்டு சூழ்நிலைகளை கவனிக்கும்போது ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு தெரியாத அலகு உள்ளது.

எனவே, முக்கோணத்தின் சுற்றளவு = பக்கங்களின் நீளங்களின் மொத்தம்.

சுற்றளவு= $P + 3P + P + 2$

$= 5P + 2$

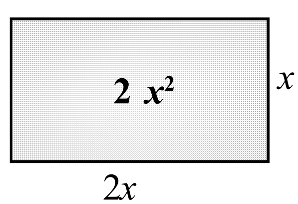


இவ்வாறாகவே, இரண்டாம் சூழ்நிலையில் நீளம் அகலத்தைப்போல் இரண்டு மடங்கு. எனவே அகலம் = x எனில் நீளம் = $2x$ ஆகும்.

செவ்வகத்தின் பரப்பளவு = lb

பரப்பளவு $= (2x)\ (x)$

$= 2\,x^2$



இதன் மூலம் முக்கோணத்தின் சுற்றளவு $5P + 2$ மேலும் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $2x^2$ ஆகியவை வெவ்வேறு படிகளை உடைய பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எனக்கூறலாம்.

3.2 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்றால் என்ன?

ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை x ஆனது ax^n வடிவத்தில் உள்ள குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலான உறுப்புகளின் கூடுதலாக அமையும்.இங்கு a என்பது மெய்யெண், n என்பது முழுஎண்.$a \neq 0$

பல்லுப்புக்கோவை	பல்லுப்புக்கோவை அல்ல
$2x$	$4x^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{3}x-4$	$3x^2 + 4x^{-1} + 5$
$x^2 - 2x - 1$	$4+\frac{1}{x}$

இதை செய்

கீழ்காணும் கோவைகளில் எவை பல்லுறுப்புக் கோவைகள்? எவை பல்லுறுப்பு கோவைகள் அல்ல? காரணம் கூறு?

(i) $2x^3$ (ii) $\frac{1}{x}-1(x \neq 0)$ (iii) $4z^2+\frac{1}{7}$ (iv) $m^2-\sqrt{2}\,m+2$ (v) $P^{-2}+1$

3.2.1 பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி

$p(x)$ என்பது xஐ மாறியாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் xன் மிக உயர்ந்த அடுக்கை நாம் $p(x)$ ன் படி என்கிறோம். உதாரணமாக $3x + 5$ என்பது xயை மாறியாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. இதன்படி 1. எனவே மேலும் $3x+5$ஐ நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை என்கிறோம். மேலும் $5x$, $\sqrt{2}y+5$, $\frac{1}{3}$P, $m + 1$ முதலியன மேலும் சில நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகும். படி இரண்டு கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையை இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை என்கிறோம். உதாரணமாக $x^2 + 5x + 4$ என்பது x ஐ மாறியாகக் கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை. இவ்வாறே $2x^2 + 3x - \frac{1}{2}$, $p^2 -1$, $3 - z - z^2$, $y^2 - \frac{y}{3} + \sqrt{2}$ ஆகியவை மேலும் சில இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஆகும்.

$5x^3-4x^2+x-1$ எனும் கோவை x ஐ மாறியாகவும் படி 3உடைய பல்லுறுப்புக்கோவை. இதை நாம் முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை என்கிறோம். முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு மேலும் சில உதாரணங்கள் $2 - x^3$, p^3, $l^3 - l^2 - l + 5$.

முயற்சி செய்

வெவ்வேறான எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்ட மூன்று இருபடி, முப்படி மேலும் இரண்டு நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எழுது.

$7u^6-\frac{3}{2}u^4+4u^2-8$ என்பது 6ஐ படியாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை மேலும் $x^{10} - 3x^8 + 4x^5 + 2x^2 -1$ என்பது 10ஐ படியாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. இதுபோல எந்தப் படியையும் கொண்டு நாம் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எழுதலாம்.

'n' ஏதேனும் ஒரு முழுஎண் மேலும் x எனும் மாறிக்கு n வது படியைக்கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையை நாம் எழுதலாம். பொதுவாக

$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$ என்பது n படி கொண்ட பல்லுறுப்பு கோவை ஆகும்.
இதில் $a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{n-1}, a_n$ என்பவை கெழுக்கள் மேலும் $a_0 \neq 0$

உதாரணமாக $ax+b$ என்பது படி 1 உடைய xஐ மாறியாகக் கொண்ட நேரிய சமன்பாட்டின் பொது வடிவமாகும். இங்கு a மேலும் b மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.

முயற்சி செய்

1. x ஐ மாறியாகக் கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை மேலும் முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பொதுவடிவங்களை எழுது.
2. $b_0, b_1, b_2 \ldots b_n$ களை கெழுக்களாகக் கொண்ட n படி பல்லுறுப்புக் கோவை $q(z)$ன் பொது வடிவத்தை எழுது? $b_0, b_1, b_2 \ldots b_n$க்கு தேவைப்படும் நிபந்தனைகள் என்ன?

3.2.2 பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு

$p(x) = x^2 - 2x - 3$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம். ஏதேனும் ஒரு மாறிலிக்கு இதன் மதிப்பு என்னவாக இருக்கும்? உதாரணமாக $x = 1$ எனும்போது இதன் மதிப்பு என்ன? இந்த $p(x)$ பல்லுறுப்புக் கோவையில் $x = 1$ என பிரதியிட நாம் பெறுவது, $p(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$. கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ல் xக்கு பதிலாக 1ஐ பிரதியிட -4 கிடைக்கிறது.

இவ்வாறே $x=0$ எனும் போது $p(x)$ ன் மதிப்பு $p(0) = -3$ ஆகும்.

$p(x)$ என்பது xஐ மாறியாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை மேலும் k என்பது ஒரு மெய்யெண் எனில் $p(x)$ல் xக்கு பதிலாக k வை பிரதியிட கிடைக்கும் மதிப்பை $p(k)$ என எழுதுகிறோம்.

இதை செய்

(i) $p(x) = x^2 - 5x - 6$, எனில் $p(1), p(2), p(3), p(0), p(-1), p(-2), p(-3)$ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(ii) $p(m) = m^2 - 3m + 1$, எனில் $p(1)$ மேலும் $p(-1)$ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

3.2.3 பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் :

$x = 3, -1$ மேலும் 2 எனும் போது $p(x) = x^2 - 2x - 3$ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி

இதுபோல நமக்கு $p(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

மேலும் $p(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$

மேலும் $p(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$

நமக்கு $p(3) = 0$ மேலும் $p(-1) = 0$ என கிடைத்தது. $x = 3$ மேலும் $x = -1$ ஆகியவை $p(x) = x^2 - 2x - 3$ன் பூஜ்ஜியங்கள் எனப்படுகின்றன.

$p(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையில் ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் kக்கு $p(k) = 0$ எனில் k என்பது அக்கோவையின் பூஜ்ஜியம் எனப்படும்.

இதை செய்

(i) $p(x) = x^2 - 4x + 3$ எனில் கோவையின் $p(0), p(1), p(2), p(3)$ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி. இதில் $p(x)$ன் பூஜ்ஜியங்களைக் காண்.

(ii) $x^2 - 9$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு -3 மேலும் 3 பூஜ்ஜியங்கள் ஆகுமா? இல்லையா? சரிபார்.

பயிற்சி - 3.1

1. $p(x) = 5x^7 - 6x^5 + 7x - 6$, எனில் கீழ்க்கண்டவற்றை கண்டுபிடி

   (i) x^5ன் கெழு (ii) $p(x)$ன் படி (iii) மாறிலி உறுப்பு

2. கீழ்வரும் கூற்றுகள் சரியா? தவறா? எனக்கூறு. உனது காரணங்களைக் கூறு.

   (i) $\sqrt{2}\, x^2 - 3x + 1$ பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி $\sqrt{2}$.

   (ii) $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையில் x^2 ன் கெழு 2.

   (iii) மாறிலி உறுப்பின் படி பூஜ்ஜியம்.

   (iv) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ என்பது இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை.

   (v) ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின்படி அதிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை விட ஒன்று அதிகம்.

3. $p(t) = t^3 - 1$, எனில் $p(1), p(-1), p(0), p(2), p(-2)$ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

4. -2 மேலும் 2 ஆகியவை $x^4 - 16$ க்கு பூஜ்ஜியங்களாகுமா என சரிபார்.

5. 3 மேலும் -2 ஆகியவை $p(x) = x^2 - x - 6$க்கு பூஜ்ஜியங்களாகுமா என சரிபார்.

3.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகளுடன் செயல்கள்

ஒரு நேரிய கோவையின் பூஜ்ஜியங்களை எவ்வாறு காண்பது என்பதை கற்றுள்ளோம். உதாரணமாக $p(x) = 2x + 5$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் k எனில் $p(k) = 0$

அதாவது $2k + 5 = 0$ i.e., $k = \frac{-5}{2}$.

பொதுவாக k என்பது $p(x) = ax+b, a \neq 0$ ன் பூஜ்ஜியம் எனில் $p(k) = ak + b = 0,$

அதாவது, $k = \frac{-b}{a}$, அல்லது $ax + b$ என்ற நேரிய சமன்பாட்டின் பூஜ்ஜியம் $\frac{-b}{a}$ ஆகும்.

எனவே ஒரு நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் அதன் மாறியின் கெழுக்கள் மேலும் மாறிலியின் மீது ஆதாரப்பட்டுள்ளது.

3.4 பல்லுறுப்புக் கோவை பூஜ்ஜியங்களின் வடிவியல் பொருள்

$p(x)$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $p(k) = 0$ (k ஒரு மெய்யெண்) எனில் $p(x)$ன் பூஜ்ஜியம் என்கிறோம். நாம் இப்போது நேரிய மேலும் இருபடி கோவைகளின் வரைபட விளக்கங்கள் மேலும் அவற்றின் பூஜ்ஜியங்களின் வடிவியல் பொருளைப் பற்றியும் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

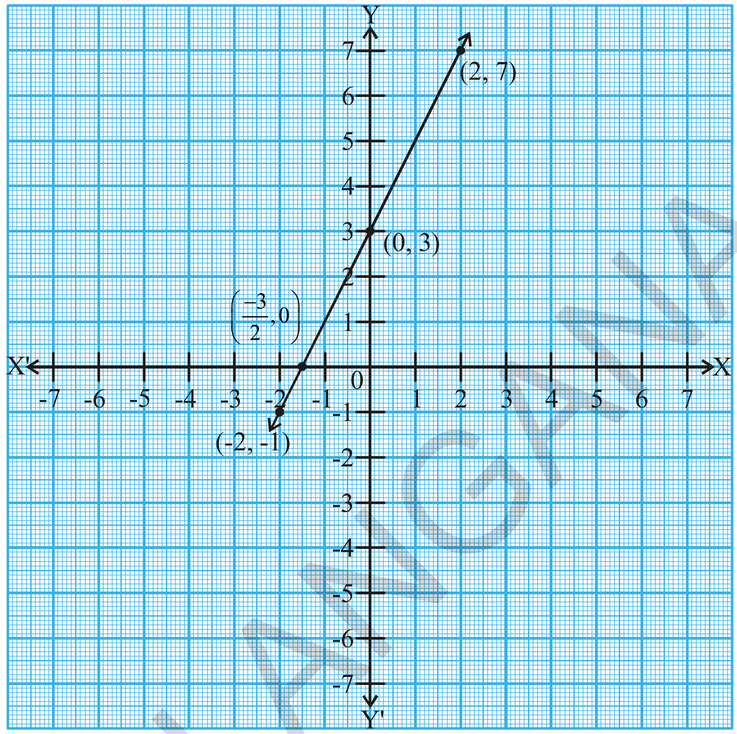
3.4.1. ஒரு நேரிய கோவையின் வரைபட விளக்கம்

$ax + b, a \neq 0$ எனும் நேரிய கோவையை கவனி. $y = ax + b$ எனும் நேரிய கோவையின் வரைபடம் ஒரு நேர்கோடு என ஒன்பதாம் வகுப்பில் படித்துள்ளோம். உதாரணமாக $y = 2x + 3$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரைபடம் ஒரு நேர்கோடு மேலும் இது y-அச்சை $(0, 3)$ புள்ளியில் வெட்டுகிறது. மேலும் இது $(-2, -1)$ மேலும் $(2, 7)$ புள்ளிகள் வழியே செல்கிறது.

அட்டவணை **3.1**

x	-2	0	2
$y = 2x + 3$	-1	3	7
(x, y)	$(-2, -1)$	$(0, 3)$	$(2, 7)$

வரைபடத்தை நாம் கவனிக்கும் போது $y = 2x+3$ ன் வரைபடம் x-அச்சை $x = -1$ மேலும் $x = -2$க்கு இடையே வெட்டுகிறது. அதாவது இது $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ல் வெட்டுகிறது. ஆனால் $x = \frac{-3}{2}$ என்பது $2x + 3$எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியமும் ஆகும். அதாவது $2x + 3$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் என்பது $y = 2x + 3$ எனும் நேர்கோடு x அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் xன் அச்சு தூரமாகும்.



இதை செய்

(i) $y = 2x + 5$, (ii) $y = 2x - 5$, (iii) $y = 2x$ களின் வரைபடங்களை வரைந்து அவை x அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடி? இவற்றின் x அச்சுதூரங்கள் அப்பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களா?

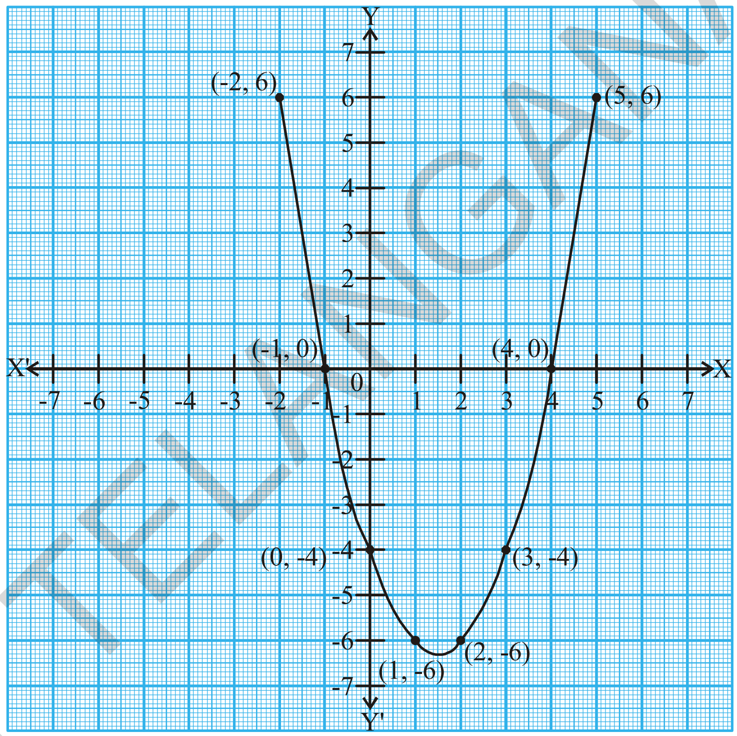
பொதுவாக, $ax + b, a \neq 0$, எனும் நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $y = ax + b$ன் வரைபடம் ஒரு நேர்கோட்டை குறிக்கிறது. மேலும் இந்நேர்கோடு x அச்சை $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ எனும் சரியாக ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டும் வெட்டும். எனவே $ax + b, a \neq 0$ எனும் நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரே ஒரு பூஜ்ஜிய மதிப்பு என்பது $y = ax + b$ எனும் நேர்கோடு x-அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் x அச்சு தூரமாகும்.

3.4.2. இருபடிக் கோவையின் வரைபட விளக்கம்

இருபடிக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களுக்கான வடிவியல் பொருளை நாம் இப்போது தெரிந்துகொள்ளலாம். $x^2 - 3x - 4$ எனும் இருபடிக் கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். $y = x^2 - 3x - 4$ன் வரைபடம் எப்படி இருக்கும் என நாம் பார்ப்போம். அட்டவணை 3.2ல் காட்டியவாறு x ன் சில மதிப்புகளுக்கு $y = x^2 - 3x - 4$ ன் சில மதிப்புகளை பட்டியலிடுவோம்.

அட்டவணை 3.2

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6
(x, y)	$(-2, 6)$	$(-1, 0)$	$(0, -4)$	$(1, -6)$	$(2, -6)$	$(3, -4)$	$(4, 0)$	$(5, 6)$



அட்டவணையிலுள்ள புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து வரைபடம் வரைவோம். இந்த இருபடிக்கோவையின் வரைபடம் ஒரு நேர்கோடா? இல்லை. இது ஒரு வடிவிலுள்ள வளைவு ஆகும். இது xஅச்சை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ஏதேனும் ஒரு இருபடிக் கோவைக்கு $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ க்கு ஒத்த, $y = ax^2 + bx + c$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் வடிவத்தில் மேற்புறமாக திறந்தோ அல்லது வடிவத்தில் கீழ்புறமாக திறந்தோ காணப்படும். இந்த வளைவு $a > 0$ அல்லது $a < 0$ மதிப்புகளை சார்ந்திருக்கிறது. (இந்த வளைவு அமைப்பை நாம் பரவளையம் என்கிறோம்).

நமக்கு கொடுக்கப்பட்ட இருபடிக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் –1 மேலும் 4 என கவனிக்கலாம். –1 மேலும் 4 என்பவை x அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் ஆகும். $x^2 - 3x - 4$ எனும் இருபடிக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் $y = x^2 - 3x - 4$ எனும் வரைபடம் X- அச்சை வெட்டும்X-அச்சுதூரங்கள் ஆகும். $P(x)=y=x^2 - 3x - 4$; $P(-1)=0$, எனும் வரைபடமானது X-அச்சை (-1, 0)ல் வெட்டுகிறது. மேலும் $P(4)=0$ வரைபடம் X- அச்சை (4, 0)ல் வெட்டுகிறது. பொதுவாக P(x) கோவையானது $P(a)=0$, எனில் X-அச்சை (a, 0) ல் வெட்டும்.

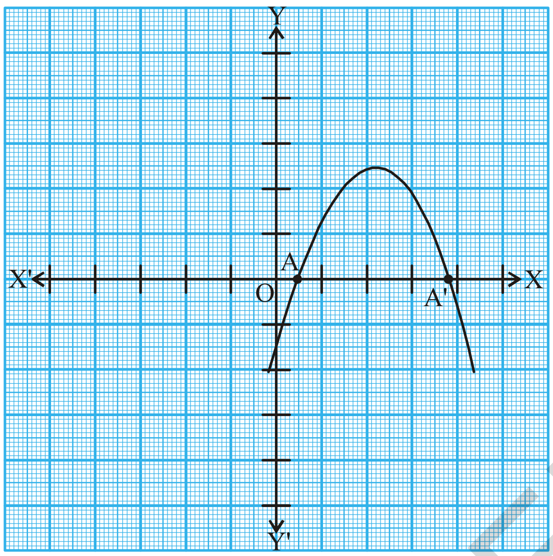
இது அனைத்து இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கும் உண்மையாகும். அதாவது $ax^2 + bx + c$ எனும் இருபடிக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் $y = ax^2 + bx + c$, x அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் x அச்சு தூரங்கள் ஆகும்.

முயற்சி செய்

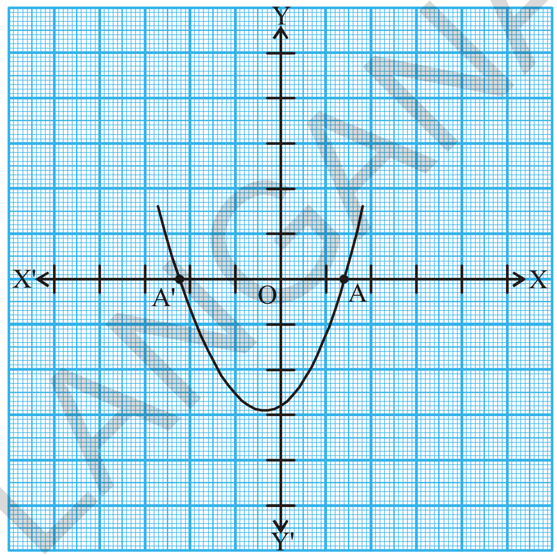
(i) $y = x^2 - x - 6$ (ii) $y = 6 - x - x^2$ வரைபடங்களை வரைந்து இதன் பூஜ்ஜியங்களை கண்டுபிடி? நீ அறிவது என்ன?

நாம் முன்னரே கவனித்தபடி $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ ன் வரைபடத்தை கீழ்காணும் மூன்று வகைகளில் வகைப்படுத்தலாம்

வகை (i) : இந்த வகையில் வரைபடம் x-அச்சை A மேலும் A′ எனும் இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. எனவே இங்கு A மேலும் A′ புள்ளிகளின் x அச்சு தூரங்கள் ax^2+bx+c என்ற இருபடிக் கோவையின் இரண்டு பூஜ்ஜியங்கள் ஆகும். இப்பரவளையங்கள் மேற்புறமாகவோ அல்லது கீழ்புறமாகவோ திறந்து காணப்படலாம்.

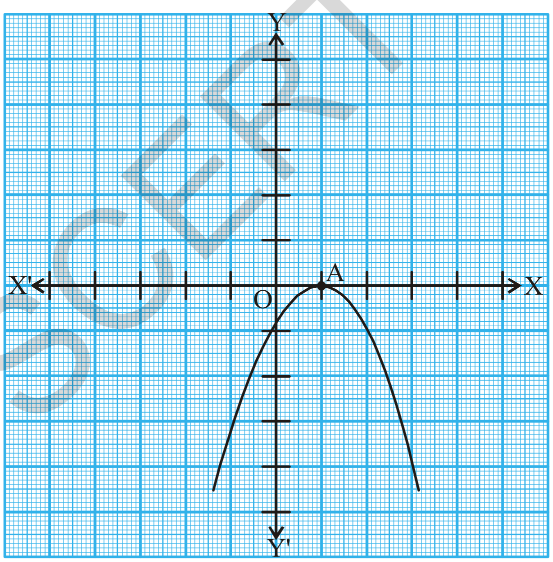


(i)

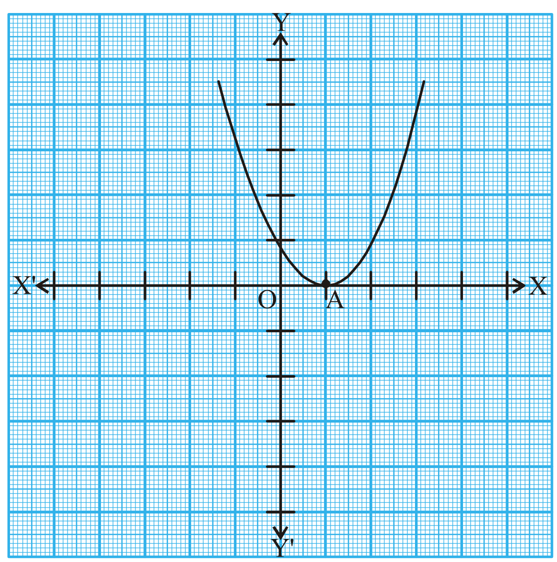


(ii)

வகை (ii) : இந்த வகையில் வரைபடம் x அச்சை ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொடுகிறது. அதாவது இந்த வகையில் (i)ல் உள்ள A மற்றும் A′ புள்ளிகள் ஒன்றி ஒரே புள்ளி Aவாக மாறுகிறது.



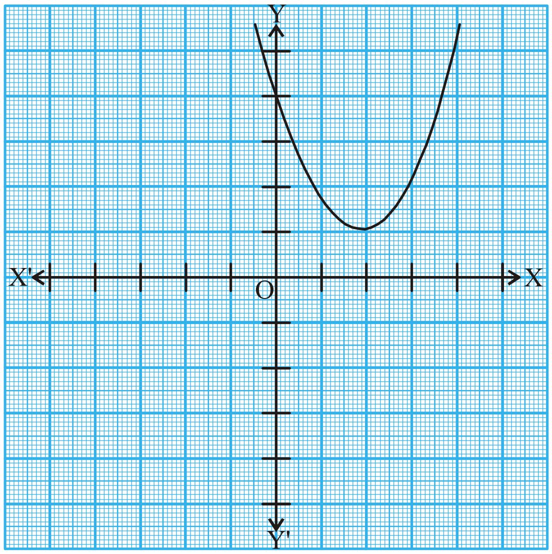
(i)



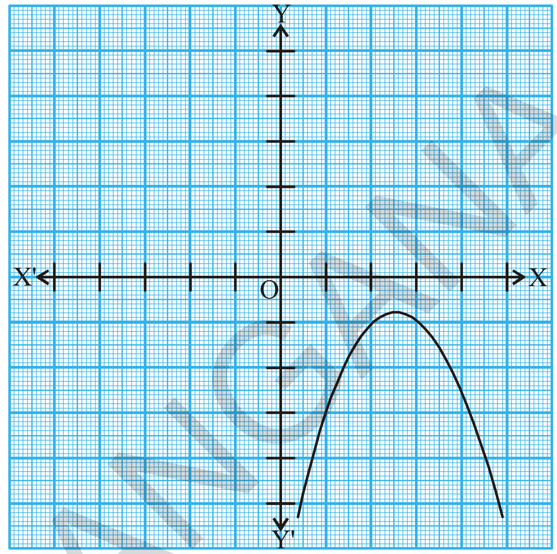
(ii)

இந்நிலையில் $ax^2 + bx + c$ எனும் இருபடிக் கோவைக்கு Aன் x அச்சுதூரம் ஒரேஒரு பூஜ்ஜியம் ஆகிறது.

வகை (iii) : இங்கு வரைபடம் முழுவதும் x அச்சுக்கு மேலாகவோ அல்லது x அச்சுக்கு கீழாகவோ x-அச்சை வெட்டாமல் உள்ளது.



(i)



(ii)

எனவே, இவ்வகை இருபடி கோவை $ax^2 + bx + c$க்கு பூஜ்ஜியங்கள் இல்லை.

மேற்காணும் மூன்று வடிவியல் சூழ்நிலைகளில் நாம் அறிவது ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு இரண்டு வெவ்வேறான பூஜ்ஜியங்கள் அல்லது இரு சமமான பூஜ்ஜியங்கள் (அதாவது ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம்) அல்லது பூஜ்ஜியங்கள் இல்லாமல் இருக்கலாம் என காண்போம். இதன் கருத்து என்னவெனில் படி2 கொண்ட ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு அதிகபட்சம் இரண்டு பூஜ்ஜியங்கள் இருக்கும்.

முயற்சி செய்

1. இரண்டு பூஜ்ஜியங்களை கொண்ட மூன்று இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எழுது.
2. ஒரு பூஜ்ஜியத்தைக் கொண்ட ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையை எழுது.
3. ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம் மட்டுமே இருக்கும் என எவ்வாறு நிரூபிப்பாய்?
4. மெய்யெண்களை பூஜ்ஜியங்களாக பெற்றிராத, xயை மாறியாகக் கொண்ட ஏதேனும் மூன்று பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எழுது.

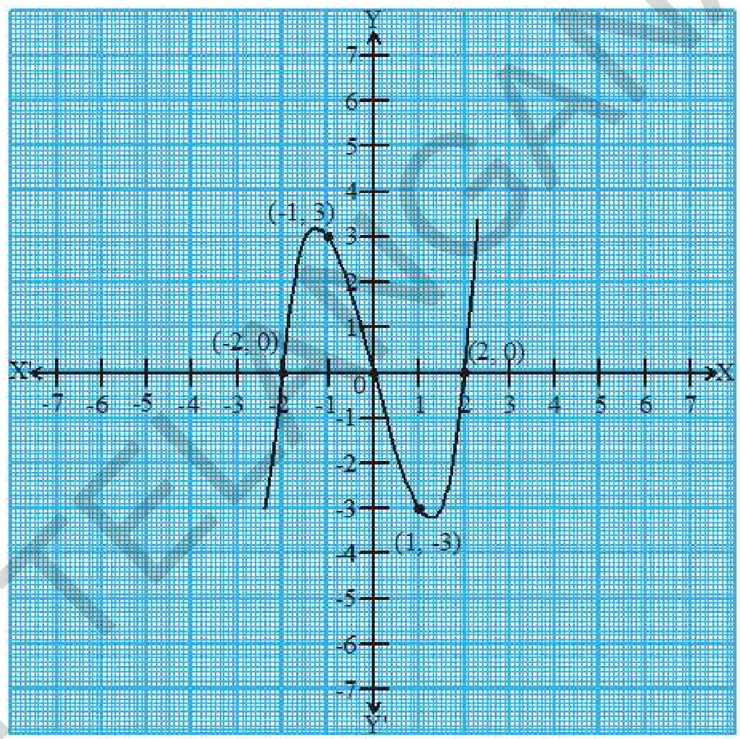
3.4.3 முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களின் வடிவியல் கோட்பாடு

முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களின் வடிவியல் முறையில் புரிந்துகொள்ள நீ எதிர்பார்ப்பது என்ன? ஒரு முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை $x^3 - 4x$யை எடுத்துக் கொள்வோம். $y = x^3 - 4x$ ன் வரைபடம் எவ்வாறு இருக்கும் என்பதைப் பார்க்க. அட்டவணை 3.3 ல் உள்ளவாறு xக்கு சில மதிப்புகளைக் கொடுத்து அதற்கு ஒத்த yன் மதிப்புகளைக் காண்போம்.

அட்டவணை 3.3

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0
(x, y)	$(-2, 0)$	$(-1, 3)$	$(0, 0)$	$(1, -3)$	$(2, 0)$

$y = x^3 - 4x$ ன் வரைபடம் படத்திலுள்ள வரைபடத்தை போன்றே இருக்கும். படத்தில் அட்டவணையை நாம் கவனித்தால் $x^3 - 4x$ எனும் முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு -2, 0 மேலும் 2என்பவை பூஜ்ஜியங்கள் என அறியலாம். அதாவது $y = x^3 - 4x$ எனும் வரைபடம் x-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் xஅச்சு தூரங்கள் -2, 0 மற்றும் 2 ஆகும். எனவே முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு மூன்று பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளது எனலாம்.



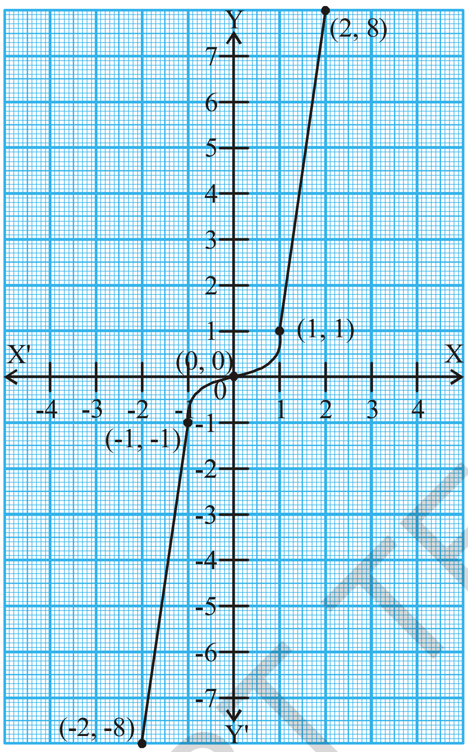
மேலும் சில உதாரணங்களை கவனிப்போம். முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் x^3 மேலும் $x^3 - x^2$ ஆகியவற்றை எடுத்துக்கொள்வோம். அட்டவணை 3.4 மேலும் 3.5ஐ கவனி.

அட்டவணை 3.4

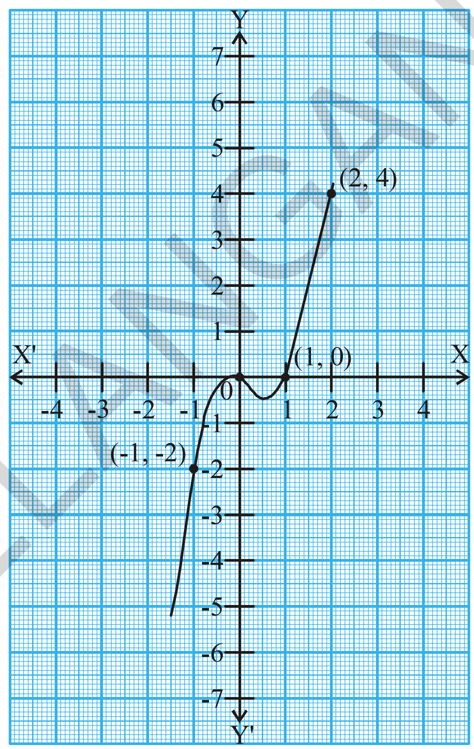
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	-8	-1	0	1	8
(x, y)	$(-2, -8)$	$(-1, -1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 8)$

அட்டவணை **3.5**

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - x^2$	-12	-2	0	0	4
(x, y)	$(-2, -12)$	$(-1, -2)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 4)$



$y = x^3$



$y = x^3 - x^2$

$y = x^3$ வரைபடத்தை கவனித்தால் அது x அச்சை ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகிறது மேலும் இப்புள்ளியின் x அச்சுதூரம் பூஜ்ஜியம். எனவே இந்த பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியத்தை பெற்றுள்ளது. இவ்வாறு $y = x^3 - x$ வரைபடத்தை கவனித்தால் அது x அச்சை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது மேலும் இப்புள்ளிகளின் x அச்சு தூரங்கள் 0 மேலும் 1 ஆகும். எனவே இது இரண்டு பூஜ்ஜியங்களைப் பெற்றுள்ளன.

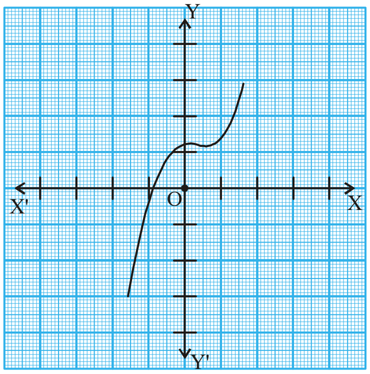
மேற்காணும் உதாரணங்கள் மூலம் ஒரு முப்படிக் கோவைக்கு அதிகபட்சமாக மூன்று பூஜ்ஜியங்கள் இருக்கும் என அறியலாம்.

முயற்சி செய்

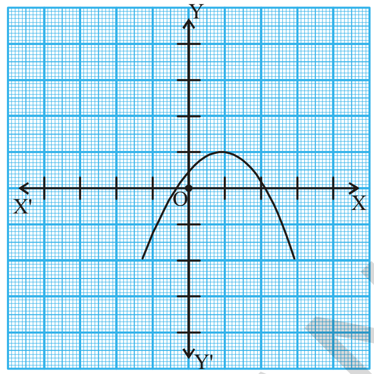
வரைபடங்கள் வரையாமலேயே கீழ்காணும் முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களைக் கண்டுபிடி. (i) $-x^3$ (ii) $x^2 - x^3$ (iii) $x^3 - 5x^2 + 6x$

குறிப்பு : பொதுவாக n படி கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$க்கு $y = p(x)$ என்ற வரைபடம் x அச்சை அதிகபட்சமாக n புள்ளிகளில் வெட்டும் என கூறலாம். எனவே nஐ படியாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$க்கு அதிகபட்சமாக n பூஜ்ஜியங்கள் இருக்கும்.

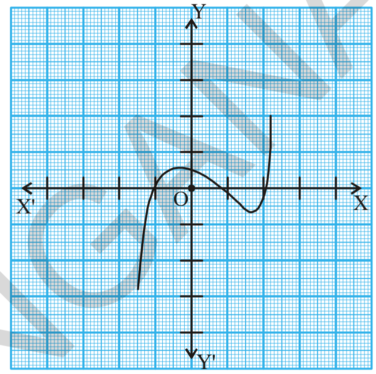
எடுத்துக்காட்டு -1: கீழ் கொடுக்கப்பட்ட வரைபடங்களை கவனி. ஒவ்வொன்றும் $y = p(x)$ன் வரைபடம் ஆகும். இங்கு $p(x)$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும். ஒவ்வொரு வரைபடத்திலிருந்து $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடியுங்கள்.



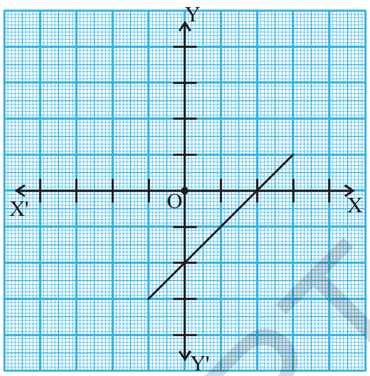
(i)



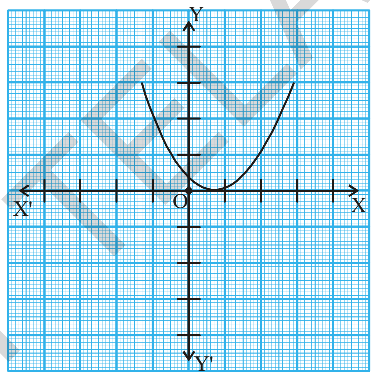
(ii)



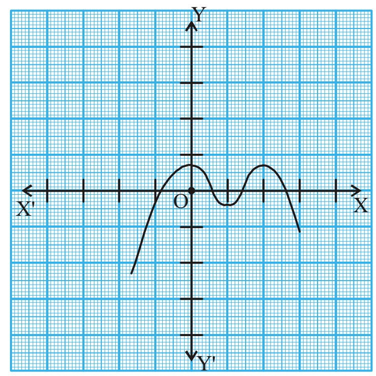
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

தீர்வு : மேற்காணும் படங்களில் x ஐ வீச்சாக கொண்ட வரைபடங்கள்

(i) வரைபடம் x-அச்சை ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகிறது எனவே பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கை 1.

(ii) வரைபடம் x அச்சை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது எனவே பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கை 2.

(iii) பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கை 3 (ஏன்?)

(iv) பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கை 1 (ஏன்?)

(v) பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கை 1 (ஏன்?)

(vi) பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கை 4 (ஏன்?)

எடுத்துக்காட்டு-2. கீழ்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கையையும் மற்றும் அவற்றின் மதிப்புகளையும் கண்டுபிடி?

(i) $p(x) = 2x + 1$ (ii) $q(y) = y^2 - 1$ (iii) $r(z) = z^3$

தீர்வு : வரைபடங்களை வரையாமலேயே கண்டறிவோம்.

(i) $p(x) = 2x + 1$ இது ஒரு நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை. இதற்கு ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம் உண்டு. பூஜ்ஜியங்களைக் காண,

$p(x) = 0$ என்க.

எனவே, $2x+1=0$

$$\therefore x = \frac{-1}{2}$$

எனவே $2x+1$ ன் பூஜ்ஜியம் $\frac{-1}{2}$.

(ii) $q(y) = y^2 - 1$. இது ஓர் இருபடி பல்லுறுப்பு கோவை. இதற்கு அதிகபட்சமாக இரண்டு பூஜ்ஜியங்கள் உண்டு.

பூஜ்ஜியங்களை கண்டறிய $q(y) = 0$

$\Rightarrow y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (y + 1)(y - 1) = 0$

$\Rightarrow y = -1$ அல்லது $y = 1$

எனவே, பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் -1 மேலும் 1.

(iii) $r(z) = z^3$ என்பது ஒரு முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை. இதற்கு அதிகபட்சமாக மூன்று பூஜ்ஜியங்கள் உண்டு.

$r(z) = 0$ என்க.

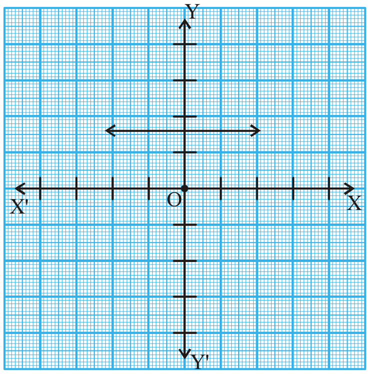
$\Rightarrow z^3 = 0$

$\Rightarrow z = 0$

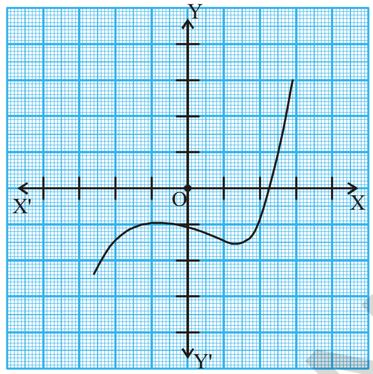
எனவே, பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் 0.

பயிற்சி – 3.2

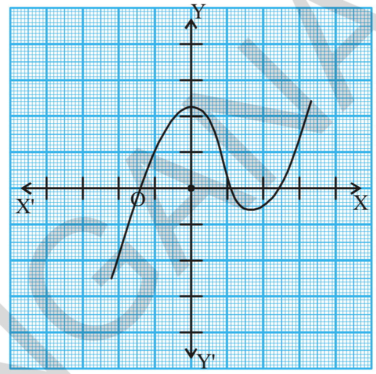
1. சில பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $p(x)$க்கு $y=p(x)$ன் பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி.



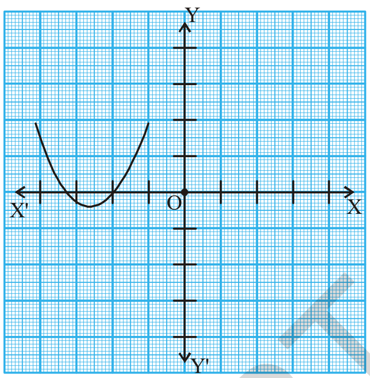
(i)



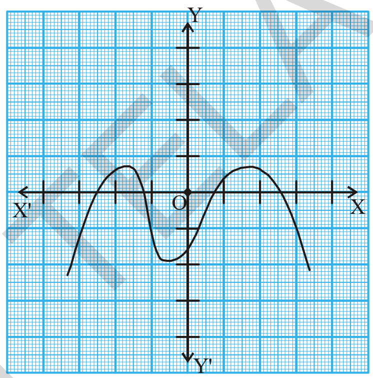
(ii)



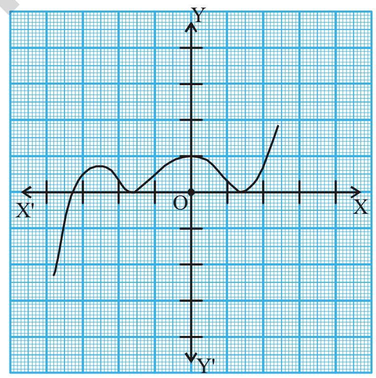
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

2. கீழே கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களைக் கண்டுபிடி.

(i) $p(x) = 3x$ (ii) $p(x) = x^2 + 5x + 6$

(iii) $p(x) = (x+2)(x+3)$ (iv) $p(x) = x^4 - 16$

3. கீழ்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வரைபடங்களை வரைந்து பூஜ்ஜியங்களை கண்டுபிடி. விடைகளை சரிபார்.

(i) $p(x) = x^2 - x - 12$ (ii) $p(x) = x^2 - 6x + 9$

(iii) $p(x) = x^2 - 4x + 5$ (iv) $p(x) = x^2 + 3x - 4$

(v) $p(x) = x^2 - 1$

4. $p(x) = 4x^2 + 3x - 1$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $\frac{1}{4}$ மேலும் -1 பூஜ்ஜியங்கள். எவ்வாறு என்று கூறுங்கள்?

3.5 பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுக்களுக்கும், பூஜ்ஜியங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு

$ax + b$ எனும் நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் $-\frac{b}{a}$ என நமக்குத் தெரியும். இப்போது நாம் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கும், பூஜ்ஜியங்களுக்கும் இடையேயான தொடர்பை அறிய முயற்சிப்போம். இதற்காக ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

ஒன்பதாம் வகுப்பில் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையை அதன் நடுஉறுப்பை பிரித்தல் முறையில் காரணிபடுத்தும் முறையை கற்றீர்கள். நமக்கு கொடுக்கப்பட்ட கோவையில் நடுஉறுப்பு '$-8x$'ஐ இரண்டு உறுப்புகளின் கூடுதலாக பிரிப்போம். அதன்பெருக்கற்பலன் $6 \times 2x^2 = 12\, x^2$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 6 &= 2x^2 - 6x - 2x + 6 \\ &= 2x(x-3) - 2(x-3) \\ &= (2x-2)(x-3) = 2(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$x - 1 = 0$ அல்லது $x - 3 = 0$ எனும் போது $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ பூஜ்ஜியமாகிறது. எனவே $2x^2 - 8x + 6$ன் பூஜ்ஜியங்கள் 1 மேலும் 3 ஆகும். இப்போது இந்த பூஜ்ஜியங்களுக்கும் இந்த கோவையின் கெழுக்களுக்கும் உள்ள தொடர்பைக் கண்டறிவோம். இங்கு x^2 ன் கெழு 2. xன் கெழு -8, மேலும் மாறிலி உறுப்பு 6 அதாவது x^0ன் கெழு $(6x^0 = 6)$

இங்கு பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம் $= 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x\text{ன் கெழு})}{x^2\text{ன் கெழு}}$

பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன் $= 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{ன் கெழு}}$

நாம் இப்போது மற்றொரு இருபடிக் கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$p(x) = 3x^2 + 5x - 2.$

நடுஉறுப்பை பிரித்து எழுத

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x+2) - 1(x+2) \\ &= (3x-1)(x+2) \end{aligned}$$

$3x - 1 = 0$ அல்லது $x + 2 = 0$ எனும்போது $3x^2 + 5x - 2$ பூஜ்ஜியமாகிறது. அதாவது $x = \frac{1}{3}$ அல்லது $x = -2$ ஆகும்போது.

ஆதலால் $3x^2 + 5x - 2$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் $\frac{1}{3}$ மேலும் -2ஆகும். இதிலிருந்து நாம் பின்வரும் தொடர்பை காணலாம்.

பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம் $= \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x\text{ன் கெழு})}{x^2\text{ன் கெழு}}$

பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன் $= \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{ன் கெழு}}$

இதை செய்

கீழே கொடுக்கப்பட்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களை கண்டுபிடி. மேலும் பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம், பெருக்கற்பலனை கண்டறிந்து இவைகளுக்கும், கெழுக்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை சரிபார்.

(i) $p(x) = x^2 - x - 6$ (ii) $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(iii) $p(x) = x^2 - 4$ (iv) $p(x) = x^2 + 2x + 1$

$p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் α மேலும் β எனில் $(x - \alpha)$ மேலும் $(x - \beta)$ ஆகியவை $p(x)$ன் காரணிகள் ஆகும்.

எனவே $ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta)$, k ஒரு மாறிலி

$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

$$= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$$

இதை $p(x)$ன் x^2, x கெழுக்களுடனும் மற்றும் மாறிலி உறுப்புடன் ஒப்பிட

$a = k,\ b = -k(\alpha+\beta)$ மேலும் $c = k\alpha\beta$ கிடைக்கும்.

இதிலிருந்து $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$,

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$ என கிடைக்கிறது.

<u>**குறிப்பு**</u> : α மேலும் β என்பவை கிரேக்க எழுத்துகள். இவைகளை ஆல்பா(*Alfa*) 'α' மேலும் பீட்டா (*lBeta*) 'β' என படிக்கிறோம். இவ்வாறே மற்றொரு எழுத்து (*Gamma*) 'γ' வை கூட பயன்படுத்துகிறோம். இதை காமா எனப் படிக்கிறோம்.

எனவே ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம்

$$= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(x\text{ன் கெழு})}{x^2\text{ன் கெழு}}$$

ஓர் இருபடி பல்லுறுப்பு கோவையின் பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கல் பலன்

$$= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{ன் கெழு}}$$

கீழ் வரும் உதாரணங்களை கவனி.

எடுத்துக்காட்டு-3. $x^2 + 7x + 10$ எனும் இருபடிக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களைக் கண்டறிந்து பூஜ்ஜியங்களுக்கும், கெழுக்களுக்கும் உள்ள தொடர்பை சரிபார்.

தீர்வு : $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$ ஆகும்.

எனவே $x + 2 = 0$ அல்லது $x + 5 = 0$ எனும்போது $x^2 + 7x + 10$ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகிறது.

அதாவது, $x = -2$ அல்லது $x = -5$.

எனவே, $x^2 + 7x + 10$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் -2 மேலும் -5.

இப்போது பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம் $= -2+(-5) = -(7) = \dfrac{-(7)}{1} = \dfrac{-(x\text{ன் கெழு})}{x^2\text{ன் கெழு}}$

பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்யபலன் $= -2 \times (-5) = 10 = \dfrac{10}{1} = \dfrac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{ன் கெழு}}$

எடுத்துக்காட்டு-4. $x^2 - 3$ ன் பூஜ்ஜியங்களை கண்டறிந்து பூஜ்ஜியங்களுக்கும், கெழுக்களுக்கும் உள்ள தொடர்பை சரிபார்.

தீர்வு : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ எனும் முற்றொருமையை நினைவுபடுத்திக்கொள்ளுங்கள். இதை பயன்படுத்த,

$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ என எழுதலாம்.

எனவே, $x = \sqrt{3}$ அல்லது $x = -\sqrt{3}$ எனும் போது $x^2 - 3$ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகிறது.

எனவே, $x^2 - 3$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம் $= \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0 = \dfrac{-(x\text{ன் கெழு})}{x^2\text{ன் கெழு}}$

பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன் $= (\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = -3 = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{ன் கெழு}}$

எடுத்துக்காட்டு-5. ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம் மேலும் பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன் முறையே -3 மேலும் 2 எனில் கோவையைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு: பல்லுறுப்புக் கோவை $ax^2 + bx + c$ என்க.

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a} \text{ மேலும்}$$

$$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}.$$

நாம் $a = 1$எனக் கொண்டால் $b = 3$ மேலும் $c = 2$ ஆகும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு நமக்குத் தேவையான இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 + 3x + 2$ ஆகும்.

இவ்வாறே, 'a' ஒரு மெய்யெண் $a = k$ என்க. $\frac{-b}{k} = -3$ அல்லது $b = 3k$ மேலும் $\frac{c}{k} = 2$ அல்லது $c = 2k$ ஆகும். இந்த மதிப்புகளை பிரதியிட நமக்கு $kx^2 + 3kx + 2k$ எனும் கோவை கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு-6. ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் முறையே 2 மேலும் $\frac{-1}{3}$ எனில் அந்த இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையை கண்டுபிடி.

தீர்வு : α, βகளை பூஜ்ஜியங்களாக கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை

$ax^2 + bx + c, a \neq 0$ என்க.

இங்கு $\alpha = 2, \beta = \frac{-1}{3}$

பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம் $= (\alpha + \beta) = 2 + (\frac{-1}{3}) = \frac{5}{3}$

பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன் $= (\alpha\beta) = 2\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-2}{3}$

எனவே $ax^2 + bx + c$ என்பது $k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta]$, k ஒரு மாறிலி ஆகும்.

அதாவது $k[x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}]$ ஆகும்.

மெய்யெண் kக்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளைக் கொடுக்கலாம்.

$k = 3$ எனில் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $3x^2 - 5x - 2$ ஆகும்.

முயற்சி செய்

(i) -2 மேலும் $\frac{1}{3}$ ஐ பூஜ்ஜியங்களாகக் கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையை கண்டுபிடி.

(ii) பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம் $\frac{-3}{2}$ மேலும் பெருக்கற்பலன் -1 உடைய இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையை கண்டுபிடி.

3.6 முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

நாம் இப்போது முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகளை கவனிப்போம். முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களுக்கும், அவற்றின் உறுப்புகளின் கெழுக்களுக்கும் ஏதேனும் தொடர்புள்ளதா எனப்பார்ப்போம்.

$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$x = 4, -2, \frac{1}{2}$ மதிப்புகளுக்கு $p(x) = 0$ ஆகிறது.

$p(x)$க்கு அதிகபட்சமாக மூன்று பூஜ்ஜியங்கள் இருக்கும் என நமக்குத் தெரியும்.

எனவே $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ன் பூஜ்ஜியங்கள் $4, -2,$ மேலும் $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம் $= 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2\text{ன் கெழு})}{x^3\text{ன் கெழு}}$

பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கல்பலன் $= 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^3\text{ன் கெழு}}$

இதனுடன் மற்றொரு சிறப்பு தொடர்பும் இங்கு நாம் காணலாம். பூஜ்ஜியங்களை இரண்டு இரண்டாக எடுத்துக்கொண்டு அவற்றின் பெருக்கற்பலனின் மொத்தத்தை காணும்போது நமக்கு புதிய தொடர்பு கிடைக்கிறது அதாவது.

$$=\{4 \text{ X } (-2)\}+\{(-2)\text{X}\frac{1}{2}\}+(\frac{1}{2}\text{X } 4\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{(x\text{ன் கெழு})}{x^3\text{ன் கெழு}}$$

பொதுவாக, $ax^3 + bx^2 + cx + d$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் α, β, γ எனில்

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}.$$

$ax^3 + bx^2 + cx + d$ எனும் முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் α, β, γ என்க. மேலும் இவைகள் கெழுக்களான a,b,c உடன் எவ்வாறு தொடர்புக் கொண்டுள்ளது எனபார்ப்போம். α, β, γ ஆகியவை பூஜ்ஜியங்கள். ஆதலால் பல்லுறுப்பு கோவையை

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$= x^3 - x^2(\alpha+\beta+\gamma) + x(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - \alpha\beta\gamma$$

என எழுதலாம். இதை முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையுடன் ஒப்பிட வேண்டுமானால் இதை 'a' ஆல் பெருக்கவேண்டும்.

அப்போது $ax^3 - x^2 a(\alpha+\beta+\gamma) + xa(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - a\alpha\beta\gamma$.

அல்லது

$b = -a(\alpha+\beta+\gamma), c = a(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma), d = -a\alpha\beta\gamma$ என கிடைக்கும்.

இதை செய்

ஒரு முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் முறையே α, β, γ எனில் கீழ்வரும் அட்டவணையை நிரப்பு.

வ.எண்	முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை	$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha\beta+\beta\alpha+\gamma\alpha$	$\alpha\beta\gamma$
1	x^3+3x^2-x-2			
2	$4x^3+8x^2-6x-2$			
3	x^3+4x^2-5x-2			
4	x^3+5x^2+4			

கீழ்காணும் உதாரணத்தைக் கவனிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-7. $3, -1$ மேலும் $-\frac{1}{3}$ ஆகியவை $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ என்ற முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களா? என சரிபார். மேலும் பூஜ்ஜியங்களுக்கும், கெழுக்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை சரிபார்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை $ax^3 + bx^2 + cx + d$ உடன் ஒப்பிடு

$a = 3,\ b = -5,\ c = -11,\ d = -3$ ஆகும்.

இதிலிருந்து $p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0,$$

$$p\left(\frac{-1}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{-1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(\frac{-1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

$3, -1,$ மேலும் $-\frac{1}{3}$ ஆகியவை $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ன் பூஜ்ஜியங்கள் ஆகும்.

இப்போது $\alpha = 3,\ \beta = -1$ மேலும் $\gamma = -\frac{1}{3}$ எனக்கொண்டால்

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(\frac{-1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(\frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(\frac{-1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}$$

பயிற்சி – 3.3

1. கீழ்வரும் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களை கண்டறிந்து பூஜ்ஜியங்களுக்கும், கெழுக்களுக்கும் உள்ள தொடர்பை சரிபார்.

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. சில இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம் மேலும் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு வகையிலும் அதற்கான இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையை கண்டுபிடி.

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

3. ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் α, β கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொருவகையிலும் அதன் பல்லுறுப்புக் கோவையை கண்டுபிடி.

(i) $2, -1$ (ii) $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ (iii) $\frac{1}{4}, -1$ (iv) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

4. $x^3 + 3x^2 - x - 3$ எனும் முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $1, -1$ மேலும் -3 பூஜ்ஜியங்களாகுமா என சரிபார். மேலும் முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் கெழுக்களுக்கும், பூஜ்ஜியங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் கண்டுபிடி.

3.7 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல் கோட்பாடு

ஒரு முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு அதிகபட்சமாக மூன்று பூஜ்ஜியங்கள் இருக்குமென நாம் அறிவோம். ஒரு வேளை நமக்கு ஒரு பூஜ்ஜியம் மட்டுமே கொடுக்கப்படும்போது மீதமுள்ள பூஜ்ஜியங்களை எவ்வாறு கண்டறியலாம்? இதற்காக நாம் ஒரு முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை $x^3 + 3x^2 - x - 3$ எடுத்துக்கொள்வோம். இந்த பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு பூஜ்ஜியம் 1 எனில் இப்பல்லுறுப்புக் கோவை $x - 1$ஆல் மீதியின்றி வகுபடும் என அறிவோம். கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை $x - 1$ ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் ஈவு $x^2 - 2x - 3$ஆகும். இதன் நடுஉறுப்பை பிரிப்பதன் மூலம் இதன் காரணிகளை கண்டறியலாம். அவ்வாறு செய்யும்போது $x + 1$ மேலும் $x - 3$ காரணிகள் ஆகும்.

எனவே

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$$
$$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$$

முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூன்று பூஜ்ஜியங்கள், $1, -1,$ மேலும் 3 ஆகும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் எவ்வாறு வகுக்கலாம் என்பதை நாம் பார்க்கலாம். படிகளை செய்வதற்கு முன் ஒரு எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம்.

.

எடுத்துக்காட்டு-8. $2x^2 + 3x + 1$ ஐ $x + 2$ ஆல் வகு.

தீர்வு : வகுத்தல் செய்யும் போது மீதி பூஜ்ஜியமாகவோ அல்லது மீதியின் படி வகுக்கும் கோவையின் படியைவிட குறைவாக இருந்தாலோ வகுத்தல் முடிவுற்றது என அறிந்துகொள்ள வேண்டும். எனவே இங்கு ஈவு $2x - 1$ மேலும் மீதி 3. வகுத்தல் விதியை சரிபார்ப்போம்.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x-1 \\ \hline x+2 & \quad 2x^2+3x+1 \\ & \quad 2x^2+4x \\ & \quad - \quad - \\ \hline & \qquad -x+1 \\ & \qquad -x-2 \\ & \qquad + \quad + \\ \hline & \qquad\qquad 3 \end{array}$$

$$(2x - 1)\,(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$$

அதாவது, $2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)\,(2x - 1) + 3$ எனவே

வகுபடும் கோவை $=$ (வகுக்கும் கோவை $\times$ ஈவு) $+$ மீதி

இதே முறையை நாம் ஓர் பல்லுறுப்புக் கோவையை ஓர் இருபடிக் கோவையால் வகுப்பதற்கு பயன்படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டு-9. $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ஐ $1 + 2x + x^2$ஆல் வகு.

தீர்வு : முதலில் வகுபடும் கோவையின் உறுப்புகளையும் வகுக்கும் கோவையின் உறுப்புகளையும், அவற்றின் படிகளை பொறுத்து இறங்குவரிசையில் எழுதுவோம். இதை நாம் திட்டவடிவம் என்கிறோம். வகுக்கும் கோவை $x^2 + 2x + 1$ எனும் திட்டவடிவில் எழுதிக்கொள்வோம். இங்கு வகுபடும் கோவை திட்ட வடிவிலேயே உள்ளது.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 3x-5 \\ \hline x^2+2x+1 & \quad 3x^3+x^2+2x+5 \\ & \quad 3x^3+6x^2+3x \\ & \quad - \qquad - \qquad - \\ \hline & \qquad -5x^2-x+5 \\ & \qquad -5x^2-10x-5 \\ & \qquad + \qquad + \qquad + \\ \hline & \qquad\qquad 9x+10 \end{array}$$

படி 1: ஈவில் முதல் உறுப்பைபெற வகுபடும் கோவையின் உயர்அடுக்கு உறுப்பை (அதாவது $3x^3$) வகுக்கும் கோவையின் உயர் அடுக்கு உறுப்பால் (அதாவது x^2) வகுப்போம். நமக்கு இப்போது $3x$கிடைக்கும். இம்முறையில் வகுத்தலை தொடர்ந்தால் நமக்கு $-5x^2 - x + 5$மீதியாக கிடைக்கும்.

படி 2 : இப்போது ஈவில் இரண்டாம் உறுப்பை பெற புதிய வகுபடும் கோவையின் $-5x^2 - x + 5$ உயர் அடுக்கு உறுப்பை $(-5x^2)$ வகுக்கும் கோவையின் உயர் அடுக்கு உறுப்பு (x^2)ஆல்வகுத்தால் மீதி-5 கிடைக்கும். $-5x^2 - x + 5$க் கொண்டு வகுத்தல் தொடரு.

படி 3: மீதி $9x + 10$ ஆகும். $9x + 10$ன் படி வகுக்கும் கோவை $x^2 + 2x + 1$ன் படியை விட குறைவு. எனவே நிபந்தனையின்படி வகுத்தலை தொடர முடியாது.

எனவே, ஈவு $3x - 5$ மீதி $9x + 10$ மேலும்

$$(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) = (3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10)$$

$$= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$$

மீண்டும் நாம் அறிவது

வகுபடும் கோவை $=$ (வகுக்கும் கோவை $\times$ ஈவு) $+$ மீதி.

இங்கு நாம் யூக்ளிடின் வகுத்தல் படி முறையை பயன்படுத்துகிறோம். இதன்படி $p(x)$ மேலும் $g(x)$ என்பவை ஏதேனும் இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் மேலும் $g(x) \neq 0$, எனும் போது,

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$, என்றவாறு $q(x)$ மேலும் $r(x)$ எனும் இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காணமுடியும்.

இங்கு $r(x) \neq 0$ எனும் போது மட்டும் $r(x) = 0$ அல்லது $r(x)$ன்படி $<$ $g(x)$ ன்படி, இது பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல் கோட்பாடு எனப்படுகிறது. இப்போது கலந்துரையாடலின் மூலம் கீழ்காணும் முடிவுகளை நாம் பெறலாம்.

(i) $q(x)$ ஒரு நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் $r(x) = r$ என்பது ஒரு மாறிலி.

(ii) $q(x) = 1$ன்படி 1 எனில் $p(x)$ன் படி $= 1 + g(x)$ன்படி.

(iii) $p(x)$ யை $(x - a)$ ஆல் வகுக்க மீதி $p(a)$.

(iv) $r = 0$ எனில் $p(x)$ ஐ $q(x)$ மீதியின்றி வகுக்கும் அல்லது $q(x)$ என்பது $p(x)$ன் காரணி எனக்கூறலாம்.

மேற்காணும் வகுத்தல் கோட்பாடுகளை கீழ்காணும் உதாரணம் மூலம் சரிபார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-10. $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ ஐ $x - 1 - x^2$ ஆல் வகுத்து வகுத்தல் கோட்பாட்டை சரிபார்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள் திட்ட வடிவில் இல்லை. வகுத்தலை தொடரும் முன்னர் வகுபடும் கோவையையும், வகுக்கும் கோவையையும் அவைகளின் உறுப்புகளின் படிகளை பொறுத்து இறங்குவரிசையில் எழுதவேண்டும்.

எனவே, வகுபடும் கோவை $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ மேலும்

வகுக்கும் கோவை $= -x^2 + x - 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x - 2 \\
\hline
-x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\
 & -x^3 + x^2 - x \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & \quad 2x^2 - 2x + 5 \\
 & \quad 2x^2 - 2x + 2 \\
 & \quad - \quad + \quad - \\
\hline
 & \quad\quad 3
\end{array}
$$

வகுத்தல் செயல் வலப்பக்கம் காட்டப்பட்டுள்ளது. மீதி கோவையின் படி வகுக்கும் கோவையின் படியை விட குறைவாக உள்ள நிலையில் வகுத்தலை நிறுத்திவிடலாம்.

எனவே, ஈவு $= x - 2$, மீதி $= 3$. இப்போது,

வகுபடும் கோவை $=$ (வகுக்கும் கோவை $\times$ ஈவு) $+$ மீதி.

$$= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$$

$$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$$

$$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$$

இவ்வாறாக வகுத்தல் கோட்பாடு சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு-11. $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $\sqrt{2}$ மேலும் $-\sqrt{2}$ ஆகியவை இரண்டு பூஜ்ஜியங்கள் எனில் மீதமுள்ள பூஜ்ஜியங்களை கண்டுபிடி.

தீர்வு : $\sqrt{2}$ மேலும் $-\sqrt{2}$ என்பவைகள் கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவையின் இரண்டு பூஜ்ஜியங்கள். எனவே இந்த பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x-\sqrt{2})\,(x+\sqrt{2}) = x^2 - 2$ஆல் வகுக்கலாம்.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\hline
x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & 2x^4 \qquad\quad - 4x^2 \\
 & - \qquad\qquad + \\
\hline
 & \quad - 3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & \quad - 3x^3 \qquad\quad + 6x \\
 & \quad + \qquad\qquad - \\
\hline
 & \qquad\qquad x^2 - 2 \\
 & \qquad\qquad x^2 - 2 \\
 & \qquad\qquad - \quad + \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

ஈவில் முதல் உறுப்பு $= \dfrac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

ஈவில் இரண்டாம் உறுப்பு $= \dfrac{-3x^3}{x^2} = -3x$

ஈவில் மூன்றாம் உறுப்பு $= \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

எனவே, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)\,(2x^2 - 3x + 1)$.

இப்போது, $2x^2 - 3x + 1$ன் நடுஉறுப்பை பிரிப்பதன் மூலம் இதை காரணிப்படுத்தலாம். அவ்வாறு செய்ய நமக்கு $(2x - 1)\,(x - 1)$ கிடைத்தது. எனவே மீதமுள்ள இரண்டு பூஜ்ஜியங்கள் $x = \dfrac{1}{2}$ மேலும் $x = 1$ ஆகும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்கள் $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1$ மேலும் $\dfrac{1}{2}$ ஆகும்

பயிற்சி – 3.4

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு $p(x)$ பல்லுறுப்புக் கோவையை $g(x)$ பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுத்து ஈவையும் மீதியையும் கண்டுபிடி.

   (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

   (ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6, g(x) = 2 - x^2$

2. கீழ்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் இரண்டாம் பல்லுறுப்புக் கோவையை முதலாம் பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுத்து, ஒவ்வொரு வகையிலும் முதலாம் பல்லுறுப்புக் கோவை இரண்டாம் கோவைக்கு காரணி ஆகுமா? சரிபார்.

(i) $t^2 - 3, 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

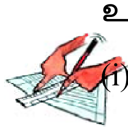
(ii) $x^2 + 3x + 1, 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1, x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் $\sqrt{\frac{5}{3}}$ மேலும் $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ எனில் மீதமுள்ள இரண்டு பூஜ்ஜியங்களை கண்டுபிடி.

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையை $g(x)$எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க ஈவு $x - 2$ மேலும் மீதி $-2x + 4$ எனில் $g(x)$ ஐ கண்டுபிடி.

5. வகுத்தல் கோட்பாட்டையும் மேலும் கீழ்காணும் நிபந்தனைகளை உண்மையாக்கும் விதமாக $p(x), g(x), q(x)$ மேலும் $r(x)$ பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு உதாரணங்களைக்கொடு.



(i) $p(x)$ன் படி $= q(x)$ன் படி (ii) $q(x)$ன் படி $= r(x)$ன் படி (iii) $r(x)$ன் படி $= 0$

விருப்பப் பயிற்சி (தேர்வுக்குரிய வினாக்கள் அல்ல)

1. கீழ்காணும் முப்படி பல்லுப்புக் கோவைகளின் அருகில் கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் அந்த முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு பூஜ்ஜியங்களா? இல்லையா? என சரிபார். மேலும் இதுபோலவே இவைகளின் கெழுக்களுக்கும், பூஜ்ஜியங்களுக்கும் இடையேயான தொடர்பையும் கண்டறியுங்கள்.

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2$; $(\frac{1}{2}, 1, -2)$ (ii) $x^3 + 4x^2 + 5x - 2$; $(1, 1, 1)$

2. ஒரு முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களின் மொத்தம், இரண்டு இரண்டாக பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன் மொத்தம் மேலும் பூஜ்ஜியங்களின் பெருக்கற்பலன் முறையே $2, -7, -14$ எனில் அந்த பல்லுறுப்புக் கோவையை கண்டுபிடி.

3. $x^3 - 3x^2 + x + 1$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் $a - b, a, a + b$ எனில் a, b மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி?

4. $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ ன் இரண்டு பூஜ்ஜியங்கள் $2 \pm \sqrt{3}$ எனில் மீதமுள்ள இரண்டு பூஜ்ஜியங்களைக் கண்டுபிடி.

5. $x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 25x + 10$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையை $x^2 - 2x + k$ ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதி $x + a$ எனில் k மேலும் a மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

செயல்திட்டம்

இருபடிபல்லுறுப்புக்கோவை - பூஜ்ஜியங்கள் - வடிவியல் பொருள்/வரைபடங்கள்

- $ax^2 + bx + c$ எனும் இருபடிபல்லுறுப்புக் கோவைக்கு வரைபடங்களை வரைதல்

  (i) $a > 0$ (ii) $a < 0$ (iii) $a = 0$ (iv) $b > 0$ (v) $b < 0$

  (vi) $b = 0$ வரைபடங்களை குறித்து உன் கருத்து என்ன?

நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் கீழ்வரும் கருத்துகளைக் கற்றோம்.

1. ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் படிகள் முறையே 1,2 மேலும் 3 எனில் அவற்றை நேரிய, வர்க்க, முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்கிறோம்.
2. x ஐ மாறியாகவும் மெய்யெண்களை கெழுக்களாகவும் கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $ax^2 + bx + c$ ஆகும். இங்கு a, b, c மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.
3. $p(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் அதன் வரைபடம் $y = p(x)$, x அச்சை வெட்டும் புள்ளியில் xன் அச்சுதூரங்கள் ஆகும்.
4. ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு அதிகபட்சமாக இரண்டு பூஜ்ஜியங்களும், முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு அதிகபட்சமாக மூன்று பூஜ்ஜியங்களும் இருக்கும்.
5. α மேலும் β கள் ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்கள் எனில் $ax^2 + bx + c, a \neq 0$, எனில்

   $$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

6. α, β, γ முறையே முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை $ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ ன் பூஜ்ஜியங்கள் எனில்

   $$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

   $$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

   மேலும் $\alpha\beta\gamma = \dfrac{-d}{a}$.

7. கொடுக்கப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ மற்றும் பூஜ்ஜிய மற்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $g(x)$க்கு $p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$, என்றவாறு $q(x)$ மற்றும் $r(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகள் இருக்கும்.

அத்தியாயம்

4 இரு மாறிகளில் ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள்

4.1 அறிமுகம்

சோமுவும் அவனது தந்தையும் ஒரு புத்தகக் கடைக்கு சென்றனர். அங்கு சோமு 3 நோட்டுபுத்தகங்களையும், 2 பேனாக்களையும் வாங்கினான். மொத்தப் பொருட்களுக்காக அவனது தந்தை D80 கொடுத்தார். சோமுவின் நண்பன் ராமு அந்த நோட்டுபுத்தகங்களையும், பேனாக்களையும் தானும் வாங்க விரும்பினான். ராமு 4 நோட்டுபுத்தகங்களையும், 3 பேனாக்களையும் D110 கொடுத்து வாங்கினான். அதே வகுப்பிலுள்ள இரவி பேனாவையும், குணா நோட்டுபுத்தகங்களையும் வாங்க விரும்பி ஒரு பேனாவின் விலையையும், ஒருநோட்டுபுத்தகத்தின் விலையையும் கேட்டனர். ஆனால் அவர்களுக்கு அதன் விலைகள் தெரியவில்லை. அவர்கள் அந்தப் பொருட்களின் விலைகளை எப்படி கண்டுபிடிப்பார்கள்?

இந்த உதாரணத்தில் ஒரு நோட்டுபுத்தகத்தின் விலையும், ஒரு பேனாவின் விலையும் நமக்கு தெரியாது. நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் இதுபோன்ற நிகழ்வுகள் பல ஏற்படுகின்றன.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

கீழே இரண்டு சூழ்நிலைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) ஒரு கிலோ உருளைகிழங்கு மேலும் இரண்டு கிலோ தக்காளியின் மொத்த விலை D30. இரண்டு நாட்கள் கழித்து 2கிலோ உருளைகிழங்கு மேலும் 4கிலோ தக்காளியின் மொத்த விலை D66.

(ii) சிந்தலப்பட்டடை உயர்நிலைப்பள்ளி உடற்கல்வி ஆசிரியர் 3 பேட் மற்றும் 6 பந்துகளை D3900க்கு வாங்கினார். பின்னர் மேலும் ஒரு பேட்டையும், இரண்டு பந்துகளையும் D1300க்கு வாங்கினார்.

மேலே உள்ள நிகழ்வுகளில் உள்ள தெரியாதவைகளை கண்டுபிடியுங்கள். ஒவ்வொரு நிகழ்வுகளிலும் தெரியாத இரண்டு அளவுகள் இருப்பதை நாம் கவனிக்கலாம்.

4.1.1 தெரியாத ராசிகளை நாம் எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்?

அறிமுகத்தில் சோமு 3 நோட்டுபுத்தகங்களையும், 2 பேனாக்களையும் D80க்கு வாங்கினான். ஒரு நோட்டுபுத்தகத்தின் விலை அல்லது ஒரு பேனாவின் விலையை நாம் எவ்வாறு கண்டறியலாம்? இரவியும், குணாவும் இவைகளின் விலைகளை கண்டறிய முயற்சித்தனர். இரவி ஒவ்வொரு நோட்டுபுத்தகத்தின் விலை D25ஆக இருக்கலாம் என கூறினான். அப்போது 3 புத்தகங்களின் விலை D75ம் , ஒவ்வொரு பேனாவின் விலை D2.50ஆக இருக்கலாம். குணா ஒரு பேனாவின் விலை D2.50 என்பது மிகக்குறைவானது எனவே ஒரு பேனாவின் விலை குறைந்தபட்சம் D16 ஆக இருக்கலாம் என நினைத்தான். அப்படியானால் ஒரு நோட்டுபுத்தகத்தின் விலை D16 ஆகும்.

மொத்தவிலை D80 ஆகும் படி நோட்டுபுத்தகம் ஒருபேனாவிற்கு பலசாத்தியமான மதிப்புகள் இருக்கும் என்பதை நாம் பார்க்கலாம். சோமு, ராமு இருவரும் அவைகள் ஒவ்வொன்றையும் வாங்கிய விலையை எவ்வாறு காண்பது? சோமு, ராமு இருவரின் சூழ்நிலையை பயன்படுத்தி விலையை காணலாம்.

4.1.2 இரண்டு சமன்பாடுகளை ஒன்றாக பயன்படுத்துதல்

ராமு கூட சோமு வாங்கிய அதே நோட்டுபுத்தகங்களையும், பேனாக்களையும் வாங்கினான். ராமு 4 நோட்டுபுத்தகங்களையும், 3 பேனாக்களையும் D110 செலுத்தி வாங்கினான்.

எனவே, நமக்கிருக்கும் இரண்டு நிகழ்வுகளையும் கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

(i) 3 நோட்டுபுத்தகங்கள் + 2 பேனாக்கள் = D80.

(ii) 4 நோட்டுபுத்தகங்கள் + 3 பேனாக்கள் = D110.

இவைகள் ஒரு நோட்டுபுத்தகம், ஒரு பேனாவின் விலையை கண்டறிய நமக்கு பயன்படுமா?

இரவி ஊகித்த விலையை சரிபார்ப்போம். இரவி ஒரு நோட்டுபுத்தகத்தின் விலை D25 எனவும் ஒரு பேனாவின் விலை D2.50 என ஊகித்தான். எனவே,

4 நோட்டுபுத்தகங்களின் விலை : $4 \times 25 =$ D100

3 பேனாக்களின் விலை : $3 \times 2.50 =$ D7.50

இரவி ஊகித்தது சரியாக இருக்கவேண்டுமானால் ராமு கடைக்காரருக்கு D 100 +D 7.50 = D 107.50 கொடுத்திருக்க வேண்டும். ஆனால் ராமு கடைக்காரருக்கு D110 கொடுத்தான்.

இப்போது, குணா ஊகித்தவிலையை கருதுவோம்.

1 நோட்டுபுத்தகத்தின் விலை D16, எனில் 4நோட்டுபுத்தகங்களின் விலை: $4 \times 16 =$ D64

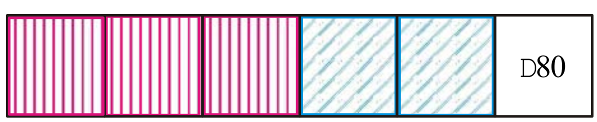
1 பேனாவின் விலை D16 எனில் 3பேனாக்களின் விலை : $3 \times 16 =$ D 48

குணா ஊகித்தது சரியாக இருக்கவேண்டுமானால் ராமுகடைகாரருக்கு D64 + D48 = D112 கொடுத்திருக்கவேண்டும். ஆனால் ராமு கொடுத்ததொகை இதைவிட குறைவு.

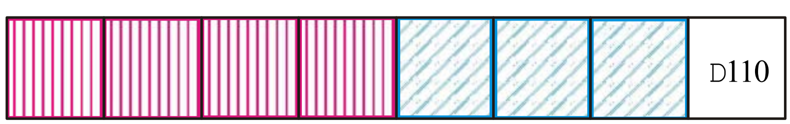
இப்போது நாம் என்ன செய்யவேண்டும்? ஒரு நோட்டுபுத்தகம், ஒரு பேனாவின் சரியான விலையை எப்படிக்கண்டறிவது? இச்சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க நாம் மாதிரிகள் முறை எனும் முறையை பயன்படுத்துகிறோம். இந்த முறையில் செவ்வகங்கள் அல்லது செவ்வகங்களின் பகுதிகள், தெரியாதவற்றை குறிக்க பயன்படுத்தப்படுகிறது. நாம் மாதிரிமுறைக்கு முதல் சூழ்நிலையை பார்ப்போம்.

படி-1 : நோட்டுபுத்தகங்களை என்றும் பேனாக்களை என்றும் குறிப்போம்.

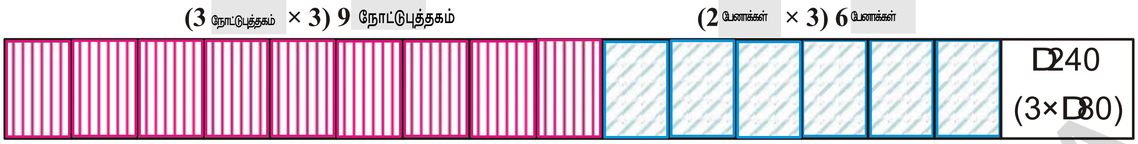
சோமு 3 புத்தகங்களையும், 2 பேனாக்களையும் D80க்கு வாங்கினான்.



ராமு 4 புத்தகங்களையும், 3 பேனாக்களையும் D110க்கு வாங்கினான்.



படி-2 : இரண்டு நிகழ்வுகளிலும் ஒரு ராசியை சமன்படுத்த அந்த இராசிகளை விகிதசமத்துடன் அதிகரிக்க செய்யவேண்டும் (குறைக்கவும் செய்யலாம்)



படி 2ல் ஒரு எளிய விகிதசம பயன்பாட்டை கவனிக்கலாம். சோமு 3நோட்டு புத்தகங்களையும், இரண்டு பேனாக்களையும் ₹80க்கு வாங்கினான். எனவே 9 நோட்டுபுத்தகங்கள், 6பேனாக்களின் விலை

$3 \times 3 = 9$ நோட்டுபுத்தகங்கள் மேலும் $3 \times 2 = 6$ பேனாக்கள் விலை $3 \times 80 =$ ₹240 (1)

அதுபோல, ராமு 4 நோட்டுபுத்தகங்கள் 3 பேனாக்களை ₹110க்கு வாங்கினான். எனவே,

$2 \times 4 = 8$ நோட்டுபுத்தகங்கள் மேலும் $2 \times 3 = 6$ பேனாக்கள் விலை $2 \times 110 =$ ₹220 (2)

(1), (2) சமன்பாடுகளை ஒப்பிட கூடுதலாக உள்ள ஒரு நோட்டுபுத்தகத்தின் விலை

₹240 - ₹ 220 = ₹20. எனவே, ஒரு நோட்டுபுத்தகத்தின் விலை ₹20.

சோமு 3 நோட்டுபுத்தகங்களையும், 2 பேனாக்களையும் ₹80க்கு வாங்கினான். ஒவ்வொரு புத்தகத்தின் விலை ₹20. எனவே 3 புத்தகங்களின் விலை ₹ 60. அப்படியானால், 2 பேனாக்களின் விலை ₹ 80 - ₹ 60 = ₹ 20.

எனவே, ஒரு பேனாவின் விலை ₹20 ÷ 2 = ₹10.

ராமுவின் சூழ்நிலையை இதனுடன் ஒப்பிட்டு பாருங்கள். 4 நோட்டுபுத்தகங்கள் விலை ₹ 80 மேலும் 3 பேனாக்களின் விலை ₹ 30 இவைகளின் மொத்தம் ₹ 110 இது உண்மை.

மேற்காணும் விவாதம் மூலம் இரண்டு மாறிகள் உள்ளபோது ஒரேஒரு தீர்வு கிடைக்க குறைந்தபட்சம் இரண்டு தனிபட்ட சமன்பாடுகள் தேவைப்படுகிறது என்பது தெளிவாகிறது.

பொதுவாக, $ax + by + c = 0$ எனும் அமைப்பில் இருந்து a, b, c மெய்யெண்களாகவும், குறைந்தபட்சம் a அல்லது b பூஜ்ஜியமில்லாமலும் உள்ள சமன்பாடு x, y எனும் இரண்டு மாறிகளில் உள்ள நேரிய சமன்பாடு எனப்படும். [இந்த நிபந்தனைகளை பொதுவாக $a^2 + b^2 \neq 0$ என எழுதுவோம்]

முயற்சி செய்

கீழ்காணும் வினாக்களில் சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடு:

1. கீழ்காணும் சமன்பாடுகளில் எது நேரிய சமன்பாடு அல்ல?

a) $5 + 4x = y + 3$ b) $x + 2y = y - x$

c) $3 - x = y^2 + 4$ d) $x + y = 0$

2. கீழ்கண்டவற்றில் எது ஒரு மாறியில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடு?

   a) $2x + 1 = y - 3$ b) $2t - 1 = 2t + 5$

   c) $2x - 1 = x^2$ d) $x^2 - x + 1 = 0$

3. கீழ்காணும் எண்களில் எது $2(x + 3) = 18$ எனும் சமன்பாட்டுக்கு தீர்வாகும்?

   a) 5 b) 6 c) 13 d) 21

4. $2x - (4 - x) = 5 - x$ எனும் சமன்பாட்டை உண்மையாக்கும் xன் மதிப்பு

   a) 4.5 b) 3 c) 2.25 d) 0.5

5. $x - 4y = 5$ எனும் சமன்பாட்டுக்கு

   a) தீர்வு இல்லை b) ஒரே ஒரு தீர்வு

   c) இரண்டு தீர்வுகள் d) முடிவிலா தீர்வுகள்

4.2 இரண்டு மாறிகளில் ஒருஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

அறிமுகத்தில் கொடுக்கப்பட்ட உதாரணத்தில் நமக்கு எத்தனை சமன்பாடுகள் கிடைத்தன? நமக்கு இரண்டு சமன்பாடுகள் அல்லது இரண்டு மாறிகளில் நேரிய சமன்பாட்டு ஜோடி கிடைத்தது. இச்சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் என்றால் என்ன?

ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் ஒன்றாக திருப்திபடுத்தும் ஒரு ஜோடி x மற்றும் y மாறிகளின் மதிப்பு ஒரு ஜோடி நேரிய சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

4.2.1 வரைபடமுறை மூலம் ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளின் தீர்வை கண்டறிதல்

இரண்டு மாறிகளை கொண்ட நேரிய சமன்பாட்டு ஜோடிகளுக்கு எத்தனை தீர்வுகள் இருக்கும்? முடிவிலா தீர்வுகளா? ஒரே ஒரு தீர்வா? அல்லது தீர்வே இருக்காதா? இதற்கு முன்னர் நாம் நேரிய சமன்பாட்டு ஜோடிகளின் தீர்வை கண்டறிய மாதிரிகள் முறையை பயன்படுத்தினோம். இப்போது வரைபடமுறையை பயன்படுத்துவோம்.

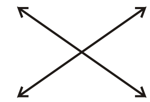
$a_1x + b_1y + c_1 = 0, (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$ மேலும் $a_2x + b_2y + c_2 = 0;\ (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$ என்பவைகள் இரண்டு மாறிகளை கொண்ட ஒருஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள்.

இரண்டு மாறிகளை கொண்ட ஒரு நேரிய சமன்பாட்டின் வரைபடம் ஒரு நேர்கோடாகும். இந்நேர்கோட்டின் மீது அமையும் (x, y) வரிசை ஜோடிகளால் குறிக்கப்படும் புள்ளிகள் நேரிய சமன்பாட்டிற்கு தீர்வாக அமையும். இந்நேர்கோட்டின் மீது அமையாத வரிசை ஜோடிகளால் ஆன புள்ளிகள் இதன் தீர்வாக அமையாது.

நமக்கு இரண்டு நேரிய சமன்பாடுகள் உள்ளபோது ஒரே தளத்தில் இரண்டு நேர்கோடுகள் கிடைக்கும். ஒரே தளத்தில் இரண்டு நேர்கோடுகள் இருக்கும் போது அவைகளுக்கிடையேயான உறவு என்ன? இந்த உறவுக்குரிய முக்கியத்துவம் என்ன?

ஒரு தளத்தில் இரண்டு நேர்கோடுகள் வரையப்படும் போது கீழ்காணும் மூன்று சூழ்நிலைகளில் ஏதேனும் ஒன்றுமட்டுமே ஏற்பட வாய்ப்புள்ளது.

i) இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒரேப் புள்ளியில் வெட்டிகொள்ளுதல்



ii) இரண்டு நேர்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளாமல் இணையாக இருப்பது

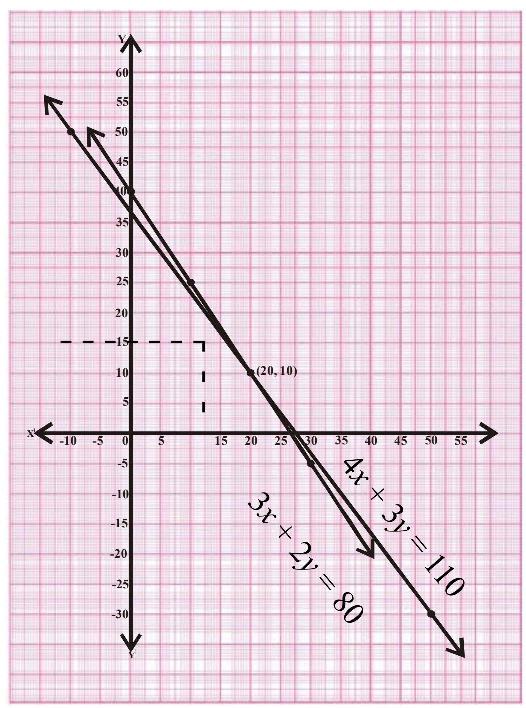
iii) இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒன்றுதல்
(உண்மையில் இரண்டும் ஒன்றே)

முதல் உதாரணத்திற்கு x, yகளில் ஒரு சமன்பாட்டை எழுதுவோம். இதில் xயை ஒரு நோட்டுபுத்தகத்தின் விலையையும், y ஒரு பேனாவின் விலையை குறிப்பதாக எடுத்துக்கொள்வோம். இப்போது சமன்பாடு $3x + 2y = 80$ மேலும் $4x + 3y = 110$ ஆகும்.

$3x + 2y = 80$ சமன்பாட்டுக்கு		
x	$y = \dfrac{80-3x}{2}$	(x, y)
0	$y = \dfrac{80-3(0)}{2} = 40$	(0, 40)
10	$y = \dfrac{80-3(10)}{2} = 25$	(10, 25)
20	$y = \dfrac{80-3(20)}{2} = 10$	(20, 10)
30	$y = \dfrac{80-3(30)}{2} = -5$	(30, -5)

$4x + 3y = 110$ சமன்பாட்டுக்கு		
x	$y = \dfrac{110-4x}{3}$	(x, y)
-10	$y = \dfrac{110-4(-10)}{3} = 50$	(-10, 50)
20	$y = \dfrac{110-4(20)}{3} = 10$	(20, 10)
50	$y = \dfrac{110-4(50)}{3} = -30$	(50, -30)

மேற்காணும் புள்ளிகளை ஒரு கார்டீசியன் தளத்தில் குறிக்க நமக்கு இரண்டு நேர்கோடுகள் கிடைத்தன. இந்த இரண்டு நேர்கோடுகள் (20, 10) எனும் புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்வதை கவனிக்கலாம்.



x, y களின் மதிப்புகளை சமன்பாட்டில் பிரதியிட நமக்கு $3(20) + 2(10) = 80$ மேலும் $4(20) + 3(10) = 110$ என கிடைக்கிறது. இது இரண்டு சமன்பாடுகளையும் திருப்திபடுத்துகிறது. எனவே வரைபட முறைமூலம் ஒரு புத்தகத்தின் விலை D20 மேலும் ஒரு பேனாவின் விலை D10 என கண்டுபிடித்தோம். இத்தீர்வுகள் மாதிரிகள் முறையின் மூலம் கண்டறிந்த தீர்வுக்கு சமமாக இருப்பதை நினைவுகூறுங்கள்.

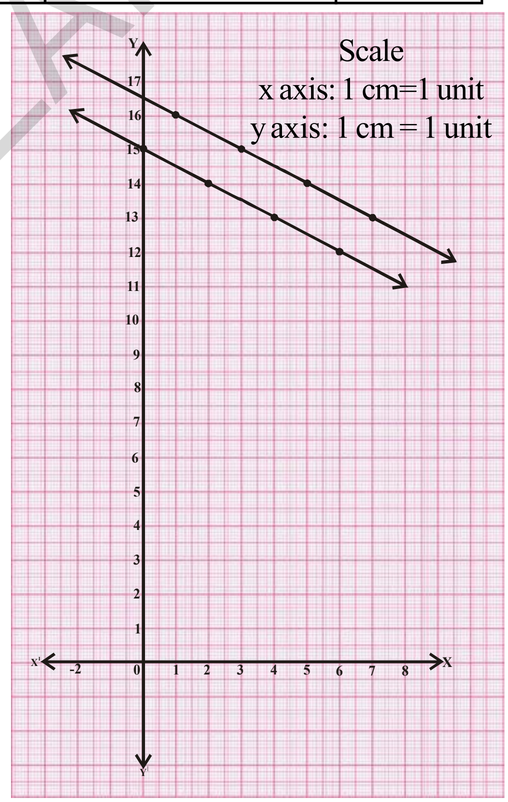
(20, 10) என்ற புள்ளி இரண்டு நேர்கோடுகளுக்கும் பொதுப்புள்ளி. எனவே இரண்டு மாறிகளைக் கொண்ட இந்த ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே ஒரு தீர்வுமட்டுமே உள்ளது. இம்மாதிரியான சமன்பாடுகள் இசைவு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் (Consistent) எனப்படும். இவைகளுக்கு எப்போதும் ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே இருக்கும்.

சிந்தித்து விவாதித்து எழுது, பகுதியில் கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு சூழ்நிலைகளில் முதலாவது சூழ்நிலையை கவனிப்போம். இதில் நாம் 1கிலோ உருளைகிழங்கு விலையையும், 1 கிலோ தக்காளியின் விலையையும் கண்டறிய வேண்டும். 1கிலோ உருளைகிழங்கின் விலை Dx எனவும், ஒரு கிலோ தக்காளியின் விலையை Dy எனவும் எடுத்துகொள்வோம். அப்போது கிடைக்கும் சமன்பாடுகள் $1x+2y=30$, $2x+4y=66$.

$x + 2y = 30$ சமன்பாட்டுக்கு		
x	$y = \frac{30-x}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{30-0}{2} = 15$	(0, 15)
2	$y = \frac{30-2}{2} = 14$	(2, 14)
4	$y = \frac{30-4}{2} = 13$	(4, 13)
6	$y = \frac{30-6}{2} = 12$	(6, 12)

$2x + 4y = 66$ சமன்பாட்டுக்கு		
x	$y = \frac{66-2x}{4}$	(x, y)
1	$y = \frac{66-2(1)}{4} = 16$	(1, 16)
3	$y = \frac{66-2(3)}{4} = 15$	(3, 15)
5	$y = \frac{66-2(5)}{4} = 14$	(5, 14)
7	$y = \frac{66-2(7)}{4} = 13$	(7, 13)

இதை இரண்டு இணைகோடுகளாக வரைபடத்தில் குறிக்கலாம். இந்நேர்கோடுகள் வெட்டிகொள்ளாததால் இவற்றுக்கு பொதுவான தீர்வு இல்லை. ஏனெனில் உருளைகிழங்கு மற்றும் தக்காளி விலை வெவ்வேறு நாட்களில் வெவ்வேறாக இருந்தது என்பதாகும். இதை நாம் நம் அன்றாட வாழ்க்கையில் காணலாம். ஏனெனில் காய்கறிகளின் விலை எப்போதும் ஒரே மாதிரியாக இருக்காது. தீர்வு இல்லாத இவ்வாறான ஜோடி சமன்பாடுகள் ஒவ்வா ஜோடி சமன்பாடுகள் **(inconsistent)** எனப்படும். சிந்தித்து விவாதித்து எழுது பகுதியிலுள்ள இரண்டாம் நிகழ்வில் ஒரு பேட்டின் விலை D x எனவும் ஒரு பந்தின் விலை D y எனவும் எடுத்துகொள்வோம். இப்போது நமக்கு கிடைக்கும் சமன்பாடுகள் $3x + 6y = 3900$ மேலும் $x + 2y = 1300$.



$3x + 6y = 3900$ சமன்பாட்டுக்கு		
x	$y = \frac{3900-3x}{6}$	(x, y)
100	$y = \frac{3900-3(100)}{6} = 600$	(100, 600)

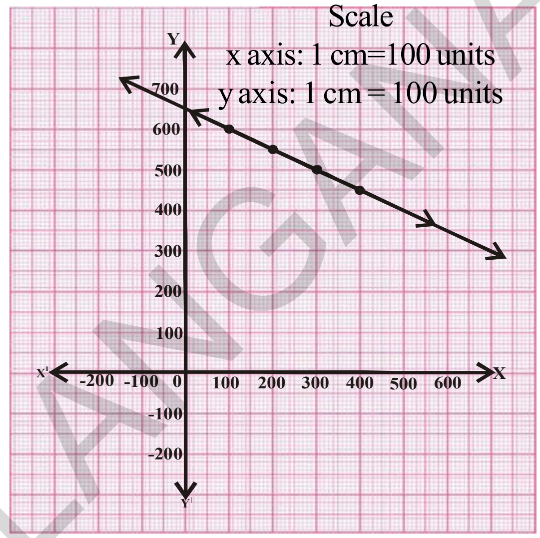
$x + 2y = 1300$ சமன்பாட்டுக்கு		
x	$y = \frac{1300-x}{2}$	(x, y)
100	$y = \frac{1300-100}{2} = 600$	(100, 600)

200	$y = \dfrac{3900 - 3(200)}{6} = 550$	(200, 550)
300	$y = \dfrac{3900 - 3(300)}{6} = 500$	(300, 500)
400	$y = \dfrac{3900 - 3(400)}{6} = 450$	(400, 450)

200	$y = \dfrac{1300 - 200}{2} = 550$	(200, 550)
300	$y = \dfrac{1300 - 300}{2} = 500$	(300, 500)
400	$y = \dfrac{1300 - 400}{2} = 450$	(400, 450)

இச்சமன்பாட்டின் வரைபடங்கள் ஒருஜோடி ஒன்றிய நேர்கோடுகளை காட்டுகிறது. இச்சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் புள்ளிகளாக கொடுக்கப்பட்டால், அந்த பொதுப்புள்ளிகள் எவை?

கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் பொதுவான புள்ளிகள் என வரைபடம் மூலம் நாம் அறிந்துகொள்ளலாம். இவ்வாறான சமன்பாடுகள் இருமாறிகளில் சார்நிலை **(Dependent)** ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் எனப்படுகின்றன.



முயற்சி செய்

மேலே கொடுக்கப்பட்ட உதாரண கணக்கில் ஒரு பேட் மேலும் ஒரு பந்தின் விலையை கண்டறியமுடியுமா?

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

சார்நிலை ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் எப்போதும் இசைவு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளாக இருக்குமா? ஏன்? காரணங்களை விவரி.

இதை செய்

1. கீழ்காணும் சமன்பாட்டு தொகுதியை தீர்.

   i) $x - 2y = 0$, $3x + 4y = 20$

   ii) $x + y = 2$, $2x + 2y = 4$

   iii) $2x - y = 4$, $4x - 2y = 6$

2. ஒரு நிகழ்வின் சமன்பாடுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $x + 2y - 4 = 0$ மேலும் $2x + 4y - 12 = 0$. இந்நிகழ்வுக்கு ஒரு வரைபடம் வரை. உன்னுடைய கருத்தை எழுது.

4.2.3 கெழுக்களுக்கும், சமன்பாட்டின் தொகுதிகளின் தன்மைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு

a_1, b_1, c_1 மேலும் a_2, b_2, c_2 என்பவைகள் இருமாறிகளில் அமைந்த ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளின் கெழுக்கள் என்க. மேல் உள்ள உதாரணங்களில் $\dfrac{a_1}{a_2}, \dfrac{b_1}{b_2}, \dfrac{c_1}{c_2}$ மதிப்புகளை எழுதி ஒப்பிடுவோம்.

ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள்	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	விகிதங்களின் ஒப்பிடுதல்	வரைபடம்	இயற்கணித விவரம்
1. $3x+2y-80=0$ $4x+3y-110=0$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-80}{-110}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	வெட்டிக் கொள்ளும் கோடுகள்	ஒரே ஒரு தீர்வு
2. $1x+2y-30=0$ $2x+4y-66=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-30}{-66}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	இணை கோடுகள்	தீர்வு இல்லை
3. $3x+6y=3900$ $x+2y=1300$	$\frac{3}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{-3900}{-1300}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	ஒன்றும் கோடுகள்	முடிவிலா தீர்வுகள்

இப்போது சில உதாரணங்களை கவனிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஜோடி சமன்பாடுகள் வெட்டிகொள்ளும் கோடுகளா? இணைகோடுகளா? அல்லது ஒன்றும் கோடுகளா? என சரிபார். சமன்பாடுகள் இசைவு சமன்பாடுகள் எனில் அவற்றின் தீர்வுகளை கண்டுபிடி?

$$2x + y - 5 = 0$$

$$3x - 2y - 4 = 0$$

தீர்வு : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$ $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}$ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-4}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, எனவே இவை வெட்டிகொள்ளும் கோடுகள் அதாவது இவை இசைவு ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளாகும்.

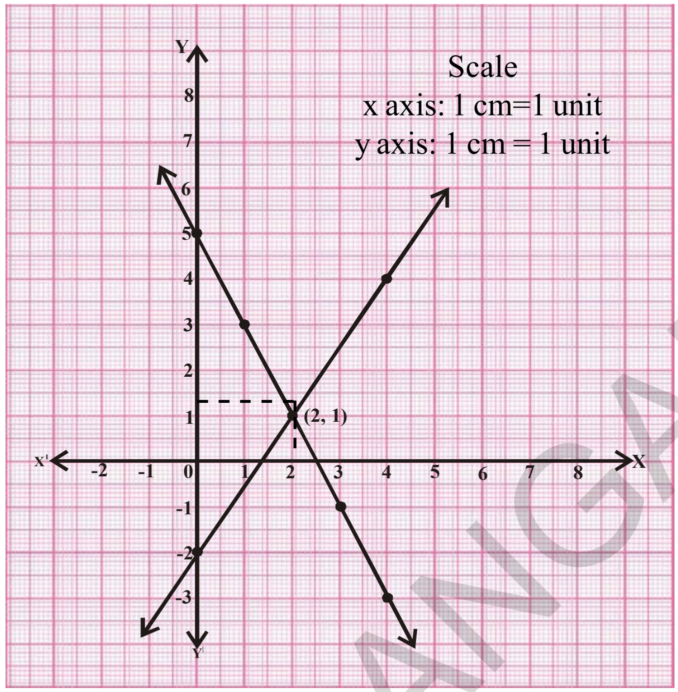
$2x + y = 5$ சமன்பாட்டுக்கு

x	$y = 5 - 2x$	(x, y)
0	$y = 5 - 2(0) = 5$	(0, 5)
1	$y = 5 - 2(1) = 3$	(1, 3)
2	$y = 5 - 2(2) = 1$	(2, 1)
3	$y = 5 - 2(3) = -1$	(3, -1)
4	$y = 5 - 2(4) = -3$	(4, -3)

$3x - 2y = 4$ சமன்பாட்டுக்கு

x	$y = \frac{4-3x}{-2}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-3(0)}{-2} = -2$	(0, -2)
2	$y = \frac{4-3(2)}{-2} = 1$	(2, 1)
4	$y = \frac{4-3(4)}{-2} = 4$	(4, 4)

இந்த ஜோடி சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே ஒரு தீர்வு (2,1) மட்டும் ஆகும்.



எடுத்துக்காட்டு-2.

கீழ்காணும் ஜோடி சமன்பாடுகள் இசைவு ஜோடிகளா? இல்லையா? சரிபார் $3x + 4y = 2$ மேலும் $6x + 8y = 4$ மேலும் வரைபடம் வரைந்து உனது விடையை சரிபார்.

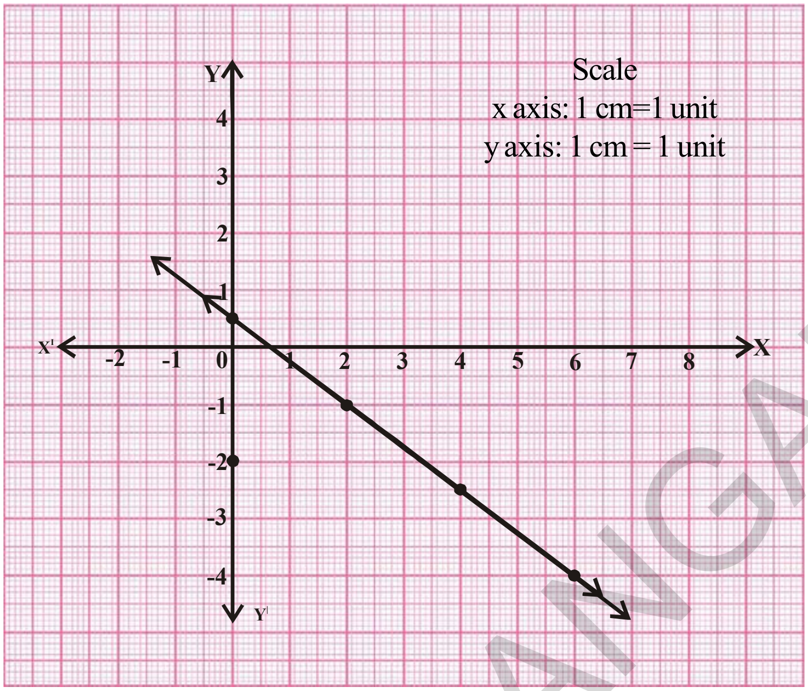
தீர்வு : $3x + 4y - 2 = 0$

$6x+8y - 4 = 0$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, எனவே இவை ஒன்றும் கோடுகள். எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் சார்நிலை ஜோடி சமன்பாடுகள் ஆகும்.

$3x + 4y = 2$ சமன்பாட்டுக்கு			**$6x + 8y = 4$ சமன்பாட்டுக்கு**		
x	$y = \frac{2-3x}{4}$	(x, y)	x	$y = \frac{4-6x}{8}$	(x, y)
0	$y = \frac{2-3(0)}{4} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$	0	$y = \frac{4-6(0)}{8} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{2-3(2)}{4} = -1$	(2, -1)	2	$y = \frac{4-6(2)}{8} = -1$	(2, -1)
4	$y = \frac{2-3(4)}{4} = -2.5$	(4, -2.5)	4	$y = \frac{4-6(4)}{8} = -2.5$	(4, -2.5)
6	$y = \frac{2-3(6)}{4} = -4$	(6, -4)	6	$y = \frac{4-6(6)}{8} = -4$	(6, -4)



எடுத்துக்காட்டு-3. 4x-6y = 15 மேலும் 2x-3y = 5 சமன்பாடுகள் இசைவு (consistent) சமன்பாடுகளா? என சோதித்து பார். மேலும் இவைகளுக்கு வரைபடம் வரைந்து சரிபார்.

தீர்வு : $4x-6y-15=0$ $\qquad$ $2x-3y-5=0$

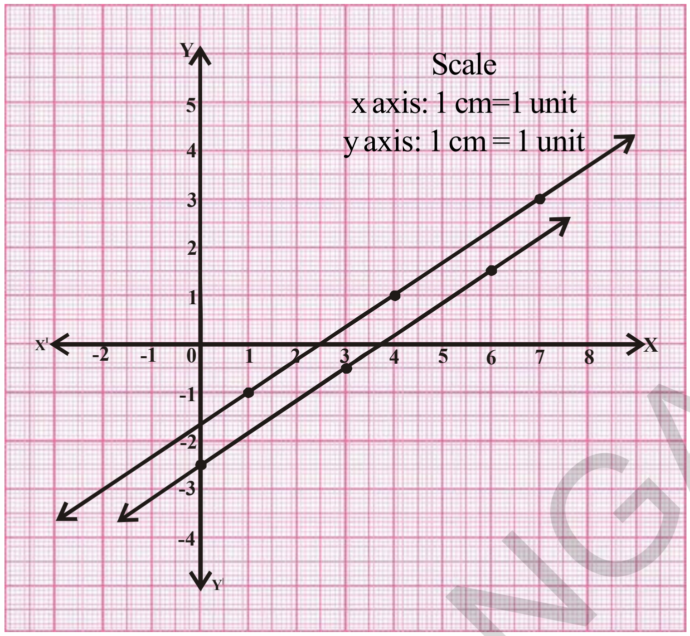
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1} \qquad \frac{b_1}{b_2}=\frac{-6}{-3}=\frac{2}{1}$$

$$\frac{c_1}{c_2}=\frac{-15}{-5}=\frac{3}{1} \qquad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

இவைகள் ஒவ்வா (inconsistent) சமன்பாடுகள். இவைகளுக்கு தீர்வு இல்லை மேலும் இவை இணைகோடுகளாகும்.

$4x - 6y = 15$ சமன்பாட்டுக்கு		
x	$y=\frac{15-4x}{-6}$	(x, y)
0	$y=\frac{15-0}{-6}=\frac{-5}{2}$	(0, -2.5)
3	$y=\frac{15-4(3)}{-6}=\frac{-1}{2}$	(3, -0.5)
6	$y=\frac{15-4(6)}{-6}=\frac{3}{2}$	(6, 1.5)

$2x - 3y = 5$ சமன்பாட்டுக்கு		
x	$y=\frac{5-2x}{-3}$	(x, y)
1	$y=\frac{5-2(1)}{-3}=-1$	(1, -1)
4	$y=\frac{5-2(4)}{-3}=1$	(4, 1)
7	$y=\frac{5-2(7)}{-3}=3$	(7, 3)



இதை செய்

கீழ்காணும் ஜோடி சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே ஒரு தீர்வா? முடிவிலா தீர்வா? அல்லது தீர்வுகள் இல்லையா? என்பதை சோதித்து பார்.

(i) $2x+3y = 1$, $3x-y = 7$ (ii) $x + 2y = 6$, $2x + 4y = 12$ (iii) $3x + 2y = 6$, $6x + 4y = 18$

முயற்சி செய்

1. $2x + py = -5$ மேலும் $3x + 3y = -6$ எனும் சமன்பாடுகள் 'p' ன் எந்த மதிப்புக்கு ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்கும் எனக் கண்டுபிடி.
2. $2x - ky + 3 = 0$, $4x + 6y - 5 = 0$ என்பன இணைகோடுகள் எனில் 'k' ன் மதிப்பு காண்க.
3. 'k' ன் எந்த மதிப்புக்கு $3x + 4y + 2 = 0$ மேலும் $9x + 12y + k = 0$ ஜோடி கோடுகள், ஒன்றும் கோடுகளாக இருக்குமென கண்டுபிடி.
4. 'p' ன் எந்த மிகைமதிப்புகளுக்கு கீழ்காணும் ஜோடிசமன்பாடுகள் முடிவிலா தீர்வுகளைக் கொண்டிருக்குமெனக் கண்டுபிடி.
   $px + 3y - (p - 3) = 0$
   $12x + py - p = 0$

இப்போது மேலும் சில உதாரணங்களை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-4. ஒரு தோட்டத்தில் சில தேனீக்கள் மேலும் சில பூக்கள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பூவின் மீது ஒரு தேனீ அமரும் போது ஒரு தேனீ மீதியாகிறது. ஒவ்வொரு பூவின் மீது இரு தேனீக்கள் அமரும்போது ஒரு பூ மீதியாகிறது எனில் தோட்டத்திலுள்ள பூக்கள் எத்தனை. தேனீக்கள் எத்தனை எனக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : தேனீக்களின் எண்ணிக்கை = x , பூக்களின் எண்ணிக்கை = yஎன்க.

ஒவ்வொரு பூக்களின் மீது ஒரு தேனீ அமரும் போது ஒரு தேனீ மீதியாகிறது. எனவே, $x = y + 1$

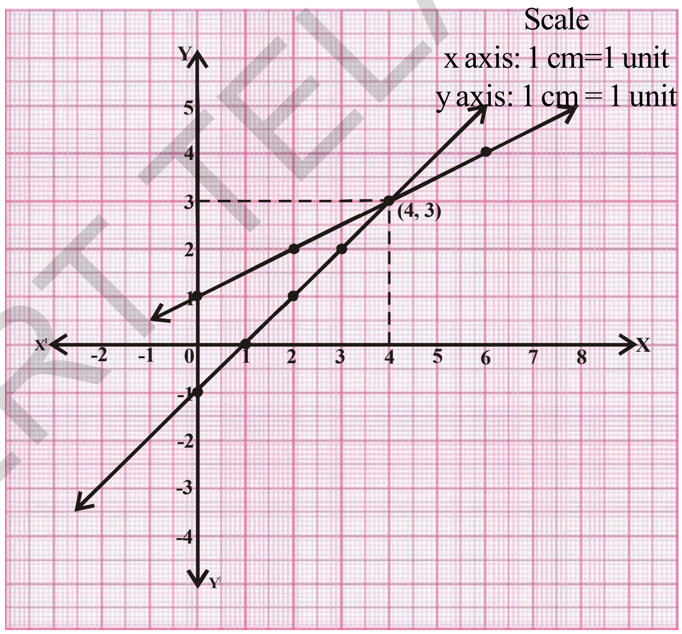
அதாவது $x - y - 1 = 0$ ... (1)

ஒவ்வொரு பூவின் மீதும் இரண்டு தேனீக்கள் அமரும்போது ஒரு பூ மீதியாகிறது எனவே $x = 2(y - 1)$

அதாவது $x - 2y + 2 = 0$ ... (2)

$x - y - 1 = 0$ சமன்பாட்டுக்கு		
x	$y = x - 1$	(x, y)
0	$y = 0 - 1 = -1$	(0, -1)
1	$y = 1 - 1 = 0$	(1, 0)
2	$y = 2 - 1 = 1$	(2, 1)
3	$y = 3 - 1 = 2$	(3, 2)
4	$y = 4 - 1 = 3$	(4, 3)

$x - 2y + 2 = 0$ சமன்பாட்டுக்கு		
x	$y = \frac{x+2}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{0+2}{2} = 1$	(0, 1)
2	$y = \frac{2+2}{2} = 2$	(2, 2)
4	$y = \frac{4+2}{2} = 3$	(4, 3)
6	$y = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)



ஆகையால் தேனீக்களின் எண்ணிக்கை 4 மேலும் பூக்களின் எண்ணிக்கை 3.

எடுத்துக்காட்டு-5. ஒரு செவ்வக வடிவ இடத்தின் சுற்றளவு 32மீ. அதன் நீளத்தை 2மீ அதிகமாக்கி அகலத்தை 1மீ ஆக குறைக்கும்போது அதன் பரப்பளவில் எந்த மாற்றமும் இல்லை, எனில் செவ்வக இடத்தின் நீளம், அகலத்தை கண்டுபிடி.

தீர்வு : செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் முறையே l, b என்க. அதன் பரப்பளவு $= lb$ மேலும்

சுற்றளவு $= 2(l + b) = 32$ மீ.

$l + b = 16$ என்பது $l + b - 16 = 0$ ... (1)

நீளத்தை 2மீ அதிகரிப்பதால் ஏற்படும் புதிய நீளம் $l + 2$ மேலும் அகலத்தை 1மீ குறைப்பதால் ஏற்படும் புதிய அகலம் $b - 1$ எனவே பரப்பளவு $= (l + 2)(b - 1)$

ஆனால் பரப்பளவில் மாற்றம் இல்லை. எனவே

$(l + 2)(b - 1) = lb$

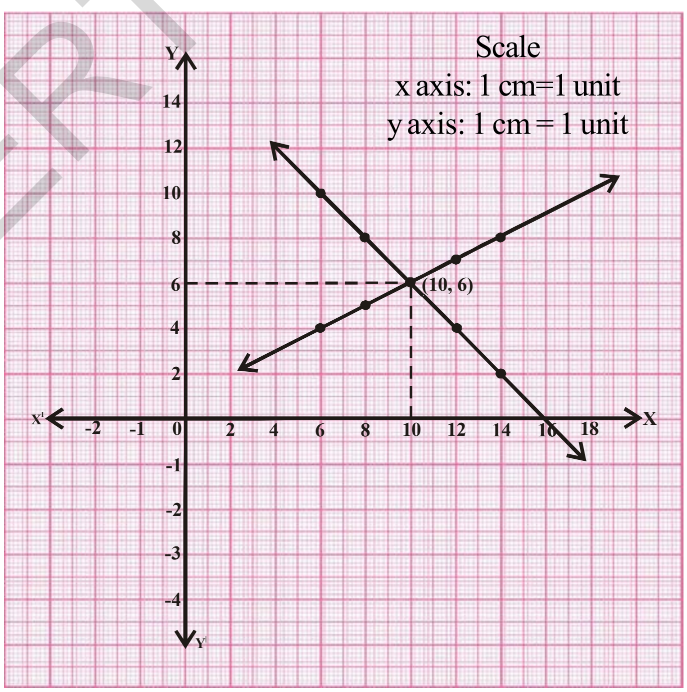
$lb - l + 2b - 2 = lb$ அல்லது $lb - lb = l - 2b + 2$

$l - 2b + 2 = 0$ ... (2)

$l + b - 16 = 0$ சமன்பாட்டிற்கு		
l	$b = 16 - l$	(l, b)
6	$b = 16 - 6 = 10$	(6, 10)
8	$b = 16 - 8 = 8$	(8, 8)
10	$b = 16 - 10 = 6$	(10, 6)
12	$b = 16 - 12 = 4$	(12, 4)
14	$b = 16 - 14 = 2$	(14, 2)

$l - 2b + 2 = 0$ சமன்பாட்டிற்கு		
l	$b = \frac{l+2}{2}$	(l, b)
6	$b = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)
8	$b = \frac{8+2}{2} = 5$	(8, 5)
10	$b = \frac{10+2}{2} = 6$	(10, 6)
12	$b = \frac{12+2}{2} = 7$	(12, 7)
14	$b = \frac{14+2}{2} = 8$	(14, 8)

எனவே அந்த இடத்தின் உண்மையான நீளம் 10மீ அகலம் 6மீ நீளத்தின் அளவுகளை X-அச்சின் மீதும் அகலத்தின் அளவுகளை Y-அச்சின் மீதும் எடுத்துகொள்ள கிடைக்கும் வரைபடம்



பயிற்சி - 4.1

1. வரைபடம் வரையாமல் $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}$ விகிதங்களை ஒப்பிட்டு கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஜோடி சமன்பாடுகள் வெட்டிகொள்ளும் கோடுகளா? இணைகோடுகளா? அல்லது ஒன்றும் கோடுகளா? எனக் கண்டுபிடி.

   a) $5x - 4y + 8 = 0$, $7x + 6y - 9 = 0$
   b) $9x + 3y + 12 = 0$, $18x + 6y + 24 = 0$
   c) $6x - 3y + 10 = 0$, $2x - y + 9 = 0$

2. கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஜோடி சமன்பாடுகள் இசைந்த சமன்பாடுகளா? ஒவ்வா சமன்பாடுகளா? என சரிபார். மேலும் வரைபடமுறை மூலம் இவற்றின் தீர்வுகளை கண்டுபிடி.

   a) $3x + 2y = 5$, $2x - 3y = 7$
   b) $2x - 3y = 8$, $4x - 6y = 9$
   c) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$, $9x - 10y = 12$
   d) $5x - 3y = 11$, $-10x + 6y = -22$
   e) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$, $2x + 3y = 12$
   f) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$
   g) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$
   h) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$
   i) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

3. குமார் சில பேண்ட், சட்டைகளை வாங்க துணிக்கடைக்கு சென்றார். அவரது நண்பர்கள் எத்தனை பேண்ட், சட்டை வாங்கினாய்? எனக் கேட்டதற்கு அவர் இவ்வாறு பதில் கூறினார். "நான் வாங்கிய சட்டைகளின் எண்ணிக்கை பேண்ட்களின் எண்ணிக்கையின் இருமடங்கைவிட 2 குறைவு. அவ்வாறே சட்டைகளின் எண்ணிக்கை பேண்ட்களின் எண்ணிக்கையின் நான்கு மடங்கைவிட நான்கு குறைவு." குமார் எத்தனை பேண்ட், சட்டைகள் வாங்கினார்?

4. பத்தாம் வகுப்பு மாணவர்கள் 10பேர் கணித வினாடி-வினாவில் பங்கு பெற்றார்கள். இதில் கலந்து கொண்ட மாணவிகளின் எண்ணிக்கை மாணவர்களைவிட 4 அதிகம் எனில் வினாடி-வினாவில் கலந்துகொண்ட மாணவ, மாணவிகள் எத்தனைப்பேர்?

5. ஐந்து பென்சில்கள், 7 பேனாக்களின் விலை D50. அவ்வாறே 7பென்சில்கள் மேலும் 5பேனாக்களின் விலை D46 எனில் ஒவ்வொரு பேனா மற்றும் பென்சில்களின் விலை என்ன?

6. அகலத்தைவிட 4மீ அதிக நீளமுடைய செவ்வகத்தின் சுற்றளவின் பாதி 36மீ எனில் செவ்வகத்தின் நீள, அகலங்களை கண்டுபிடி?

7. $2x + 3y - 8 = 0$ ஒரு நேரிய சமன்பாடு. இதை வெட்டும்படியான மற்றொரு நேரிய சமன்பாட்டை எழுதுங்கள். கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும்படி ஒரு கோடும், ஒன்றும்படியாக மற்றொரு கோடும் இருக்கும் படியாக இரண்டு நேரியச் சமன்பாடுகளை எழுது.

8. ஒரு செவ்வகத்தின் நீளத்தை 5 அலகுகள் குறைத்து அகலத்தை 2 அலகுகளாக அதிகமாக்க பரப்பளவு 80 சதுர அலகுகளாக குறைகிறது. நீளத்தை 10அலகுகள் அதிகரிக்க அகலத்தை 5 அலகுகள் குறைத்தால் பரப்பளவு 50 சதுர அலகுகள் அதிகமாகிறது எனில் அந்த செவ்வகத்தின் நீள, அகலங்களை கண்டுபிடி.

9. ஒரு வகுப்பில் உள்ள விசுப்பலகை மீது மூன்று மாணவர்கள் வீதம் அமரும் போது ஒரு மாணவனுக்கு இடம் போதவில்லை. அதற்காக நான்கு மாணவர்கள் வீதம் அமரும் போது ஒரு விசுப்பலகை மீதியாகிறது எனில் மாணவர்கள் எத்தனைபேர்? விசுப்பலகைகள் எத்தனை?

4.3 ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை இயற்கணித முறையில் கண்டறிதல்

நேரிய சமன்பாடு ஜோடிகளின் தீர்வை வரைபடம் மூலம் கண்டறியும் முறையை கற்றுக்கொண்டோம். ஆனால் தீர்வை குறிக்கும் புள்ளிகள் அச்சு தூரங்கள் முழுஎண்களாக இல்லாதபோது இம்முறை சற்று கடினம். உதாரணத்திற்கு தீர்வுகள் $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, $(-1.75, 3.3)$, $(\frac{4}{13}, \frac{1}{19})$ ....எனும் வடிவில் இருக்கும் போது வரைபடத்தில் தவறு ஏற்பட வாய்ப்புள்ளது. இம்மாதிரியான தீர்வுகளை கண்டறிய மாற்று முறைகள் உள்ளதா? இயற்கணித முறையில் பல முறைகள் உள்ளன. அவற்றில் சிலவற்றை கற்றுக்கொள்வோம்.

4.3.1 பிரதியீட்டுமுறை

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு இருமாறி நேரிய சமன்பாடு ஜோடிகளில் ஒரு மாறியை மற்றொரு மாறியின் பொருளாக மாற்றி எழுதும் முறை நேரிய சமன்பாடு ஜோடிகளின் தீர்வுகாண பயன்படுகிறது. இந்த முறை பிரதியீட்டுமுறை எனப்படும்.

படி-1 : ஒரு சமன்பாட்டிலுள்ள இருமாறிகளில் ஒரு மாறியை மற்றொரு மாறியின் பொருளாக மாற்றி எழுது (மாறி yயை மாறி xன் பொருளாக எழுது)

படி-2 : படி 1ல் கிடைத்த yன் மதிப்பை மற்றொரு சமன்பாட்டில் பிரதியிடு.

படி-3 : படி 2ல் கிடைத்த சமன்பாட்டை சுருக்கி x மதிப்பை கண்டுபிடி.

படி-4 : படி 3ல் பெற்ற xன் மதிப்பை இரு சமன்பாடுகளில் ஏதேனும் ஒன்றில் பிரதியிட்டு yன் மதிப்பை கண்டுபிடியுங்கள்.

படி-5 : x, yன் மதிப்புகளை இரண்டு சமன்பாடுகளிலும் பிரதியிட்டு சரிபார்.

எடுத்துக்காட்டு-6. கொடுக்கப்பட்ட ஜோடி சமன்பாடுகளை பிரதியீட்டுமுறையில் தீர்.

$$2x - y = 5$$
$$3x + 2y = 11$$

தீர்வு : $2x - y = 5 \qquad (1)$

$3x + 2y = 11 \qquad (2)$

சமன்பாடு (1)ஐ கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம் (படி 1)

$$y = 2x - 5$$

இதை சமன்பாடு (2)ல் பிரதியிட (படி 2)

$$3x + 2(2x - 5) = 11$$
$$3x + 4x - 10 = 11$$

$7x = 11 + 10 = 21$

$x = 21/7 = 3.$ (படி 3)

$x = 3$ யை சமன்பாடு (1)ல் பிரதியிட

$2(3) - y = 5$ (படி 4)

$y = 6 - 5 = 1$

x, y மதிப்புகளை (2)ல் பிரதியிட $3(3) + 2(1) = 9 + 2 = 11$

எனவே தேவையான தீர்வு $x = 3$ மேலும் $y = 1.$ (படி 5)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளை $x = 3$ மேலும் $y = 1$ திருப்திபடுத்துகிறது

இதை செய்

கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு ஜோடி சமன்பாடுகளை பிரதியீட்டுமுறையில் தீர்.

1) $3x - 5y = -1$
$x - y = -1$

2) $x + 2y = -1$
$2x - 3y = 12$

3) $2x + 3y = 9$
$3x + 4y = 5$

4) $x + \frac{6}{y} = 6$
$3x - \frac{8}{y} = 5$

5) $0.2x + 0.3y = 13$
$0.4x + 0.5y = 2.3$

6) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$
$\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

4.3.2 நீக்கல் முறை :

இம்முறையில் சமன்பாடுகளிலுள்ள இரு மாறிகளில் ஒரு மாறியின் குணகங்களை சமம் செய்து அந்த மாறியை நீக்கிவிடுகிறோம். இப்பொழுது ஒரு மாறியில் ஒரு சமன்பாடு கிடைக்கும். இதை தீர்ப்பதன் மூலம் இரண்டாம் மாறியின் மதிப்பு கிடைக்கும். இம்முறையை புரிந்துகொள்ள படிப்படியாக கவனிப்போம்.

படி-1 : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளை $ax + by = c$ வடிவில் எழுதுங்கள்.

படி-2: இரு மாறிகளில் ஏதேனும் ஒரு மாறியின் குணகங்களை சரியான மெய்யெண்ணால் பெருக்கி சமமாக்கு.

படி-3 : நீக்க வேண்டிய மாறிக்கு ஒரேவிதமான குறிகள் இருந்தால் ஒரு சமன்பாட்டிலிருந்து மற்றொரு சமன்பாட்டை கழிக்க வேண்டும். எதிர் குறிகள் இருந்தால் இரண்டையும் கூட்டவேண்டும்.

படி-4 : மற்றொரு மாறியின் மதிப்புக்காக சமன்பாட்டை தீர்க்கவும்.

படி-5 : கிடைத்த மதிப்பை இரண்டு சமன்பாடுகளில் ஏதேனும் ஒன்றில் பிரதியிட்டு நீக்கிய மாறியின் மதிப்பை கண்டறிய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு-7. கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஜோடி சமன்பாடுகளை மாறியை நீக்கும் முறையில் தீர்.

$3x + 2y = 11$
$2x + 3y = 4$

தீர்வு : $3x + 2y = 11$ (1)
$2x + 3y = 4$ (2) (படி1)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து 'y'ஐ நாம் நீக்கலாம். இரண்டு சமன்பாடுகளிலும் 'y'ன் குணகங்கள் 2 மேலும் 3. இவைகளின் மீ.சி.ம 6. எனவே சமன்பாடு (1)ஐ 3ஆலும் சமன்பாடு (2)யை 2ஆலும் பெருக்குவோம்.

சமன்பாடு (1) × 3 $9x + \cancel{6y} = 33$ (படி 2)

சமன்பாடு (2) × 2 $4x + \cancel{6y} = 8$

$\underline{(-)\ \ (-)\ \ (-)}$ (படி 3)

$5x = 25$

$x = \frac{25}{5} = 5$ (படி 4)

$x = 5$யை சமன்பாடு (1)ல் பிரதியிட

$3(5) + 2y = 11$

$2y = 11 - 15 = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2} = -2$ (படி 5)

எனவே தேவையான தீர்வுகள் $x = 5, y = -2$.

இதை செய்

கீழ்வரும் ஜோடி சமன்பாடுகளை நீக்கல் முறையில் தீர்.

1. $8x + 5y = 9$
   $3x + 2y = 4$
2. $2x + 3y = 8$
   $4x + 6y = 7$
3. $3x + 4y = 25$
   $5x - 6y = -9$

முயற்சி செய்

கீழ்காணும் நேரிய ஜோடி சமன்பாடுகளை தீர்.

$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$

$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

இப்போது மேலும் சில உதாரணங்களை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-8. பானு வங்கியிலிருந்து ₹2000 பெற முடிவெடுத்தாள். அவள் காசாளரிடம் ₹2000 பணத்துக்காக ₹50 மேலும் ₹100 நோட்டுகளை மட்டும் கொடுக்குமாறு வேண்டினாள். காசாளர் அவளிடம் மொத்தம் 25 நோட்டுகளை கொடுத்தார் எனில் அதில் உள்ள ₹50 மேலும் ₹100 நோட்டுகள் எத்தனை?

தீர்வு : அவளுக்கு கிடைத்த ₹50 நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை x என்க;
₹100 நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை y என்க;

அப்போது $x + y = 25$ (1)

மேலும் $50x + 100y = 2000$ (2)

கவிதா இதனை பிரதியீட்டு முறையில் தீர்த்தாள்.

முதலாவது சமன்பாட்டிலிருந்து $x = 25 - y$

(2)ம் சமன்பாட்டில் பிரதியிட $50(25 - y) + 100y = 2000$

$$1250 - 50y + 100y = 2000$$

$$50y = 2000 - 1250 = 750$$

$$y = \frac{750}{50} = 15$$

$$x = 25 - 15 = 10$$

எனவே பானுவுக்கு பத்து D50 நோட்டுகளும், பதினைந்து D100 நோட்டுகளும் கிடைத்தன.

கீதா இதை நீக்கல் முறையில் தீர்த்தாள்.

சமன்பாட்டில் x ன் கெழுக்கள் முறையை 1 மேலும் 50 எனவே

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{சமன்பாடு } (1) \times 50 & \cancel{50x} & + & 50y & = & 1250 \\ \text{சமன்பாடு } (2) \times 1 & \cancel{50x} & + & 100y & = & 2000 \\ & (-) & & (-) & & (-) \\ \hline & & & -50y & = & -750 \end{array}$$

ஒரேமாதிரியான குறிகள். எனவே, சமன்பாடுகளை கழிக்க.

அல்லது $y = \dfrac{-750}{-50} = 15$

yன் மதிப்பை சமன்பாடு (1)ல் பிரதியிட $x + 15 = 25$

$$x = 25 - 15 = 10$$

எனவே பானுவுக்கு பத்து D50 நோட்டுகளும் பதினைந்து D100 நோட்டுகளும் கிடைத்தன.

எடுத்துக்காட்டு-9. ஒரு போட்டி தேர்வில் ஒவ்வொரு சரியான விடைக்கும் 3 மதிப்பெண்கள் கொடுக்கப்பட்டது. ஒவ்வொரு தவறான விடைக்கும் 1 மதிப்பெண் குறைக்கப்பட்டது. மது இந்த தேர்வில் 40 மதிப்பெண்கள் பெற்றான். ஒவ்வொரு சரியான விடைக்கு 4 மதிப்பெண்கள் கொடுத்து ஒவ்வொரு தவறான விடைக்கு 2 மதிப்பெண்கள் குறைத்தால் மதுவுக்கு 50 மதிப்பெண்கள் கிடைத்திருக்கும் எனில் அந்த தேர்வில் கேட்கபட்ட வினாக்கள் மொத்தம் எத்தனை?

தீர்வு : சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கை x

தவறான விடைகளின் எண்ணிக்கை y என்க.

ஒவ்வொரு சரியான விடைக்கு 3 மதிப்பெண்கள் கொடுத்து ஒவ்வொரு தவறான விடைக்கு 1 மதிப்பெண்கள் குறைக்க மதுவுக்கு கிடைத்த மதிப்பெண்கள் 40

$$3x - y = 40 \qquad (1)$$

ஒவ்வொரு சரியான விடைக்கு 4 மதிப்பெண்கள் கொடுத்து ஒவ்வொரு தவறான விடைக்கு 2 மதிப்பெண்கள் குறைக்கும்போது மதுவுக்கு கிடைத்த மதிப்பெண்கள் 50

$$4x - 2y = 50 \qquad (2)$$

பிரதியீட்டு முறை

(1)ம் சமன்பாட்டிலிருந்து $y = 3x - 40$

(2)ம் சமன்பாட்டில் பிரதியிட $4x - 2(3x - 40) = 50$

$$4x - 6x + 80 = 50$$

$$-2x = 50 - 80 = -30$$

$$x = \frac{-30}{-2} = 15$$

xன் மதிப்பை சமன்பாடு (1)ல் பிரதியிட

$$3(15) - y = 40$$

$$45 - y = 40$$

$$y = 45 - 40 = 5$$

∴ தேர்வு வினாத்தாளில் உள்ள மொத்த வினாக்கள் $= 15 + 5 = 20$

இதை செய்

மேற்காணும் எடுத்துக்காட்டு-9ஐ நீக்கல் முறையில் தீர்.

எடுத்துக்காட்டு-10. மேரி தனது மகளிடம் 7 வருடங்களுக்கு முன் என் வயது அப்போதைய உன் வயதைப்போல் 7 மடங்கு இருந்தது. அவ்வாறே இப்போதிலிருந்து 3 வருடங்கள் கழித்து என் வயது, உன் வயதுக்கு மூன்று மடங்கு ஆகும் என்று கூறினார். மேரி மேலும் அவரது மகளின் தற்போதைய வயதை கண்டுபிடி.

தீர்வு : மேரியின் தற்போதைய வயது x வருடங்கள். அவருடைய மகளின் தற்போதைய வயது y வருடங்கள் என்க. 7 வருடங்களுக்கு முன் மேரி வயது $x - 7$ வருடங்கள். அவரின் மகள் வயது $y - 7$ வருடங்கள்.

$$x - 7 = 7(y - 7)$$

$$x - 7 = 7y - 49$$

$$x - 7y + 42 = 0 \qquad (1)$$

3 வருடங்களுக்கு பிறகு மேரி வயது $x + 3$ மேலும் மேரியின் மகள் வயது $y + 3$.

$$x + 3 = 3(y + 3)$$

$$x + 3 = 3y + 9$$

$$x - 3y - 6 = 0 \qquad (2)$$

மாறிநீக்கல் முறை :

சமன்பாடு 1 $\quad x - 7y = -42$

சமன்பாடு 2 $\quad x - 3y = 6$

$\underline{(-) \quad (+) \quad (-)}$

$-4y = -48$

x உறுப்புக்கு ஒரே மாதிரியான குறி ஆதலால் சமன்பாடு (1)லிருந்து சமன்பாடு (2)ஐ கழிக்க

$$y = \frac{-48}{-4} = 12$$

இந்த yன் மதிப்பை சமன்பாடு (2) ல் பிரதியிட

$$x\text{-}3\ (12) - 6 = 0$$

$$x = 36 + 6 = 42$$

எனவே மேரியின் தற்போதைய வயது 42வருடங்கள் மேலும் மேரியின் மகள் வயது 12 வருடங்கள்.

இதை செய்

எடுத்துக்காட்டு-10ஐ பிரதியீட்டுமுறையில் தீர்.

எடுத்துக்காட்டு-11. ஒரு புத்தகப்பதிப்பாளர் புதிய புத்தகத்தை தயார் செய்தார். புத்தகத்தின் விலை (திருப்புதல், தட்டச்சு, பதிப்பு ஆகியவற்றை சேர்த்து) ₹ 31.25 மேலும் புத்தகம் அச்சடிப்பதற்காக ₹ 320000 செலவு செய்தார். புத்தகத்தின் மொத்தவிலை ₹ 43.75 (பதிப்பாளருக்கு கிடைக்கும் தொகை) பதிப்பக செலவும், வருவாயும் சமமாக வேண்டுமானால் அவர் எத்தனை புத்தகங்களை விற்க வேண்டும்.

> பொருளின் உற்பத்தி செலவும். அவற்றின் விற்பனைமூலம் கிடைக்கும் வருவாயும் சமமாக இருக்கும் இடத்தை சமநிலை புள்ளி என்பர்

தீர்வு : பதிப்பாளர் சமநிலைப் புள்ளியை சேரவேண்டுமானால் செலவும், வருவாயும் சமமாக இருக்க வேண்டும். அச்சிட்டு விற்பனையான புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை x என்க. சமநிலைப் புள்ளி y என்க. பதிப்பாளரின் செலவு, வருவாய் சமன்பாடுகள் கீழ்வருமாறு,

அச்சிட்ட செலவு சமன்பாடு $\quad y = 320000 + 31.25x \quad (1)$

வருவாய் சமன்பாடு $\quad y = 43.75x \quad (2)$

இரண்டாம் சமன்பாட்டிலுள்ள yன் மதிப்பை சமன்பாடு (1)ல் பிரதியிட

$$43.75x = 3{,}20{,}000 + 31.25x$$

$$12.5x = 3{,}20{,}000$$

$$x = \frac{3{,}20{,}000}{12.5} = 25{,}600$$

25,600 புத்தகங்களை அச்சிட்டு விற்பனை செய்தால் அவர் சமநிலைப் புள்ளியை அடைவார்.

பயிற்சி - 4.2

கீழ்காணும் ஒவ்வொரு கணக்கிற்கும் நேரிய சமன்பாடுகளை எழுதி தீர்வை கண்டறியுங்கள்.

1. இரண்டு நபர்களின் வருவாய் விகிதங்கள் 9:7 மேலும் அவர்களின் செலவு விகிதங்கள் 4:3. ஒவ்வொருவரும் மாதத்திற்கு ₹2000 சேமிக்கிறார்கள் எனில் அவர்களின் மாத வருவாயைக் கண்டுபிடி.
2. ஓர் ஈரிலக்க எண் மேலும் அவற்றின் இலக்கங்களை மாற்றி அமைப்பதால் ஏற்படும் புதிய எண் ஆகியவற்றின் கூட்டுத் தொகை 66. இலக்கங்களின் வித்தியாசம் 2 எனில் அந்த எண்ணைக் கண்டுபிடி? இதுபோன்ற எண்கள் எத்தனை இருக்கும்?

3. இரண்டு மிகை நிரப்பு கோணங்களில் பெரிய கோணம் சிறிய கோணத்தை விட 18° அதிகம். கோணங்களைக் கண்டுபிடி.
4. ஐதராபாத்தில் ஆட்டோ கட்டணம் இரண்டு வகையாக உள்ளது. முதல் 3கி.மீ வரை குறைந்தபட்ச கட்டணம். அதற்குமேல் பயணம் செய்யும் கி.மீ ஏற்றவாறு வசூலிக்கப்படுகிறது.ஒருவர் 10கி.மீ தூரத்தை பயணம் செய்து மொத்தம் D166 கொடுத்தார். அதுபோலவே 15கி.மீ தூரத்தை பயணம் செய்து D256 ஐ கொடுத்தார் எனில்
   i. குறைந்தபட்ச கட்டணம் மேலும் ஒரு கிலோ மீட்டருக்கு ஆகும் செலவு என்ன?
   ii. ஒருவர் 25கி.மீ பயணம் செய்யும் போது எவ்வளவு பணம் கொடுக்க வேண்டும்?
5. ஒரு பின்னத்தின் பகுதி, தொகுதிகளுடன் 1ஐ கூட்ட அது $\frac{4}{5}$ ஆகிறது. அதுபோலவே பகுதி, தொகுதிகளிலிருந்து 5ஐ கழிக்க அது $\frac{1}{2}$ ஆகிறது. அந்த பின்னத்தைக் கண்டுபிடி.
6. ஒரு நெடுஞ்சாலையில் A, Bஎனும் இரண்டு இடங்கள் 100கி.மீ தூரத்தில் உள்ளன. A லிருந்து ஒரு காரும், Bலிருந்து ஒரு காரும் வெவ்வேறான வேகங்களுடன் ஒரே நேரத்தில் புறப்பட்டன. இரண்டு கார்களும் ஒரே திசையில் பயணம் செய்தால் 5மணிநேரங்கள் கழித்து சந்திக்கும். எதிரெதிர் திசையில் பயணம் செய்தால், 1மணி நேரம் கழித்து சந்திக்கும். இரண்டு கார்களின் வேகங்களைக் கண்டுபிடி.
7. இரண்டு நிரப்பு கோணங்களில் பெரிய கோணம், சிறிய கோணத்தின் இரண்டு மடங்கைவிட 3° குறைவு எனில் அந்த கோணங்களைக் கண்டுபிடி.
8. ஒரு அகராதியில் 1382 பக்கங்கள் உள்ளன. இதை இரண்டு பாகங்களாக பிரிக்கும் போது இரண்டாம் பாகத்தில் முதல் பாகத்தைவிட 64பக்கங்கள் அதிகமாக உள்ளன எனில் ஒவ்வொரு பாகத்திலுமுள்ள பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடி.
9. ஓர் அமில விற்பனைக் கடையில் இரண்டு வகையான ஹைட்ரோகுளோரிக் அமிலங்கள் உள்ளன. ஒன்று 50% நீர்த்தது, மற்றொன்று 80% நீர்த்தது. 68% நீர்த்த ஹைட்ரோ குளோரிக் அமிலம் 100மி.லி தேவைப்படுமானால் இரண்டு வகைகளையும் எந்த பரிமாணத்தில் எடுத்துகொள்ள வேண்டும்?
10. உன்னிடம் D12000 ரொக்கம் உள்ளது என்க. அதில் கொஞ்ச பாகத்தை 10% வட்டிக்கும், மீதியை 15% வட்டிக்கும் சேமிப்பு செய்ய வேண்டும். மொத்தமாக 12% வட்டி கிடைக்க வேண்டுமானால், எந்த வட்டிவீதத்தில் எவ்வளவு பணம் சேமிக்க வேண்டும்?

4.4 இரண்டு மாறிகளில் நேரிய சமன்பாடுகளாக மாற்றக்கூடிய சமன்பாடுகள்

சில ஜோடி சமன்பாடுகள் நேரிய சமன்பாடுகளாக இருக்காது. ஆனால் சரியான பிரதியீடுகளின் மூலம் அவற்றை ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளாக மாற்றலாம். அவ்வாறான ஜோடி சமன்பாடுகளை தீர்த்தலை பற்றி பார்ப்போம். ஓர் உதாரணத்தை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-12. கீழ்காணும் ஜோடி சமன்பாடுகளை தீர்

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y} = 13$$

$$\frac{5}{x}-\frac{4}{y} = -2$$

தீர்வு : தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட ஜோடி சமன்பாடுகளை கவனியுங்கள் அவை நேரிய சமன்பாடுகள் அல்ல (ஏன்?)

நமக்கு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் $2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13$ (1)

$$5\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \qquad (2)$$

நாம் $\frac{1}{x} = p$ மேலும் $\frac{1}{y} = q$, என பிரதியிட நமக்கு கீழ்காணும் நேரிய ஜோடி சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றது.

$$2p + 3q = 13 \qquad (3)$$

$$5p - 4q = -2 \qquad (4)$$

q ன் குணகங்கள் 3,4 இவைகளின் மீ.சி.ம 12; மாறியை நீக்கும்முறை மூலம்

சமன்பாடு $(3) \times 4$ $8p + \cancel{12q} = 52$

சமன்பாடு $(4) \times 3$ $\underline{15p - \cancel{12q} = -6}$ 'q' உறுப்புக்கு வெவ்வேறான குறிகள் இருப்பதால் சமன்பாடுகளை கூட்ட

$23p = 46$

$$p = \frac{46}{23} = 2$$

p ன் மதிப்பை சமன்பாடு (3)ல் பிரதியிட

$$2(2) + 3q = 13$$

$$3q = 13 - 4 = 9$$

$$q = \frac{9}{3} = 3$$

ஆனால், $\frac{1}{x} = p = 2$ $\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{y} = q = 3$ $\Rightarrow y = \frac{1}{3}$

எடுத்துக்காட்டு-13. கவிதா தனது வீட்டில் இரண்டு அறைகளை கட்ட விரும்பினாள். அவள் வீடு கட்டும் கூலியாட்களை விசாரித்தபோது 6 ஆண்கள் 8 பெண்கள் சேர்ந்து 14நாட்களில் அறைகளை கட்டி முடிப்பார்கள் எனத் தெரிந்தது. ஆனால் கவிதா 10 நாட்களிலேயே கட்டுமான வேலையை முடிக்க விரும்பினாள். 8 ஆண்கள் 12 பெண்கள் சேர்ந்து 10 நாட்களில் அந்த வேலையை முடிப்பார்கள் என தெரிய வந்தது. ஒரு ஆண் மட்டும் அல்லது ஒரு பெண் மட்டும் தனியாக அந்த வேலையை எத்தனை நாட்களில் முடிப்பார்கள்?

தீர்வு : ஒரு ஆண் அந்த வேலையை முடிக்க ஆகும் காலம் $= x$ நாட்கள் என்க.

ஒரு ஆண் மட்டும் ஒருநாளில் செய்யக்கூடிய பகுதி வேலை $= \frac{1}{x}$ ஆகும்.

ஒரு பெண் அந்த பகுதி வேலையை முடிக்க ஆகும் காலம் $= y$ நாட்கள் என்க.

ஒரு பெண் மட்டும் ஒருநாளில் செய்யக்கூடிய பகுதி வேலை $= \frac{1}{y}$ ஆகும்.

8 ஆண்கள் மேலும் 12 பெண்கள் சேர்ந்து அந்த வேலையை 10 நாட்களில் முடிப்பார்கள்.

அதாவது 8 ஆண்கள், 12 பெண்கள் ஒருநாளில் செய்யக்கூடிய பகுதிவேலை $= \frac{1}{10}$ (1)

8 ஆண்கள் ஒரு நாளில் செய்யக்கூடிய பகுதி வேலை $8 \times \frac{1}{x} = \frac{8}{x}$

அதேபோல், 12 பெண்கள் ஒருநாளில் செய்யக்கூடிய பகுதி வேலை $12 \times \frac{1}{y} = \frac{12}{y}$

8ஆண்கள், 12பெண்கள் ஒருநாளில் செய்யக்கூடிய பகுதி வேலையின் மொத்தம்$= \frac{8}{x} + \frac{12}{y}$ (2)

(1), (2) களை சமன்படுத்துவதால் $\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = \frac{1}{10}$

$$10\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = 1$$

$$\frac{80}{x} + \frac{120}{y} = 1 \qquad (3)$$

மேலும் 6 ஆண்கள், 8 பெண்கள் அந்த வேலையை 14 நாட்களில் முடிப்பார்கள், 6 ஆண்கள் மேலும் 8 பெண்கள் ஒருநாளில் செய்யக்கூடிய பகுதி வேலை $= \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$

$$\Rightarrow \quad 4\left(\frac{6}{x} + \frac{8}{y}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{84}{x} + \frac{112}{y}\right) = 1 \qquad (4)$$

சமன்பாடு (3) மேலும் (4)யை கவனியுங்கள். அவை நேரிய சமன்பாடுகளா? அவற்றை எவ்வாறு தீர்க்கலாம்? $\frac{1}{x} = u$ மேலும் $\frac{1}{y} = v$ என பிரதியிடுவதன் மூலம் அவைகளை நாம் நேரிய சமன்பாடுகளாக மாற்றலாம்.

(3)ம் சமன்பாட்டை மாற்ற $80u + 120v = 1$ (5)

$84u + 112v = 1$ (6)

80,84ன் மீ.சி.ம 1680. நீக்கல் முறையை பயன்படுத்தும் போது

சமன்பாடு $(5) \times 21$ $(21 \times 80)u + (21 \times 120)v = 21$

சமன்பாடு $(6) \times 20$ $(20 \times 84)u + (20 \times 112)v = 20$

$$\begin{aligned} \cancel{1680u} + 2520v &= 21 \\ \cancel{1680u} + 2240v &= 20 \\ (-) \quad (-) \quad &(-) \\ \hline 280v &= 1 \end{aligned}$$

u ன் குறியீடுகள் ஒரேமாதிரியாக இருப்பதால் கழிக்க வேண்டும்.

$$v = \frac{1}{280}$$

v ன் மதிப்பை (5)ல் பிரதியிட $80u + 120 \times \frac{1}{280} = 1$

$$80u = 1 - \frac{3}{7} = \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$u = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{7} \times \frac{1}{\underset{20}{\cancel{80}}} = \frac{1}{140}$$

எனவே ஒரு ஆண் அந்த வேலையை 140 நாட்களிலும், ஒரு பெண் அவ்வேலையை 280 நாட்களிலும் செய்து முடிப்பார்கள்.

எடுத்துக்காட்டு-14. ஒருவர் 370கி.மீ தூரத்தை இரயிலிலும், காரிலும் பயணிக்கிறார். 250கி.மீ தூரத்தை இரயிலிலும், மீதமுள்ள தூரத்தை காரிலும் கடக்க அவருக்கு 4மணி நேரம் ஆகிறது. இதே தூரத்தை 130கி.மீ தூரத்தை இரயிலிலும் மீதமுள்ள தூரத்தை காரிலும் பயணித்தால் முன்பைவிட 18 நிமிடங்கள் அதிகமாக ஆகிறது எனில் இரயில் மேலும் காரின் வேகத்தைக் கண்டுபிடி?

தீர்வு : இரயிலின் வேகம் x கி.மீ/ம, காரின் வேகம் y கி.மீ/ம என்க.

காலம் $= \frac{\text{தூரம்}}{\text{வேகம்}}$ என நாம் அறிவோம்.

ஒன்றாம் நிகழ்வில் இரயிலுக்கு ஆகும் நேரம் $= \frac{250}{x}$ மணிகள்

காருக்கு ஆகும் நேரம் $= \frac{120}{y}$ மணிகள்

மொத்த காலம் = இரயில் பயணத்திற்கு ஆகும் காலம் + கார் பயணத்திற்கு ஆகும் காலம் $= \frac{250}{x} + \frac{120}{y}$

கணக்கின்படி மொத்த பயணக்காலம் 4 மணிகள் எனவே

$$\frac{250}{x} + \frac{120}{y} = 4$$

$$\frac{125}{x} + \frac{60}{y} = 2 \qquad \rightarrow (1)$$

மீண்டும் 130கி.மீ தூரத்தை இரயிலும். மீதமுள்ள தூரத்தை காரிலும் பயணிக்கிறார்

130கி.மீ இரயில் பயணத்திற்கு ஆகும் காலம் $= \frac{130}{x}$ மணிகள்.

240கி.மீ (370-130) கார் பயணத்திற்கு ஆகும் காலம் $= \frac{240}{y}$ மணிகள்

மொத்தகாலம் $= \frac{130}{x} + \frac{240}{y}$

கணக்கின்படி மொத்த பயணக்காலம் 4மணி 8 நிமிடங்கள் i.e. $4\frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{60}_{10}}$ மணி $= 4\frac{3}{10}$ மணி

அதாவது $\quad \frac{130}{x} + \frac{240}{y} = \frac{43}{10} \qquad (2)$

சமன்பாடுகள் (1), (2)ல் $\frac{1}{x} = a,\ \frac{1}{y} = b$ என பிரதியிட

$$125a + 60b = 2 \qquad (3)$$

$$130a + 240b = 43/10 \qquad (4)$$

60,240ன் மீ.சி.ம 240. நீக்கல் முறையை பயன்படுத்த

சமன்பாடு $(3) \times 4 \qquad 500a+\cancel{240b}= 8$

சமன்பாடு $(4) \times 1 \qquad 130a+\cancel{240b} = \frac{43}{10}$ (ஒரேமாதிரி குறி ஆகையால் கழிக்க வேண்டும்)

$\quad$ (-) $\quad$ (-) $\quad$ (-)

$$370a = 8 - \frac{43}{10} = \frac{80-43}{10} = \frac{37}{10}$$

$$a = \frac{\cancel{37}}{10} \times \frac{1}{\cancel{370}_{10}} = \frac{1}{100}$$

$a = \dfrac{1}{100}$ யை சமன்பாடு (3)ல் பிரதியிட

$$\left(\overset{5}{\cancel{125}} \times \frac{1}{\cancel{100}_{4}} \right) + 60b = 2$$

$$60b = 2 - \frac{5}{4} = \frac{8-5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$b = \frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{1}{\cancel{60}_{20}} = \frac{1}{80}$$

எனவே, $a = \dfrac{1}{100}$ மேலும் $b = \dfrac{1}{80}$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{100} \text{ மேலும் } \frac{1}{y} = \frac{1}{80}$$

$x = 100$ கி.மீ/ம மேலும் $y = 80$ கி.மீ/ம

எனவே இரயிலின் வேகம் 100கி.மீ/ம மேலும் காரின் வேகம் 80கி.மீ/ம

பயிற்சி - 4.3

கீழ்காணும் ஜோடி சமன்பாடுகளை நேரிய ஜோடி சமன்பாடுகளாக மாற்றி அவற்றின் தீர்வைக் கண்டுபிடி.

i) $\dfrac{5}{x-1} + \dfrac{1}{y-2} = 2$

$\dfrac{6}{x-1} - \dfrac{3}{y-2} = 1$

ii) $\dfrac{x+y}{xy} = 2$

$\dfrac{x-y}{xy} = 6$

iii) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$\dfrac{4}{\sqrt{x}} - \dfrac{9}{\sqrt{y}} = -1$

iv) $6x+3y = 6xy$

$2x + 4y = 5xy$

v) $\dfrac{5}{x+y} - \dfrac{2}{x-y} = -1$

vi) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 13$

$\frac{15}{x+y} + \frac{7}{x-y} = 10$ $x\neq0, y\neq0$ எனில்

$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$ $x\neq0, y\neq0$ எனில்

vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$

$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

viii) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

2. கீழ்காணும் கணக்குகளுக்கு ஜோடி சமன்பாடுகளை எழுதி அவற்றின் தீர்வைக் கண்டுபிடியுங்கள்.

i. ஒரு படகு நீரோட்ட திசையின் எதிர்திசையில் 30கி.மீ தூரத்தையும், நீரோட்ட திசையில் 44கி.மீ தூரத்தையும் கடக்க 10 மணி ஆகிறது. அதே படகு நீரோட்ட எதிர்திசையில் 40கி.மீ தூரத்தையும், நீரோட்ட திசையில் 55கி.மீ தூரத்தை கடக்க 13 மணிநேரம் தேவைப்படுகிறது எனில் நீரோட்டத்தின் வேகத்தையும் நிலையான நீரில் அதன் படகின் வேகத்தையும் கண்டுபிடி?

ii. ராம் 600கி.மீ தூரத்தை பயணிக்க இரயிலையும், காரையும் பயன்படுத்துகிறார். 120கி.மீ தூரத்தை இரயிலும்,, மீதமுள்ள தூரத்தை காரிலும் கடக்க அவருக்கு 8 மணிநேரம் ஆகிறது. அதேசமயம் 200கி.மீ தூரத்தை இரயிலிலும் மீதி தூரத்தை காரிலும் கடக்கும் போது முன்பை விட 20 நிமிடங்கள் அதிகமாக ஆகிறது. இரயில் மேலும் காரின் வேகத்தை கண்டுபிடி?

iii. இரண்டு பெண்கள், 5 ஆண்கள் ஒரு தையல் வேலையை 4 நாட்களில் முடிப்பார்கள். அதே வேலையை 3 பெண்கள் மேலும் 6 ஆண்கள் 3 நாட்களில் முடிப்பார்கள் எனில் ஒரு பெண் அல்லது ஒரு ஆண் மட்டும் அந்த வேலையை எத்தனை நாட்களில் முடிப்பார்கள்?

விருப்பப் பயிற்சி (தேர்வுக்குரிய வினாக்கள் அல்ல)

1. கீழ்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்:-

(i) $\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 2$

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 4$

(ii) $\frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{3} = 8$

$\frac{x-1}{3} + \frac{y+1}{2} = 9$

(iii) $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5$

$\frac{x}{2} - \frac{y}{9} = 6$

(iv) $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}$

$\sqrt{5}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}$

(v) $\frac{ax}{b} - \frac{by}{a} = a + b$

$ax - by = 2ab$

(vi) $2^x + 3^y = 17$

$2^{x+2} - 3^{y+1} = 5$

2. ஒரு பரிசோதனையில் விலங்குகளுக்கு குறிப்பிட்ட அளவு உணவு கொடுக்கப்பட வேண்டும். ஒவ்வொரு விலங்குகளுக்கும் உணவுடன் கூட 20கி. புரதம், 6கி. கொழுப்பு அளிக்கப்பட வேண்டும். பரிசோதனை ஆய்வாளர் A,B எனும் இருவகை உணவுக்கலவையை வாங்கினார். கலவை Aயில் 10% புரதம், 6% கொழுப்பு உள்ளது. கலவை Bல் 20% புரதம், 2% கொழுப்பு உள்ளது எனில் ஒவ்வொரு கலவைக்கும் எத்தனை கிராம்களை பயன்படுத்த வேண்டும்.

செயல்திட்டம்

- அன்றாட வாழ்க்கைச்சூழலில் இருந்து இரண்டு நேரிய சமன்பாடுகளை உருவாக்கி வரைபடத்தில் வரைந்து விடைகளை கண்டறிக.

நாம் கற்றவை

1. ஒரே மாதிரியான இரு மாறிகளை கொண்ட இரண்டு நேரிய சமன்பாடுகளை இரண்டு மாறிகளை கொண்ட நேரிய ஜோடி சமன்பாடுகள் எனப்படுகின்றன.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ (a_2^2 + b_2^2 \neq 0),$$ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ஆகியவை மெய்யெண்கள்.

2. இரண்டு மாறிகளை கொண்ட நேரிய ஜோடி சமன்பாடுகளை தீர்க்க பல முறைகள் உள்ளன.

3. இரண்டு மாறிகளை கொண்ட நேரிய ஜோடி சமன்பாடுகள் வரைபடம் இரண்டு நேர்கோடுகளால் குறிக்கப்படுகிறது.

   i. இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் வெட்டிகொண்டால் அவற்றிக்கு ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே இருக்கும். இவ்வாறான சமன்பாடுகள் இசைந்த சமன்பாடுகள் ஆகும்.

   ii. இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒன்றினால் அவற்றிற்கு முடிவிலா தீர்வுகள் இருக்கும். இவ்வாறான சமன்பாடுகள் சார்நிலை சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

   iii. இரண்டு நேர்கோடுகள் இணை எனில் அவற்றிற்கு தீர்வுகள் இருக்காது. இவ்வாறான சமன்பாடுகள் ஒவ்வா சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

4. நேரிய ஜோடி சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை பின்வரும் முறைகளில் காணலாம்.

   i. மாதிரிமுறை ii.வரைபடமுறை

   iii. இயற்கணித முறை - பிரதியீட்டு முறை மேலும் நீக்கல் முறை

5. சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிகளின் கெழுக்களுக்கும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தன்மைக்கும் இடையே தொடர்புண்டு.

   i. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ எனில் ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் இசைந்த சமன்பாடுகள் ஆகும்.

   ii. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ எனில் ஜோடி சமன்பாடுகள் ஒவ்வா சமன்பாடுகள் ஆகும்.

   iii. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ எனில் ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகள் சார்நிலை சமன்பாடுகள் ஆகும்.

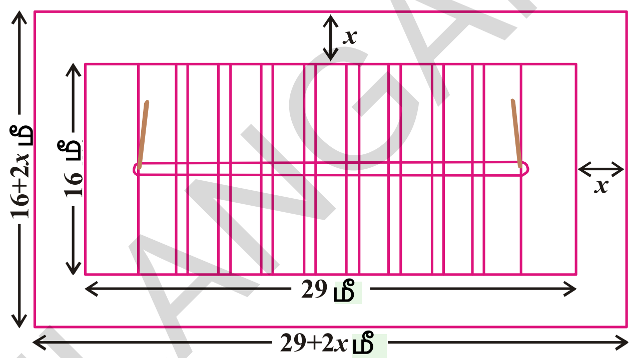
6. அன்றாட வாழ்க்கை நிகழ்வுகளை சமன்பாடாக எழுதும்போது அவை நேரிய சமன்பாடுகளாக இருப்பதில்லை. ஆனால் சரியான பிரதியீடுகளின் மூலம் அவைகளை ஜோடி நேரிய சமன்பாடுகளாக மாற்ற முடியும்.

அத்தியாயம்

5 இருபடிச் சமன்பாடுகள்
(QUADRATIC EQUATIONS)

5.1 அறிமுகம்

புத்தூர் நகராட்சி உயர்நிலைப்பள்ளியின் விளையாட்டுக்குழு தனது பள்ளி வளாகத்தில் 29 மீ. × 16 மீ. அளவுகளுடன் ஒரு கோ-கோ விளையாட்டு மைதானத்தை வரைய நினைத்தது. இதற்காக அவர்களுக்கு 558ச.மீ பரப்பளவுள்ள ஒரு செவ்வகவடிவ மனை உள்ளது. அவர்கள் கோ-கோ மைதானத்தை சுற்றிலும் ரசிகர்களுக்காக சமஅகலமுள்ள இடத்தை ஒதுக்க நினைத்தனர். அந்த அகலம் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?



ரசிகர்களுக்காக ஒதுக்க நினைத்த அந்த காலி இடத்தின் அகலம் xமீ என்க. படத்திலிருந்து,

செவ்வக வடிவ தளத்தின் நீளம் $= (29 + 2x)$ மீ.

அதன் அகலம் $= (16 + 2x)$ மீ

இந்த செவ்வக வடிவ மனையின் பரப்பளவு = நீளம் × அகலம்

$= (29 + 2x)(16 + 2x)$

ஆனால், இந்த மனையின் பரப்பளவு = 558ச.மீ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore\ (29 + 2x)(16 + 2x) = 558$$
$$\therefore\ 4x^2 + 90x + 464 = 558$$
$$4x^2 + 90x - 94 = 0 \quad \text{(இதை இருபுறமும் 2ஆல் வகுத்தால்)}$$
$$2x^2 + 45x - 47 = 0$$
$$2x^2 + 45\,x - 47 = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

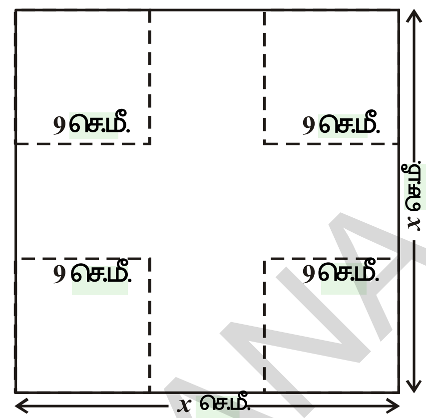
நாம் கீழ்வகுப்புகளில் $ax + b = c$ வடிவிலுள்ள கோட்டு சமன்பாடுகளின் தீர்வான 'x' ன் மதிப்பை கண்டோம். அவ்வாறே, சமன்பாடு (1)ன் தீர்வான xன் மதிப்பு ரசிகர்களுக்கு ஒதுக்கப்படும் காலி இடத்தின் அகலமாகும். இதுபோன்ற மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை உங்களால் ஊகிக்க முடியுமா?

மற்றொரு எடுத்துக்காட்டை ஆராய்வோம்.

ராணியிடம் ஒரு சதுரவடிவ உலோகத்தகடு உள்ளது. அடுத்துள்ள படத்தில் காட்டியபடி, இதன் நான்கு மூலைகளிலிருந்து 9செ.மீ பக்க அளவு கொண்ட சதுரங்களை நீக்கிவிட்டாள். மீதமுள்ள பாகத்துடன் ஒரு மூடியற்ற பெட்டியை தயார் செய்தாள். இவ்வாறு தயாரான பெட்டியின் கன அளவு 144க.செ.மீ எனில் முதலில் எடுத்துக்கொண்ட உலோகத்தகட்டின் பக்க நீளத்தை காணமுடியுமா?

சதுர வடிவ உலோகத் தகட்டின் பக்கத்தின் நீளம் 'x' செ.மீ என்க. தயாரித்த பெட்டியின் அளவுகள்

$$9 \text{ செ.மீ} \times (x\text{-}18) \text{ செ.மீ.} \times (x\text{-}18) \text{ செ.மீ.}$$



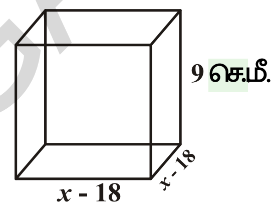
பெட்டியின் கனஅளவு 144 க.செ.மீ.

ஆகவே, $9\,(x\text{-}18)\,(x\text{-}18) = 144$

$$(x\text{-}18)^2 = 16$$

$$x^2 - 36x + 308 = 0 \qquad ..... (2)$$

அதாவது, இந்த சமன்பாட்டை நிறைவுபடுத்தும் 'x'ன் மதிப்பே, முதலில் எடுத்துக்கொண்ட உலோகத்தகட்டின் பக்கம் ஆகும். (1), (2) சமன்பாடுகளிலுள்ள LHSஐ ஆராயவும். அவை இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளா?



$ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ வடிவிலுள்ள இதுபோன்ற இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப்பற்றி நாம் முன் அத்தியாயத்தில் படித்தோம்.

(1),(2) சமன்பாடுகளிலுள்ள LHS என்பவை இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகள். ஆகவே, இது இருபடிச் சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

இந்த அத்தியாயத்தில் இருபடிச் சமன்பாடுகளைப்பற்றியும், அவற்றின் தீர்வுகளை காண்பதற்கான பல்வேறு முறைகளைப் பற்றியும் படிக்கலாம்.

5.2 இருபடிச் சமன்பாடுகள்

x ஐ மாறியாக கொண்ட ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$, என்ற சமன்பாடு வடிவில் இருக்கும். இங்கு a, b, c மெய்யெண்கள். மேலும் $a \neq 0$. எடுத்துக்காட்டாக $2x^2 + x - 300 = 0$ என்பது ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும். அவ்வாறே, $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$, $1 - x^2 + 300 = 0$ போன்றவையும் இருபடிச் சமன்பாடுகளே ஆகும்.

$p(x)$ என்பது ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் $p(x) = 0$ வடிவத்திலுள்ள அனைத்து சமன்பாடுகளும் இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும். ஆனால் $p(x)$ கோவையிலுள்ள உறுப்புகளை அவற்றின் அடுக்குகளைப் பொறுத்து இறங்கு வரிசையில் எழுதினால் அது இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் ஆகும். அதாவது $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ என்பது இருபடிசமன்பாட்டின் பொது வடிவம் என்றழைக்கப்படும். $y = ax^2 + bx + c$ என்பது இருபடிச் சார்பு எனப்படும்.

முயற்சி செய்

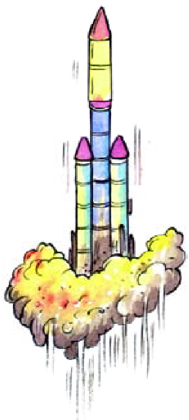
கீழ்கண்ட சமன்பாடுகள் இருபடிச் சமன்பாடுகளா? இல்லையா? எனக்கூறு

(i) $x^2 - 6x - 4 = 0$ (ii) $x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

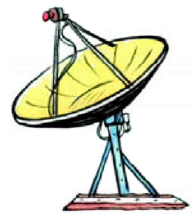
(iii) $7x = 2x^2$ (iv) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2$

(v) $(2x + 1)\,(3x + 1) = b(x - 1)\,(x - 2)$ (vi) $3y^2 = 192$

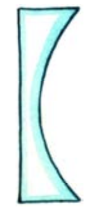
இருபடிச் சார்புகள் பலவழிகளில் பயன்படுகின்றன. அவற்றில் சில :



1. ஒரு ராக்கெட்டை மேல் நோக்கி ஏவும்போது, ராக்கெட்டின் பாதையானது ஒரு இருபடி சார்பால் வரையறுக்கப்படுகிறது.
2. துணைக்கோள்களிலிருந்து சிக்னல்களை ஈர்க்கும் டிஷ் குடைகளின் வடிவங்கள், டெலிஸ்கோப்களில் பயன்படுத்தப்படும் கண்ணாடிகளின் வடிவங்கள், கண்களுக்கு அணியும் கண்ணாடிகளின் வடிவங்கள், பூகோள பொருட்களின் எல்லை வழிகள் போன்றவை இருபடிச் சமன்பாடுகளால் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

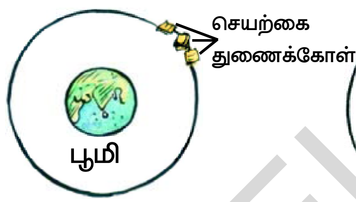


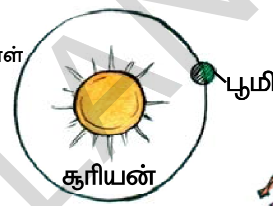
டிஷ் குடை

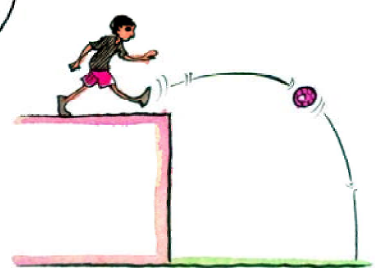


பிரதிபலிக்கும் கண்ணாடி

கண் கண்ணாடியின் ஆடிகள்







3. ஏவப்பட்ட ஏவுகணையின் பாதையை ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டால் வரையறுப்பர்.
4. ஓடிக்கொண்டிருக்கும் வாகனத்தை, திடீரென்று நிறுத்தினால் அது உடனே நிற்காமல், சிறிது தூரம் சென்று நிற்கும் என நமக்குத் தெரியும். அதுபோன்ற தூரங்களை கணக்கிடவும் இருபடிச் சமன்பாடு பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு-1. கீழ்கண்டவற்றுக்கு சரியான சமன்பாடுகளை எழுதுக.

i. ராஜு, ராஜேந்தர் ஆகிய இருவரிடமும் 45 கோலிகள் உள்ளன. இருவரும் ஆளுக்கு 5 கோலிகளை தொலைத்துவிட்டனர். இருவரிடமும் மீதியுள்ள கோலிகளின் பெருக்கற்பலன் 124. இருவரிடமும் முதலில் இருந்த கோலிகளின் எண்ணிக்கைக்கு சமன்பாட்டை எழுதுக.

ii. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் 25செ.மீ மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் வித்தியாசம் 5செ.மீ எனில் இவ்விரண்டு பக்கங்களின் நீளத்திற்கு ஒரு சமன்பாட்டை எழுதுக.

தீர்வு : i. ராஜீவிடமுள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கை x என்க.

ராஜேந்தரிடமுள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கை $= 45 - x$ (ஏன்?).

5 கோலிகளை தொலைத்த பிறகு ராஜீவிடமுள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கை $= x - 5$

5 கோலிகளை தொலைத்த பிறகு ராஜேந்திரடமுள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கை

$$= (45 - x) - 5$$

$$= 40 - x$$

மீதமுள்ள கோலிகளின் எண்ணிக்கைகளின் பெருக்கல் பலன் $= (x - 5)(40 - x)$

$$= 40x - x^2 - 200 + 5x$$

$$= -x^2 + 45x - 200$$

அதாவது, $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (தரவு)

i.e., $-x^2 + 45x - 324 = 0$ (இதை இருபுறமும் (-)ஆல் பெருக்கினால்)

i.e., $x^2 - 45x + 324 = 0$

'x'ன் மதிப்பே ராஜீவிடம் முதலில் இருந்த கோலிகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

இதுவே இந்தச் சமன்பாட்டை நிறைவுபடுத்தும்

$x^2 - 45x + 324 = 0$ இதுவே நமக்குத் தேவையான கணிதச் சமன்பாடு ஆகும்.

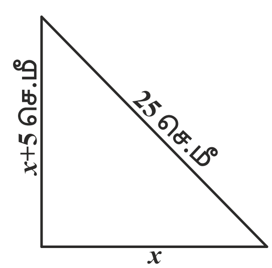
ii) சிறிய பக்கத்தின் நீளம் x செ.மீ எனக்கொண்டால்,

பெரிய பக்கத்தின் நீளம் $= (x + 5)$ செ.மீ.

கொடுக்கப்பட்ட கர்ணத்தின் நீளம் = 25செ.மீ

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில்

பக்கம்^{2}+பக்கம்^{2} = கர்ணம்^{2} என நமக்குத் தெரியும்



ஆகவே, $x^2 + (x + 5)^2 = (25)^2$

$$x^2 + x^2 + 10x + 25 = 625$$

$$2x^2 + 10x - 600 = 0$$

$$x^2 + 5x - 300 = 0$$

இந்த சமன்பாட்டின் தீர்வான x ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்ட செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களை கொடுக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு-2. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் இருபடிச் சமன்பாடுகளா? இல்லையா? எனக்கூறு.

i. $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ii. $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

iii. $x(2x + 3) = x^2 + 1$ iv. $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

தீர்வு : i. LHS $= (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

அதாவது, $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ ஐ

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$ என எழுதலாம்.

$x^2 - 6x + 8 = 0$

இது $ax^2 + bx + c = 0$ வடிவிலுள்ள இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும்.

ii. இங்கு LHS $= x(x+1) + 8 = x^2 + x + 8$

RHS $= (x+2)(x-2) = x^2 - 4$

$\therefore x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$x^2 + x + 8 - x^2 + 4 = 0$

$\therefore \ x + 12 = 0$

இது $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ வடிவில் இல்லை.

ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடு அல்ல.

iii. இங்கு, LHS $= x\,(2x+3) = 2x^2 + 3x$

அதாவது $x\,(2x+3) = x^2 + 1$ ஐ

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$ என எழுதலாம்

அதாவது, $x^2 + 3x - 1 = 0$

இது $ax^2 + bx + c = 0$ வடிவில் உள்ளது.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடாகும்.

iv. இங்கு, LHS $= (x+2)^3$
$$= (x+2)^2\,(x+2)$$
$$= (x^2 + 4x + 4)\,(x+2)$$
$$= x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8$$
$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

ஆகவே, $(x+2)^3 = x^3 - 4$ ஐ

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$ என எழுதலாம்

i.e., $6x^2 + 12x + 12 = 0$ அல்லது $x^2 + 2x + 2 = 0$

இது $ax^2 + bx + c = 0$ வடிவில் உள்ளது.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு : மேற்கண்ட உதாரணங்களின் (ii)வது சமன்பாடு பார்ப்பதற்கு இருபடிச் சமன்பாடு போல் தெரியும் ஆனால் அது இருபடிச் சமன்பாடு அல்ல. அவ்வாறே (iv) வது சமன்பாடு முப்படி சமன்பாடு போல் தோன்றினாலும் அது இருபடிச் சமன்பாடே ஆகும்.

ஆகவே, ஒரு சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடா? இல்லையா? என கூறுவதற்கு முன் அதை சுருக்கிப் பார்த்து கூறுவது நல்லது.

பயிற்சி - 5.1

1. கீழ்கண்ட சமன்பாடுகள் இருபடிச் சமன்பாடா? இல்லையா? எனக்கூறு.

i. $(x+1)^2 = 2(x-3)$ ii. $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

iii. $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ iv. $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

v. $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ vi. $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

vii. $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ viii. $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

2. கீழ்கண்டவைகளுக்கு சரியான இருபடிச் சமன்பாடுகளை கண்டுபிடி

i. ஒரு செவ்வகவடிவ மனையின் பரப்பளவு 528ச.மீ அதன் நீளம் அகலத்தைப் போல இரு மடங்குக்கு 1மீ அதிகம் எனில் அதன் நீள, அகலங்களை காண்பதற்கான இருபடிச் சமன்பாட்டை எழுதுக.

ii. அடுத்தடுத்த இரண்டு மிகை முழுக்களின் பெருக்கற்பலன் 306 எனில், அந்த எண்களை காண்பதற்கான இருபடிச் சமன்பாட்டை எழுதுக.

iii. மோகனின் தாய் மோகனை விட 26 வருடங்கள் பெரியவர். 3 வருடங்கள் கழித்து இருவரின் வயதுகளின் பெருக்கற்பலன் 360 எனில் மோகனின் வயதை காண்பதற்கான இருபடிச் சமன்பாட்டை எழுதுக.

iv. ஒரு ரயில் தனது சீரான வேகத்துடன் 480கி.மீ தூரம் பயணம் செய்கிறது. அது தனது வேகத்திலிருந்து 8கி.மீ வேகத்தை குறைத்தால் அது சேரவேண்டிய இடத்தைச் சேர 3 மணி நேரம் அதிகமாகிறது எனில் அந்த ரயிலின் வேகத்தை காண்பதற்கான இருபடிச் சமன்பாட்டை எழுதுக.

5.3 காரணிப்படுத்துதல் மூலம் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு தீர்வுகாணல்

நாம் அன்றாட வாழ்வில் எதிர்கொள்ளும் சம்பவங்களை, x எனும் மாறியை பயன்படுத்தி, இருபடிச் சமன்பாடு வடிவில் எவ்வாறு தெரிவிப்பது என்பதைப்பற்றி இப்போது பார்ப்போம். முதலில் 'x' ன் மதிப்பை காணவேண்டும்.

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம். இதில் x க்கு பதிலாக 1ஐ பிரதியிட்டால் $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 = \text{RHS}$ $x=1$க்கு சமன்பாடு நிறைவுபெற்றதால் $x=1$ஐ $2x^2 - 3x + 1 = 0$க்கு தீர்வு என்கிறோம்.

$\therefore$ $x = 1$ என்பது இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

$x=1$ என்பது $2x^2 - 3x + 1$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சிய மதிப்பு ஆகும் என்பதை நினைவில் கொள்க. சாதாரணமாக, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$க்கு $a\alpha^2 + b\,\alpha + c = 0$ எனில் α வை இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலம் எனப்படும். மேலும் **$a=\alpha$ என்பதை இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு என்றும் கூறலாம். அல்லது α என்பது இருபடிச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது எனலாம்.**

***$ax^2 + bx + c$* என்ற இருபடி கோவையின் பூச்சிய மதிப்புகளும், *$ax^2 + bx + c=0$* இருபடி சமன்பாட்டின் மூலங்களும் ஒன்றே** என்பதை அறியவும்.

3ஆம் அத்தியாயத்தில் ஒரு இருபடிக் கோவைக்கு அதிகபட்சமாக இரண்டு பூச்சிய மதிப்புகள் இருக்குமென நாம் கவனித்தோம். ஆகவே, ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு அதிகபட்சம் இரண்டு மூலங்களே இருக்கும். (ஏன்?)

நாம் 9ஆம் வகுப்பில், நடு உறுப்பை இரண்டாக பிரிப்பதன் மூலம் இருபடிச் சமன்பாட்டின் காரணிகளை எவ்வாறு காண்பது என்பதைப் பற்றி தெரிந்து கொண்டோம். இதே வழிமுறையை பயன்படுத்தி ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-3. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ன் மூலங்களை காரணிபடுத்தல் முறையில் கண்டுபிடி.

தீர்வு : முதலில் நடு உறுப்பை இரண்டாக பிரிப்போம். $ax^2 + bx + c$ ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் நடு உறுப்பை பிரிப்பதற்கு $p + q = b,\ p \times q = a \times c$ ஆகும்படியாக p,q எனும் இரண்டு எண்களை காணவேண்டுமென நினைவுக்கு கொண்டு வருக. அதாவது $2x^2 - 5x + 3$ல் நடு உறுப்பை பிரிக்க $p + q = -5, p \times q = 2 \times 3 = 6$ ஆகும் படியாக p, q எனும் இரண்டு எண்களை காணவேண்டும். இதற்காக, 6ன் காரணிகளின் ஜோடிகளை தயாரிக்க வேண்டும். அவை $(1, 6), (-1, -6); (2, 3); (-2, -3)$ இவற்றில் $(-2, -3)$எனும் ஜோடி $p + q = -5,\ p \times q = 6$ ஆகிய இவ்விரண்டு நிபந்தனைகளை நிறைவுபடுத்துகிறது. நடுஉறுப்பு '$-5x$' ஐ '$-2x - 3x$' ஆக எழுதலாம்.

ஆகவே $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x\,(x - 1) -3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

அதாவது, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ வை $(2x - 3)(x - 1) = 0$ என எழுதலாம்.

அதாவது, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ அல்லது $x - 1 = 0$,

$2x - 3 = 0$ லிருந்து $x = \dfrac{3}{2}$ மற்றும் $x - 1 = 0$ லிருந்து $x = 1$.

$x = \dfrac{3}{2}, x = 1$ என்பவை கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும் அல்லது

$1, \dfrac{3}{2}$ என்பவை $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ன் மூலங்கள் ஆகும்.

முயற்சி செய்

$1, \dfrac{3}{2}$ என்பவை $2x^2 - 5x + 3 = 0$ன் மூலங்களாகுமா? என சரிபார்க்கவும்.

இங்கு $2x^2 - 5x + 3 = 0$ஐ இரண்டு கோட்டுக்காரணிகளின் பெருக்கலாக எழுதி ஒவ்வொரு கோட்டு சமன்பாட்டையும் பூச்சியத்திற்கு சமம் செய்வதன் மூலம் $2x^2 - 5x + 3$ன் மூலங்களை கண்டுகொண்டோம் என்பதை கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 : $x - \dfrac{1}{3x} = \dfrac{1}{6}$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு : $x - \dfrac{1}{3x} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0$

$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$$
$$= 3x\,(2x + 1) - 2\,(2x + 1)$$
$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

அதாவது, $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ ஆகும் படியாக உள்ள x மதிப்புக்களே

$6x^2 - x - 2 = 0$ ன் மூலங்களாகும்.

$\therefore\ 3x - 2 = 0$ அல்லது $2x + 1 = 0,$

$\Rightarrow\ x = \dfrac{2}{3}$ அல்லது $x = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore 6x^2 - x - 2 = 0$ ன் மூலங்கள் $\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{2}.$

$6x^2 - x - 2 = 0$ல் $x = \dfrac{2}{3},\quad x = -\dfrac{1}{2}$ களை, பிரதியிட்டு சுருக்குவதன் மூலம் அவை சமன்பாட்டிற்கு மூலங்களா? இல்லையா? என சரிபார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-5. 5.1 என்ற பிரிவில் விவாதித்த ரசிகர்களுக்காக விடப்பட்ட காலி இடத்தின் அகலத்தை கண்டுபிடி?

தீர்வு : 5.1 என்ற பிரிவில் ரசிகர்களுக்காக விடப்பட்ட காலி இடத்தின் அகலம் xமீ எனில் அது $2x^2 + 45x - 47 = 0$வை நிறைவுபடுத்தும். காரணிபடுத்தல் முறையை இந்த சமன்பாட்டிற்கு பயன்படுத்தினால்.

$$2x^2 - 2x + 47x - 47 = 0$$
$$2x\,(x - 1) + 47\,(x - 1) = 0$$
$$\text{i.e.,}\ (x - 1)\ (2x + 47) = 0$$

அதாவது, $x = 1$,(அ) $x = \dfrac{-47}{2}$ என்பவை $2x^2 - 2x + 47x - 47 = 0$ன் மூலங்கள்.

ஆனால் 'x' என்பது ரசிகர்களுக்காக விடப்பட்ட காலி இடத்தின் அகலம் என்பதால் இதன் மதிப்பு குறை எண்ணாக இருக்காது.

$\therefore$ காலிஇடத்தின் அகலம் $= x = 1$மீ

பயிற்சி - 5.2

1. காரணிபடுத்தல் முறையில் கீழ்கண்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களை கண்டுபிடி.

i. $x^2 - 3x - 10 = 0$ ii. $2x^2 + x - 6 = 0$ iii. $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

iv. $2x^2 - x + \dfrac{1}{8} = 0$ v. $100x^2 - 20x + 1 = 0$ vi. $x(x + 4) = 12$

vii. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ viii. $x - \dfrac{3}{x} = 2$ ix. $3(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 12$

2. இரண்டு எண்களின் மொத்தம் 27, அவற்றின் பெருக்குத்தொகை 182 எனில் அவ்வெண்களை கண்டுபிடி.

3. அடுத்தடுத்த இரண்டு மிகைமுழுக்களின் வர்க்கங்களின் மொத்தம் 613 எனில் அந்த எண்களை கண்டுபிடி.

4. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உயரம், அதன் அடியை விட 7செ.மீ குறைவு. கர்ணம் 13செ.மீ எனில் மற்ற இரண்டு பக்கங்களை கண்டுபிடி.

5. ஒரு குடிசைத்தொழிலில் ஒவ்வொரு நாளும் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுக்கு மண்பாண்டங்களை தயார் செய்வார்கள். ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் ஒவ்வொரு பொருளின் தயாரிப்பு விலை (ரூபாயில்) அன்று தயாரான பொருட்களின் எண்ணிக்கைக்கு இரு மடங்கை விட 3 அதிகம். அன்று தயாரான மொத்த பொருட்களின் விலை `90 எனில் அன்று தயாரான மொத்த பொருட்களின் எண்ணிக்கையையும், ஒவ்வொரு பொருளின் விலையையும் கண்டுபிடி?

6. ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 28மீ, பரப்பளவு 40செ.மீ எனில் அதன் நீள, அகலங்களை கண்டுபிடி.

7. ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம், அதன் குத்துயரத்தைவிட 4செ.மீ அதிகம். அதன் பரப்பளவு 48ச.செ.மீ எனில் அடிபக்கம், உயரம் ஆகியவற்றை கண்டுபிடி.

8. இரண்டு ரயில்கள் ஒரு ரயில்நிலையத்திலிருந்து ஒரே சமயத்தில் ஒன்று மேற்காகவும், மற்றொன்று வடக்காகவும் புறப்பட்டன. முதல் ரயில், இரண்டாம் ரயிலைவிட 5கி.மீ/ம அதிக வேகத்துடன் பயணம் செய்கிறது. அவை புறப்பட்ட இரண்டு மணி நேரம் கழித்து ஒன்றுக்கொன்று 50கி.மீ தூரத்தில் இருந்தால் ஒவ்வொரு ரயிலின் வேகம் என்ன?

9. 60 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு வகுப்பில் ஒவ்வொரு மாணவனும், மாணவிகளின் எண்ணிக்கைக்கு சமமான தொகையும், ஒவ்வொரு மாணவி, மாணவர்களின் எண்ணிக்கைக்கு சமமான தொகையும் சந்தாவாக கொடுத்தனர். மொத்தம் வசூலான தொகை ₹. 1600 எனில் வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் மட்டும் எத்தனை பேர் உள்ளனர்?

10. ஒரு நதியில் ஒரு மோட்டார் படகு மணிக்கு 3கி.மீ வேகத்துடன் பயணம் செய்து 24கி.மீ சென்றது. மீண்டும் புறப்பட்ட இடத்திற்கே வருவதற்கு பிடித்த காலம் 6மணிநேரம். படகு நிலையான வேகத்துடன் பயணித்தது எனக்கொண்டு அதன் வேகத்தை கண்டுபிடி.

5.4 வர்க்க முழுமையாக்கல் மூலம் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல்

இதற்குமுன் இருபடிச் சமன்பாட்டை காரணிபடுத்தல் மூலம் தீர்ப்பதைப் பற்றி தெரிந்துகொண்டோம். ஆனால் இந்த வழிமுறையில் அனைத்து சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வு காண முடியுமா? $x^2 + 4x - 4 = 0$ ஐ காரணிபடுத்தல் முறையில் தீர்வு காண முயல்வோம். கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 + 4x - 4 = 0$ ஐ காரணிபடுத்தல் முறையில் தீர்வு காணவேண்டுமெனில் முதலில் நாம்

$p + q = 4$, $p \times q = -4$ ஆகும்படியாக,'p', 'q' மதிப்புகளை காண வேண்டும். ஆனால் இது கடினமாகும். ஆகவே $x^2 + 4x - 4 = 0$வை காரணிபடுத்தல் முறையில் தீர்வு காணமுடியாது. ஆகவே, நாம் மற்றொரு வழிமுறையை ஆராயவேண்டி உள்ளது.

கீழ்கண்ட எடுத்துக்காட்டை கவனிப்போம்

இரண்டு வருடங்களுக்கு முன் சுனிதாவின் வயது மற்றும் 4வருடங்களுக்குப் பிறகு அவளின் வயது ஆகிய இவ்விரண்டின் பெருக்குத்தொகை அவளின் தற்போதைய வயதுக்கு இரண்டு மடங்கை விட 1 அதிகம் எனில் அவளின் தற்போதைய வயது என்ன?

இதற்கு விடையை காண அவளின் தற்போதைய வயது x வருடங்கள் எனக் கொள்வோம். இரண்டு வருடங்களுக்கு முன் அவள் வயது $= x - 2$ வருடங்கள். 4 வருடங்களுக்குப் பிறகு அவள் வயது $= x + 4$ வருடங்கள்.

தரவின்படி, $(x - 2)(x + 4) = 2x + 1$

$\Rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

$\therefore \quad x^2 - 9 = 0$

எனவே, $x^2 = 9$வை நிறைவுபடுத்தும் x மதிப்பே சுனிதாவின் தற்போதைய வயதை குறிக்கும். இந்த சமன்பாட்டை $x^2=9$ என எழுதலாம். இருபுறங்களிலும் வர்க்கமூலங்களை எடுக்க, $x = 3$ அல்லது $x = -3$யை பெறுகிறோம். ஆனால் வயது என்பது மிகை எண்ணை குறிப்பதால் $x = 3$யை மட்டுமே கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். அதாவது சுனிதாவின் தற்போதைய வயது 3 வருடங்கள் ஆகும்.

இப்போது $(x + 2)^2 - 9 = 0$ எனும் மற்றொரு இருபடிச் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$(x + 2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 9.$

$\therefore x + 2 = 3$ அல்லது $x + 2 = -3.$

$\therefore \quad x = 1$ அல்லது $x = -5$

அதாவது, $(x + 2)^2 - 9 = 0$ ன் மூலங்கள், $1, -5$.

மேற்கண்ட இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளிலும் x ஐக் கொண்ட உறுப்புகள் முழுவர்க்க வடிவில் உள்ளன. ஆகவே, இருபுறங்களிலும் வர்க்க மூலங்களை எடுத்துக்கொள்வதன் மூலம் சுலபமாக அவற்றிற்கு தீர்வு கண்டோம். ஆனால் இந்த வழிமுறையில் $x^2 + 4x - 4 = 0$ வை தீர்க்க முடியுமா? இந்த சமன்பாட்டை தீர்க்கும்படி சொன்னால் என்ன நிகழும்? இதை காரணிப்படுத்தல் முறையில் செய்யமுடியாது. எனவே வர்க்கமாக்கல் முறையில் தீர்வு காண்போம். **சமன்பாட்டின் இடது பக்கத்தை ஒரு முழுவர்க்கமாக மாற்றியமைப்பதே இந்த வழிமுறையாகும்.** இந்த வழிமுறை கீழ்கண்டவாறு இருக்கும்.

$x^2 + 4x - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + 4x = 4$

$x^2 + 2 . x . 2 = 4$

இதில், சமன்பாட்டின் இடதுபக்கம், $a^2 + 2ab$ வடிவில் உள்ளது. இதற்கு b^2 ஐ சேர்த்தால் அது $a^2 + 2ab + b^2$ ஆக மாறி ஒரு முழுவர்க்கமாக ஆகிறது. ஆகவே, சமன்பாட்டின் இருபுறங்களிலும் $b^2 = 2^2 = 4$ ஐ சேர்த்தால்.

$x^2 + 2.x.2 + 2^2 = 4 + 4$

$\Rightarrow \quad (x + 2)^2 = 8 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{8}$

$\Rightarrow \quad x = -2 \pm 2\sqrt{2}$

இப்போது, மற்றொரு சமன்பாடு $3x^2 - 5x + 2 = 0$ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். இதில் x^2ன் குணகம் 1 அல்ல. x^2 ன் குணம் 1 ஆக மாற்றுவதற்கு சமன்பாடு முழுவதையும் 3ஆல் வகுப்போம்.

$$\therefore \quad x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$ (இருபுறங்களிலும் $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ ஐ சேர்)

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \frac{25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{(12 \times -2) + (25 \times 1)}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-24 + 25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$ (இதற்கு இருபுறங்களிலும் வர்க்கமூலம் எடு)

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$$

அதாவது, $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ அல்லது $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

$\therefore \; x = 1$ அல்லது $x = \frac{4}{6}$

$\Rightarrow \; x = 1$ அல்லது $x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $1, \frac{2}{3}$.

இந்த எடுத்துக்காட்டிலிருந்து வர்க்க முழுமையாக்குவதற்கு கீழ்கண்ட வழிமுறையை (algorithm) வரையறுக்கலாம்.

வழிமுறை : கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை $ax^2 + bx + c = 0$ எனக்கொள்.

படி-1 : சமன்பாட்டின் இருபுறங்களிலும் 'a' ஆல் வகுக்கவும்.

படி-2 : மாறிலி உறுப்பான c/a வை வலப்பக்கமாக கொண்டுவருக.

படி-3: இடது பக்கத்தை ஒரு முழுவர்க்கமாக மாற்ற சமன்பாட்டின் இருபுறங்களிலும் $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2$ ஐ கூட்டவும்.

படி-4: இடது பக்கத்தை வர்க்கமாக எழுதி, வலது பக்கத்தை சுருக்கவும்.

படி-5: தீர்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு-6. வர்க்க முழுமையாக்கல் முறையில் $5x^2 - 6x - 2 = 0$ன் மூலங்களைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு : $5x^2 - 6x - 2 = 0$

மேற்கண்ட வழிமுறையின் படி இதற்கு தீர்வு காணுவோம்.

படி-1 : $x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ (இதை இருபுறங்களிலும் 5ஆல் வகுத்தால்)

படி-2 : $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$

படி-3 : $x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2$ (இதற்கு இருபுறங்களிலும் $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ ஐ சேர்ப்பதால்)

படி-4 : $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25}$

படி-5 : $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$

$$x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}}$$

$$x = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{or} \quad x = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{3 + \sqrt{19}}{5} \quad \text{or} \quad x = \frac{3 - \sqrt{19}}{5}$$

எடுத்துக்காட்டு-7. $4x^2 + 3x + 5 = 0$ வை வர்க்க முழுமையாக்கல் மூலம் தீர்க்கவும்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $4x^2 + 3x + 5 = 0$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{-5}{4}$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \frac{9}{64}$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-71}{64} < 0$$

ஆனால் xன் எந்த மதிப்பிற்கும் $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2$ குறை எண் அல்ல (ஏன்?). x ன் எந்த மெய் மதிப்பும் மேற்கண்ட சமன்பாட்டை நிறைவுபடுத்தாது. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் இல்லை.

இதை செய்

வர்க்க முழுமையாக்கல் மூலம் கீழ்கண்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளை தீர்க்கவும்.

(i) $x^2 - 10x + 9 = 0$ (ii) $x^2 - 5x + 5 = 0$

(iii) $x^2 + 7x - 6 = 0$

நாம் இதுவரை வர்க்க முழுமையாக்கல் முறையில் இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வு கண்டோம். இப்போது அதே வழிமுறையை பொது இருபடிச்சமன்பாடு $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$க்கு ஏதுவாக மாற்றி அதற்கு தீர்வு காண்போம்.

படி-1 : $ax^2+bx+c=0$ இதை இரு புறங்களிலும் aஆல் வகுத்தால்

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$ என கிடைக்கிறது.

படி-2 : $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

படி-3 : $x^2+\frac{b}{a}x+\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2=-\frac{c}{a}+\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ $\left[\text{இதற்கு இருபுறங்களிலும் } \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2 \text{ ஐ கூட்டுவதால்}\right]$

$$\Rightarrow x^2+2\cdot x\frac{b}{2a}+\left[\frac{b}{2a}\right]^2=-\frac{c}{a}+\left[\frac{b}{2a}\right]^2$$

படி-4 : $\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

படி-5 : $b^2-4ac\geq 0$, எனக்கொண்டு படி-4லிலுள்ள விவரத்திற்கு இரு புறங்களிலும் வர்க்கமூலம் எடுத்துக்கொண்டால்

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ஆகவே, $\mathbf{b^2-4ac\geq 0}$ எனில் $ax^2+bx+c=0$ன் மூலங்கள்

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$b^2-4ac<0$, எனில் இந்த சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இருக்காது. (ஏன்?)

ஆகவே, $\mathbf{b^2-4ac\geq 0}$, எனில் $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$ன் மூலங்கள் $\frac{-\boldsymbol{b}\pm\sqrt{\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{ac}}}{2\boldsymbol{a}}$.

இந்த சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி எந்த இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கும் மூலங்களை கண்டறியலாம். சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-8. பயிற்சி 5.1ல் 2(i)வது கணக்கை இந்த சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி தீர்க்கவும்.

தீர்வு : செவ்வக வடிவ மனையின் அகலம் x மீ என்க.

அதன் நீளம் $(2x+1)$ மீ.

அதன் பரப்பளவு = 528ச.மீ

ஆகவே, $x(2x+1)=528$, i.e., $2x^2+x-528=0$.

இந்த சமன்பாடு $ax^2+bx+c=0$, வடிவில் உள்ளது

இங்கு $a=2$, $b=1$, $c=-528$.

ஆகவே, இந்த சூத்திரத்திலிருந்து

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$x = \frac{64}{4}$ அல்லது $x = \frac{-66}{4}$

$x = 16$ அல்லது $x = -\frac{33}{2}$

அகலம் என்பது குறை எண்ணாக இருக்க வாய்ப்பில்லை. ஆகவே அகலம் x=16மீ ஆகும்.

நீளம் = $(2x + 1) = 33$மீ ஆகும்.

கணக்கின் நிபந்தனைகளை இந்த மதிப்புகள் நிறைவு செய்கிறதா என சரிபார்.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுக்காக, மேற்கண்ட மூன்று வழிமுறைகளில் நீங்கள் எந்த வழிமுறையை பயன்படுத்துவீர்? ஏன்?

எடுத்துக்காட்டு-9. அடுத்தடுத்த இரண்டு ஒற்றை மிகை எண்களின் வர்க்கங்களின் மொத்தம் 290 எனில் அவ்வெண்களை கண்டுபிடி.

தீர்வு : முதல் ஒற்றை மிகைஎண் x என்க. இரண்டாவது ஒற்றை மிகை எண் $x + 2$ஆகும்.

$$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$2x^2 + 4x - 286 = 0$$

$$x^2 + 2x - 143 = 0$$

இது x ல் ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும்.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ எனும் சூத்திரத்தின் படி

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$x = 11$ அல்லது $x = -13$

ஆனால், x ஓர் ஒற்றை மிகை எண் எனக் கொடுக்கப்பட்டதால்

x=11 ஆகும்.

$x \neq -13, x = 11.$

$\therefore$ அடுத்தடுத்த இரண்டு ஒற்றை மிகை எண்கள் = 11,13

சரிபார்த்தல்: $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290.$

எடுத்துக்காட்டு-10. செவ்வக வடிவத்தில் ஒரு பூங்கா வடிவமைக்கப்பட்டது. அதன் அகலம், நீளத்தைவிட 3மீ குறைவு. இதன் பரப்பளவு, இதன் அகலத்திற்கு சமமான அடிபக்கமும், 12மீ உயரமும் உள்ள ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவை விட 4ச.மீ அதிகம், எனில் இந்த பூங்காவின் நீள, அகலங்களை கண்டுபிடி.

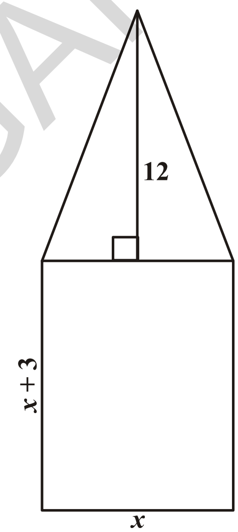
தீர்வு : செவ்வக வடிவ பூங்காவின் அகலம் xமீ என்க.

அதன் நீளம் $= (x + 3)$ மீ ஆகும்.

∴ அதன் பரப்பளவு $= x(x + 3)$ மீ^{2} $= (x^2 + 3x)$ மீ^{2} ஆகும்.

இருசமபக்க முக்கோணத்தின் அடிபக்கம் $= x$ மீ.

அதன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6\,x$ மீ^{2}.



ஆனால், தரவின் படி

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

சூத்திரத்தின்படி

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ அல்லது } -1$$

ஆனால், $x \neq -1$ (ஏன்?). ஆகவே $x = 4$.

∴ அகலம் = 4மீ ; நீளம் = $x + 3 = 4 + 3 = 7$மீ.

சரிபார்த்தல்: செவ்வகவடிவ பூங்காவின் பரப்பளவு = 28மீ^{2}

இருசமபக்க முக்கோண வடிவ பூங்காவின் பரப்பளவு = (28-4)மீ^{2} = 24மீ^{2}

எடுத்துக்காட்டு-11. கீழ்கண்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு மூலங்கள் இருந்தால் அவற்றை சூத்திரத்தின் மூலம் கண்டுபிடி.

(i) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (ii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

தீர்வு :

(i) $x^2 + 4x + 5 = 0$. இங்கு, $a = 1, b = 4, c = 5$. ஆகவே, $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$.

எந்த ஒரு மெய்யெண்ணின் வர்க்கமும் குறைஎண்ணாக இருக்காது. ஆகவே, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ என்பது மெய்மூலங்களை பெறவில்லை.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் இல்லை.

(ii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$. இங்கு, $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$.

$\therefore \quad b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

மூலங்கள் $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$.

எடுத்துக்காட்டு-12. கீழ்கண்ட சமன்பாடுகளின் மூலங்களை கண்டுபிடி.

(i) $x + \frac{1}{x} = 3, \; x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, \; x \neq 0, 2$

தீர்வு :

(i) $x + \frac{1}{x} = 3$. இதை x ஆல் பெருக்கினால்

$x^2 + 1 = 3x$

$x^2 - 3x + 1 = 0$, இது ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகும்

இங்கு $a = 1, b = -3, c = 1$

ஆகவே $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

$$\therefore \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (ஏன் ?)}$$

$\therefore$ மூலங்கள் $= \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, \; x \neq 0, 2.$

$x \neq 0, 2$, என உள்ளதால் சமன்பாட்டை $x(x-2)$ஆல் பெருக்கினால்

$(x - 2) - x = 3x(x - 2)$ என கிடைக்கும்

$= 3x^2 - 6x$

$\therefore 3x^2 - 6x + 2 = 0$, இது ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகும்.

இங்கு $a = 3, b = -6, c = 2$. ஆகவே, $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

$$\therefore \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore \text{ மூலங்கள் } = \frac{3+\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

எடுத்துக்காட்டு-13. ஒரு நிலையான நீரோட்டத்தில், ஒரு மோட்டார் படகு நீரோட்டத்தின் எதிர்திசையில் 18கி.மீ/ம வேகத்துடன் 24கி.மீ தூரம் பயணத்திற்கு ஆகும் காலம், மீண்டும் புறப்பட்ட இடத்திற்கே வருவதற்கு ஆகும் காலத்தை விட 1மணிநேரம் அதிகமாகும் எனில் அந்த நீரோட்டத்தின் வேகமென்ன?

தீர்வு : நீரோட்டத்தின் வேகம் மணிக்கு xகி.மீ என்க. நீரோட்டத்தின் எதிர்திசையில் மோட்டார் படகின் வேகம் $= (18 + x)$கி.மீ.

$$\text{அதற்கான காலம்} = \frac{\text{தூரம்}}{\text{வேகம்}} = \frac{24}{18-x} \text{ மணி.}$$

$$\text{திரும்பி செல்வதற்கான காலம்} = \frac{24}{18+x} \text{ மணி}$$

கொடுத்த நிபந்தனையின்படி

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

$$24(18+x) - 24(18-x) = (18-x)(18+x)$$

$$x^2 + 48x - 324 = 0$$

சூத்திரத்தின் படி

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

$$= \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ அல்லது } -54$$

நீரோட்டத்தின் வேகம் குறை எண்ணாக இருக்க வாய்ப்பில்லை. ஆகவே, $x=6$

அதாவது நீரோட்டத்தின் வேகம் = 6கி.மீ/மணி.

பயிற்சி - 5.3

1. கீழ்கண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மூலங்கள் இருந்தால் வர்க்க முழுமையாக்கல் முறையில் காண்க.

   i. $2x^2 + x - 4 = 0$ ii. $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

   iii. $5x^2 - 7x - 6 = 0$ iv. $x^2 + 5 = -6x$

2. மேற்கண்ட கேள்வி 1ல் உள்ள சமன்பாடுகளின் மூலங்களை சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி கண்டுபிடி.
3. கீழ்கண்ட சமன்பாடுகளின் மூலங்களை கண்டுபிடி.

(i) $x-\frac{1}{x}=3,\ x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30},\ x \neq -4, 7$

4. மூன்று வருடத்திற்கு முன் ரஹ்மானின் வயதின் தலைகீழ் மற்றும் ஐந்து வருடத்திற்கு பிறகு அவர் வயதின் தலைகீழ் ஆகியவற்றின் கூடுதல் $\frac{1}{3}$ ஆகும், எனில் தற்போது அவரின் வயது என்ன?
5. ஒரு வகுப்புத் தேர்வில் மேனகா கணிதம் மற்றும் ஆங்கிலம் ஆகிய இரண்டு பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் மொத்தம் 30. அவள் கணிதத்தில் 2 மதிப்பெண்கள் அதிகமாகவும், ஆங்கிலத்தில் 3மதிப்பெண்கள் குறைவாகவும் பெற்றிருந்தால் அவற்றின் பெருக்கற்தொகை 210ஆக இருந்திருக்கும். அவ்விரண்டு பாடங்களில் அவள் பெற்ற மதிப்பெண்களை கண்டுபிடி.
6. ஒரு செவ்வகவடிவ வயலின் மூலைவிட்டம் அகலத்தைவிட 60மீ அதிகம். நீளம் அகலத்தைவிட 30மீ அதிகம். அதன் நீளம் மற்றும் அகலம் அளவுகளை கண்டுபிடி.
7. இரண்டு எண்களின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் 180. சிறிய எண்ணின் வர்க்கம், பெரிய எண்ணைவிட 8 மடங்கு பெரியது. அவ்வெண்களை கண்டுபிடி.
8. ஒரு ரயில் 360கி.மீ தூரத்தை ஒரே சீரான வேகத்துடன் செல்கிறது. வேகம் மணிக்கு 5கி.மீ அதிகரித்து சென்றால் அது அதே தூரத்தை 1மணிநேரம் முன்பாக சென்றடையும். அதன் வேகத்தை கண்டுபிடி.
9. இரண்டு குழாய்கள் சேர்ந்து ஒரு நீர்த்தொட்டியை $9\frac{3}{8}$ மணி நேரங்களில் நிரப்பும். இவற்றில் அதிக விட்டம் கொண்ட ஒரு குழாய் தனியாக சிறிய விட்டம் கொண்ட மற்றொரு குழாய் நிரப்பும் நேரத்தைவிட 10 மணிநேரம் முன்பாகவே நிரப்பிவிடும். அவை தனித்தனியாக அத்தொட்டியை நிரப்ப பிடிக்கும் காலங்களை கண்டுபிடி.
10. மைசூர், பெங்களூர் இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட 132கி.மீ தூரத்தை அடைய ஒரு அதிவேகரயில், பயணிகள் ரயிலைவிட 1மணிநேரம் குறைவாக எடுத்துக்கொள்ளும் (ஆங்காங்கே நிற்கும் நேரங்களை கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளவில்லை). அதிவேக ரயிலின் சராசரி வேகம், பயணிகள் ரயிலின் சராசரி வேகத்தை விட மணிக்கு 11கி.மீ அதிகம் எனில் அவற்றின் வேகங்களை கண்டுபிடி.
11. இரண்டு சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் மொத்தம் 468ச.மீ. அவற்றின் சுற்றளவுகளின் வித்தியாசம் 24மீ எனில் அவற்றின் பக்க அளவுகளைக் காண்.
12. 12மீ உயரமுள்ள ஒரு கட்டிடத்தின் மீதிருந்து ஒரு பொருள் 17மீ/வி தொடக்க திசைவேகத்துடன் மேல்நோக்கி எரியப்படுகிறது. இது 't' வினாடிகள் பறந்தபிறகு $S = 12 + 17t - 5t^2$ உயரத்தில் உள்ளது எனில் பொருள் தரையை தொட ஆகும் காலத்தைக் கணக்கிடுக.
13. 'n' பக்கங்களையுடைய ஒரு பலகோணத்தின் மூலைவிட்டங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{1}{2}n\ (n-3)$. 65 மூலைவிட்டங்களை உடைய ஒரு பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி. 50 மூலைவிட்டங்கள் உடைய ஒரு பலகோணம் இருக்குமா?

5.5 மூலங்களின் தன்மை

இதற்கு முன்பிரிவில், $ax^2 + bx + c = 0$ ன் மூலங்கள்

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ என நாம் கற்றோம்.

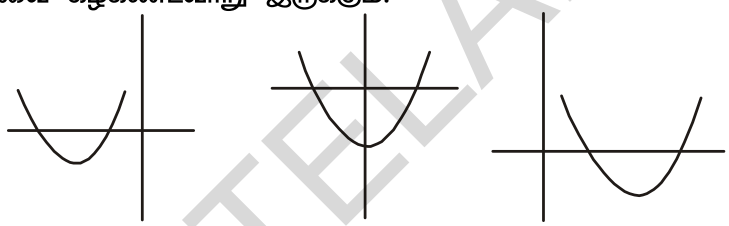
பல்லுறுப்புக் கோவையை பூஜ்ஜியமாக்கும் மதிப்புகள் அல்லது இருபடிக் கோவையின் வரைபடம் xஅச்சை வெட்டும் புள்ளியின் xஅச்சு தூரம் அந்த கோவையின் பூஜ்ஜியம் என்பதை நினைவுபடுத்திக் கொள்ளுங்கள்.

இவ்வாறே ஒரு இருபடிக் கோவையின் வளைவரை xஅச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் அச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆகும்.

நிலை-1 : $b^2 - 4ac > 0$; எனில் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு வெவ்வேறான மூலங்கள் இருக்கும் அவை,

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

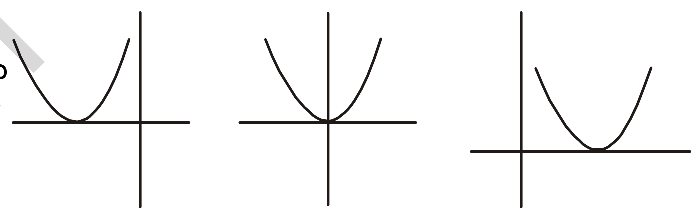
இந்த நிலையில் கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு வரைபடம் வரைந்தால் அவை கீழ்கண்டவாறு இருக்கும்.



இப்படங்களில் வளைவுகள் x-அச்சை இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன என்பதை அறியலாம்.

நிலை-2: $b^2 - 4ac = 0$எனில்

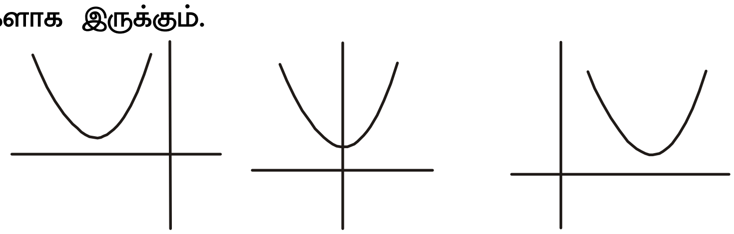
$$x = \frac{-b + 0}{2a}$$



ஆகவே, $x = \frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$

இப்படங்களில் வளைவுகள் xஅச்சை ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே தொடுகின்றன என்பதை அறியலாம்.

நிலை-3 : $b^2 - 4ac < 0$ எனில் மூலங்கள் மெய் எண்களாக இருக்காது. மூலங்கள் கற்பனை எண்களாக இருக்கும்.



இப்படங்களில் வளைவுகள் xஅச்சை வெட்டவுமில்லை, ஒரு புள்ளியில் தொடவுமில்லை என்பதை அறியலாம்.

$b^2 - 4ac$ என்பது $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் உள்ளனவா? இல்லையா? என்பதை நிர்ணயிக்கும். ஆகவே $b^2 - 4ac$ இருபடிச் சமன்பாட்டின் தன்மைக்காட்டி (**discriminant**) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

ஆகவே, $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கீழ்கண்ட மூன்று நிலைகளைப்பெற்றிருக்கும்.

i. $b^2 - 4ac > 0$ எனில் இரண்டு வெவ்வேறான மெய்மூலங்கள்.

ii. $b^2 - 4ac = 0$ எனில் இரண்டு சமமான மெய்மூலங்கள்

iii. $b^2 - 4ac < 0$ எனில் மூலங்கள் மெய்மூலங்கள் இருக்காது.

சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-14. $2x^2 - 4x + 3 = 0$ன் தன்மைக்காட்டியை கண்டறிந்து அதன்மூலம் மூலங்களின் தன்மையைப்பற்றி கூறுக.

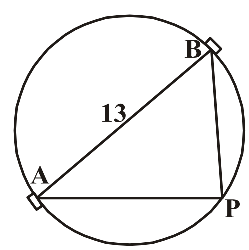
தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$ வடிவத்தில் உள்ளது.

இங்கு, $a = 2, b = -4, c = 3$ ஆகவே தன்மைக்காட்டி

$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு-15. 13மீ விட்டமுள்ள ஒரு வட்டவடிவ பூங்காவின் எல்லையின் மீது ஒரு கம்பம் நடவேண்டும். அந்த எல்லையின் மீது எதிரெதிராக அதாவது ஒரு விட்டத்தின் இருவேறு முனைகளில் வைத்துள்ள A,B எனும் இரண்டு இரும்புக்கதவுகள் இந்த கம்பம் வரையிலுள்ள தூரங்களின் வித்தியாசம் 7மீ ஆக இருக்கும் படி கம்பத்தை நடமுடியுமா? ஒரு வேளை அப்படி நடமுடிந்தால் அந்த இரண்டு இரும்புக்கதவுகளில் இருந்து அந்த கம்பம் எவ்வளவு தூரத்தில் இருக்கும்?



தீர்வு : இப்போது, இதற்கு சரியான படம் ஒன்று வரைவோம்.

கம்பத்தை நடவேண்டிய புள்ளி P எனக்கொள்வோம். B என்ற கோட்டிலிருந்து P புள்ளிவரை உள்ள தூரத்தை x மீ என்க, அதாவது BP = x மீ. தரவின்படி AP, BPகளின் வித்தியாசம் 7மீ. ஆகவே AP = $(x + 7)$மீ ஆகும்.

AB = 13மீ, AB என்பது விட்டம்

$\angle APB = 90^0$ (ஏன்?)

$\therefore$ பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, $AP^2 + PB^2 = AB^2$

$(x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

$x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

$2x^2 + 14x - 120 = 0$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டை நிறைவுபடுத்தும் 'x'ன் மதிப்பே, B கோட்டிலிருந்து P வரை உள்ள தூரமாகும்.

அதாவது, $x^2 + 7x - 60 = 0$

சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இருந்தால் மட்டுமே கம்பத்தை நடுவதற்கு வாய்ப்பிருக்கும். ஆனால் இந்த சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் இருப்பதையும், இல்லாததையும் தன்மைக் காட்டியின் மேல் ஆதாரப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, இந்தச் சமன்பாட்டின் தன்மைக் காட்டியை முதலில் பார்ப்போம்.

$\therefore$ தன்மைக்காட்டி $b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0.$

ஆகவே, இந்த இருபடிச்சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு வெவ்வேறு மெய்மூலங்கள் உள்ளன. ஆகவே, கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் கம்பத்தை நடலாம். சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி $x^2 + 7x - 60 = 0$க்கு தீர்வு கண்டால்,

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

$x = 5$ அல்லது -12.

ஆனால், x என்பது தூரத்தை குறிப்பதால் அது மிகை எண்ணாகவே இருக்க வேண்டும்.

$\therefore x = 5.$

அதாவது, Bலிருந்து 5மீ தூரத்திலும், Aவிலிருந்து 12மீ தூரத்திலும் அந்த கம்பத்தை நடவேண்டும்.

முயற்சி செய்

1. ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு காணும் முன் அதன் தன்மையை கண்டறிவதன் பயன் என்ன? இந்த மதிப்பு ஏன் முக்கியமானதாக கருதப்படுகிறது?
2. ஒரு சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு வெவ்வேறு மெய் மூலங்கள் இருக்கும்படியும், அடுத்த சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு சமமான மெய்மூலங்கள் இருக்கும்படியும், இன்னொரு சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் இல்லாதபடியும் மூன்று வெவ்வேறு இருபடிச் சமன்பாடுகளை எழுது.

எடுத்துக்காட்டு-16. $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ ன் தன்மைக் காட்டியை கண்டுபிடி. அதன்படி மூலங்களின் தன்மையைக்கூறு. ஒருவேளை மூலங்கள், மெய்மூலங்கள் எனில் அவற்றை கண்டுபிடி.

தீர்வு : இங்கு $a = 3, b = -2, \ c = \frac{1}{3}$

தன்மைக்காட்டி $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0.$

ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச்சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு சமமான மெய்மூலங்கள் உள்ளன. அவை $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$, i.e., $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$, i.e., $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

பயிற்சி-5.4

1. கீழ்கண்ட சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையை கண்டுபிடி. மெய்மூலங்கள் இருந்தால் அவற்றை கண்டுபிடி.

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

   (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. கீழ்கண்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு இரண்டு சமமான மெய்மூலங்கள் இருந்தால் k ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx\,(x-2) + 6 = 0$

3. மாம்பழச் செடிகளை பாதுகாப்பாக வைத்துக்கொள்வதற்கு 800ச.மீ பரப்பளவும், நீளம் அகலத்தை விட இரண்டு மடங்கு இருக்கும்படியும், ஒரு செவ்வக வடிவ மாந்தோட்டத்தை அமைக்க முடியுமா? முடியுமெனில் அதன் நீள, அகலங்களை கண்டுபிடி.

4. இரண்டு நண்பர்களின் வயதுகளின் மொத்தம் 20 வருடங்கள். நான்கு வருடங்களுக்கு முன்பு அவர்களின் வயதுகளின் பெருக்குத்தொகை 48. இது சாத்தியமாகுமா? சாத்தியமெனில் அவர்களின் வயதுகளை கண்டுபிடி.

5. சுற்றளவு 80மீ, பரப்பளவு 400ச.மீ இருக்கும்படி ஒரு செவ்வக வடிவ பூங்கா ஏற்படுத்த முடியுமா? முடியுமெனில் அதன் நீள, அகலங்களை கண்டுபிடி.

விருப்பப் பயிற்சி (தேர்வுக்குரிய வினாக்கள் அல்ல)

1. ஒரு தளத்தில் சில புள்ளிகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு புள்ளியும் மற்ற அனைத்து புள்ளிகளுடனும் கோட்டுத்துண்டுகளால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறு இணைந்தால் மொத்தம் 10 கோட்டுத்துண்டுகள் ஏற்பட்டுள்ளன எனில் அங்குள்ள மொத்த புள்ளிகள் எத்தனை?

2. ஓர் ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் பெருக்குத்தொகை 8. இந்த எண்ணுடன் 18ஐ கூட்டினால் இலக்கங்கள் இடம் மாறுகின்றன. அந்த எண்ணைக் கண்டுபிடி.

3. 8மீ நீளமுள்ள ஒரு கம்பி இரண்டு துண்டுகளாக வெட்டப்பட்டது. ஒவ்வொரு துண்டையும் சதுரமாக வளைக்கப்பட்டது. இவ்வாறு ஏற்பட்ட இரண்டு சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் மொத்தம் 2ச.மீ இருக்க வேண்டுமெனில் ஒவ்வொரு துண்டின் நீளமும் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

$$\left[\text{குறிப்பு} : x+y=8, \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{4}\right)^2 = 2\right].$$

4. வினய் மற்றும் பிரவீன் சேர்ந்து ஒரு வீட்டிற்கு வண்ணம் பூச 6 நாட்கள் எடுத்துக்கொள்வார்கள். வினய் ஒருவரே அந்த வேலையை பிரவீனை விட 5 நாட்கள் முன்பாகவே முடிப்பார், எனில் வினய் ஒருவரே அந்த வேலையை எத்தனை நாட்களில் முடிப்பார்?

5. ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் மொத்தம் ‘$\frac{-b}{a}$’ எனக்காட்டு.

6. ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் பெருக்கல் ‘$\frac{c}{a}$’எனக்காட்டு.

7. ஒரு பின்னத்தில் பகுதி, தொகுதியின் இரண்டு மடங்குக்கு 1 அதிகம். அந்த பின்னம் மற்றும் அதன் தலைகீழ் இவ்விரண்டின் மொத்தம் $2\frac{16}{21}$, எனில் அந்த பின்னத்தை கண்டுபிடி.

பரிந்துரைக்கப்பட்ட செயல்திட்டம்

இருபடி சமன்பாடுகளை வடிவியல் முறையில் தீர்த்தல்.

$ax^2+bx+c=0$ எனும் வடிவிலுள்ள இரண்டு அல்லது மூன்று இருபடி சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள். இங்கு $a \neq 0, a>0, a<0, b=0$ என வெவ்வேறு சூழ்நிலைகளைக் கொண்டு வரைபடம் மூலம் தீர்க்கவும்.

நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் கீழ்கண்ட விவரங்களை நாம் கற்றோம்.

1. x எனும் மாறியைக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் : $ax^2+bx+c=0$, இங்கு a, b, c என்பவை மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.

2. ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் α க்கு $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ எனில் $ax^2+bx+c=0$ என்பது இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலம் எனப்படும். ax^2+bx+c எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சிய மதிப்புகளும் $ax^2+bx+c=0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களும் ஒன்றே ஆகும்.

3. $ax^2+bx+c, a\neq 0$ஐ இரண்டு காரணிகளின் பெருக்கலாக எழுதி ஒவ்வொன்றையும் பூச்சியத்திற்கு சமமாக்குவதின் மூலம் $ax^2+bx+c=0$ ன் மூலங்களை கண்டறியலாம்.

4. ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டை வர்க்க முழுமையாக்கல் மூலமும் தீர்க்கலாம்.

5. $b^2-4ac \geq 0$ எனில் $ax^2+bx+c=0$ ன் மூலங்கள் காண்பதற்கான சூத்திரம் $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

6. $ax^2+bx+c=0$ என்ற இருபடிச்சமன்பாடு
   (i) $b^2-4ac>0$ எனில் இரண்டு வெவ்வேறு மெய் மூலங்களை பெற்றிருக்கும்.
   (ii) $b^2-4ac=0$ எனில் இரண்டு சமமான மூலங்களை பெற்றிருக்கும்.
   (iii) $b^2-4ac<0$ எனில் மெய்மூலங்களை பெற்றிருக்காது.

அத்தியாயம்

6 தொடர்கள்
(Progressions)

6.1 அறிமுகம்

இயற்கையில் பல பொருட்கள் அதாவது சூரியகாந்தி பூவில் உள்ள இதழ்கள், தேன்கூட்டில் உள்ள துளைகள், மக்காச்சோளக் கதிரில் உள்ள தானியங்கள், அன்னாச்சிப் பழத்திலுள்ள சுருள் மற்றும் வாழைப்பூ போன்றவற்றில் சீரான அமைப்பு அமைந்திருப்பதை நீங்கள் கவனித்திருப்பீர்கள்.

மேலே கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு எடுத்துக்காட்டிலும் அமைந்துள்ள அமைப்பை உன்னால் பார்க்க முடியுமா? இந்த இயற்கை அமைப்பு திரும்பத் திரும்ப வரும். சூரியகாந்தி பூவின் ஒத்த இதழ்கள் சமமான தூரத்தில் வளர்கிறது. தேன்கூட்டில் உள்ள அறுங்கோணவடிவ செல்கள் ஒவ்வொரு அறுங்கோணத்தை சுற்றிலும் சமச்சீராக அமைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்வாறே அன்னாசிப்பழத்தில் உள்ள இயற்கை சுருள் அமைப்பை நீங்கள் காணலாம்.

நம்முடைய அன்றாட வாழ்க்கையில் நிகழும் மேலும் சில சீரான அமைப்புகளை நீங்கள் பார்க்கலாம்.

சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6$ ..... மதிப்புகளின் ஒன்றுகள் இலக்கத்தில் வரக்கூடிய எண்களின் பட்டியல் 4, 6, 4, 6, 4, 6, ... ஆகும்.

(ii) வங்கி தேர்வுக்காக மேரி தயாராகிறாள். இதற்காக அமைப்பு மீதான கணக்குகளை செய்து கொண்டிருக்கிறாள். அவற்றில் ஒன்று கீழ்கண்ட அமைப்பின் அடுத்த இரண்டு உறுப்புகளை எழுது.

1, 2, 4, 8, 10, 20, 22 ....

(iii) உஷா ஒரு வேலைக்கு விண்ணப்பித்தாள். ஒரு மாத சம்பளம் ₹ 8000, ஆகவும் ஒவ்வொரு வருட உயர்வு ₹500 ஆகவும் உள்ள ஒரு வேலைக்கு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டாள். அவளின் முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம்....... வருட சம்பளங்கள் (ரூபாயில்) முறையே 8000, 8500, 9000 ..... ஆகும்.

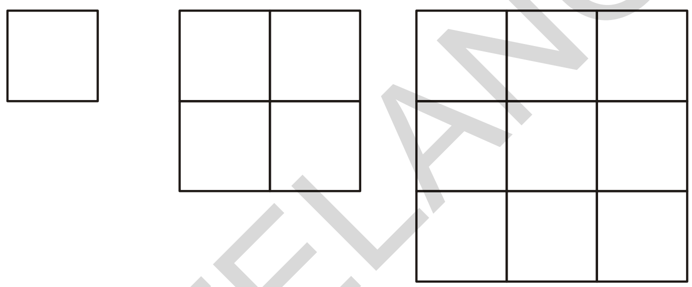
(iv) ஓர் ஏணிப்படியின் நீளங்கள் கீழிருந்து மேலாக 2செ.மீ. சீராக குறைந்து கொண்டே செல்கிறது. கீழ்படியின் நீளம் 45செ.மீ. கீழிருந்து முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம்... எட்டாம் படியின் நீளங்கள் (செ.மீல்) முறையே 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு (ii)ல் உள்ள அமைப்பை கண்டுபிடி. எடுத்துக்காட்டுகள் (iii) மேலும் (iv)ல் ஒவ்வொன்றிலும் எண்களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு மாறாமல் முன்னேறுகிறது. 8000, 8500, 9000, ... என்று கொடுக்கப்பட்டதில் ஒவ்வொரு தொடரியும் அதன் முன்னுறுப்புடன் 500ஐ கூட்டுவதால் கிடைக்கிறது.

45, 43, 41, ... ல் ஒவ்வொரு தொடரியும் அதன் முன்னுறுப்புடன் '-2' ஐ கூட்டுவதால் கிடைக்கிறது. தொடர் அமைப்பிற்கு மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை நாம் பார்க்கலாம்.

(a) ஒரு சேமிப்பு திட்டத்தில் மொத்தம் மூன்று வருடங்களுக்கு ஒருமுறை $\frac{5}{4}$ மடங்கு உயர்கிறது. இந்த திட்டத்தில் ₹8000ஐ முதலீடு செய்தால் 3, 6, 9 மற்றும் 12 வருடங்களுக்கு பிறகு கிடைக்கக்கூடிய மொத்தம் முறையே 10000, 12500, 15625, 19531.25.

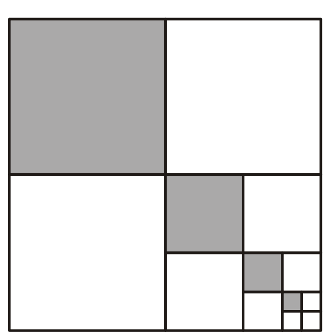
(b) 1, 2, 3, ... அலகுகள் பக்கங்களாக உடைய சதுரங்களில் இருக்கக்கூடிய ஓரலகு சதுரங்களின் எண்ணிக்கை முறையே $1^2, 2^2, 3^2$, ... ஆகும்.



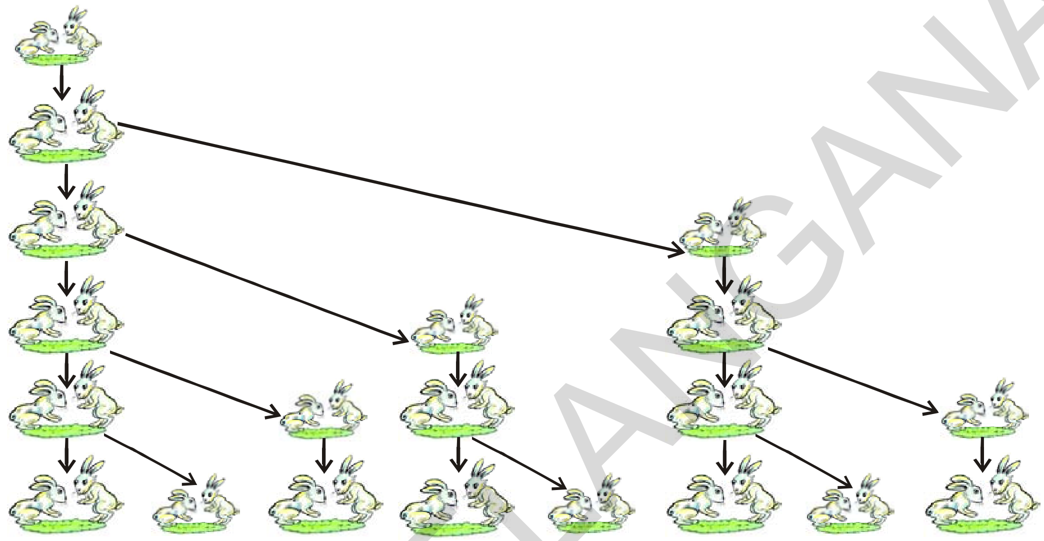
(c) ஹேமா, தன்னுடைய மகளின் வயது 1 ஆக இருக்கும் போது ரூ.1000ஐ அவளுடைய பணப்பெட்டியில் போட்டாள். ஒவ்வொரு வருடமும் ரூ.500ஐ அதிகபடுத்தினால் முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம், நான்காம் பிறந்த நாட்களில் அவளுடைய பணப்பெட்டியில் இருக்கும் தொகை (ரூபாயில்) முறையே 1000, 1500, 2000, 2500 ஆகும்.

(d) கீழே கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் நிழலிட்ட சதுரங்களின் பின்னவடிவம் முறையே

$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, ...$



(e) ஒரு முயல் ஜோடி இரண்டாவது மாதத்திலிருந்து மேலும் ஒரு முயல் ஜோடியை உற்பத்தி செய்கிறது. இவ்வாறு உற்பத்தி செய்யப்பட்ட முயல் ஜோடியும் இரண்டாவது மாதத்திலிருந்து ஒவ்வொரு மாதமும் மற்றொரு முயல் ஜோடியை உற்பத்தி செய்கிறது. முதல் மாதத்தில் ஒரே ஒரு முயல் ஜோடி உள்ளது என்றும் ஒரே ஒரு முயல்கூட இறக்கவில்லை என்றும் கொண்டால் 1,2,3,4,5,6 வது மாதங்களில் இருக்கக்கூடிய முயல் ஜோடிகள் முறையே 1, 1, 2, 3, 5, 8 ஆகும்.



மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் சில அமைப்புகளை நாம் காணலாம். சிலவற்றில் தொடர் உறுப்புகள் முன்னுறுப்புடன் ஒரு நிலையான எண்ணைக் கூட்டுவதாலும் மேலும் சில ஒரு நிலையான எண்ணை பெருக்குவதாலும் கிடைக்கின்றன. மற்றொன்றில் அடுத்தடுத்த எண்களின் வர்க்கம் என்றும் காணலாம்.

இந்த அத்தியாயத்தில் முந்தைய உறுப்பிற்கு ஒரு நிலையான எண்ணை கூட்டுவதால் கிடைக்கும் அமைப்பு. மேலும் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு நிலையான எண்ணால் பெருக்குவதால் அடுத்த உறுப்பு கிடைக்கும் அமைப்பு ஆகியவற்றையே கூட்டுத்தொடர் மற்றும் பெருக்குத்தொடர் என்பர். அவற்றின் nவது உறுப்பு மற்றும் n உறுப்புவரை மொத்தம் காணுதல் ஆகியவற்றை பற்றி விவாதிப்போம்.

வரலாறு : 400 ஆண்டுகளுக்கு முன்பே பாபிலோனியர்கள் கூட்டுத்தொடர் மற்றும் பெருக்குத்தொடரை அறிந்திருந்ததற்கான ஆதாரங்கள் உள்ளன. போதென்ஸ் (Boethins (570 கி.மு)ன் படி பழைய கிரேக்க எழுத்தாளர்கள் இந்த தொடர்களைப் பற்றி அறிந்திருந்தார்கள் என்று அறியலாம். முதன் முதலில் இந்திய பழங்கால கணித மேதைகளில் ஒருவரான ஆரியபட்டா (கி.பி.470) முதன் முதலில் முதல் n வர்க்கங்களின் கூடுதல் மற்றும் n கனங்களின் கூடுதல் காணும் சூத்திரங்களை கொடுத்ததாக தன்னுடைய ஆர்யபட்டீயம் (கி.மு.499) என்ற நூலில் இருந்து அறியலாம். மேலும் கூட்டுத்தொடரில் P வது உறுப்பில் இருந்து n வது உறுப்புவரை உள்ள உறுப்புகளின் மொத்தம் காண்பதற்கான சூத்திரத்தையும் கொடுத்துள்ளார். பிரம்மகுப்தா (கி.மு.598) மகாவீரா (கி.மு.850) மற்றும் பாஸ்கரா (கி.மு.1114-1185) போன்ற பழங்கால இந்திய கணித மேதைகள் முதல் n உறுப்புகளின் வர்க்கம் மற்றும் கனங்களின் மொத்தம் பற்றி விவாதித்திருந்தார்கள்.

6.2 கூட்டுத்தொடர்

கீழ்கண்ட எண்கள் பட்டியலை கவனியுங்கள்

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) – 3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

இந்த பட்டியலில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணும் உறுப்பு எனப்படும்.

மேலே கொடுக்கப்பட்ட பட்டியலில் ஓர் உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டால் அடுத்த உறுப்பை உன்னால் எழுதமுடியுமா? அப்படியானால், எவ்வாறு எழுதுவாய்? எண் அமைப்பை பொறுத்து எழுதுவீர்கள். அந்த விதிகளை பார்ப்போம்.

(i)ல், ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்பைவிட 1 அதிகம்

(ii)ல், ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்பைவிட 30 குறைவு.

(iii)ல், ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்புடன் 1ஐ கூட்டுவதால் கிடைக்கிறது.

(iv)ல், பட்டியலில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் 3ஆக உள்ளது. அதாவது ஒவ்வொரு உறுப்பும் முந்தைய உறுப்புடன் 0ஐ கூட்டுவதால் (அல்லது கழிப்பதால்) கிடைக்கிறது.

(v)ல், ஒவ்வொரு உறுப்பும் முந்தைய உறுப்புடன் -0.5ஐ (அதாவது 0.5ஐ கழிப்பதால்) கூட்டுவதால் கிடைக்கிறது.

மேலே கூறிய பட்டியலில், ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதற்கு முந்தைய உறுப்புடன் ஒரு நிலையான எண்ணை கூட்டுவதால் அல்லது கழிப்பதால் கிடைக்கிறது என்று அறிகிறோம். இவ்வாறான எண்களின் பட்டியலை கூட்டுத்தொடர் **(AP)** என்கிறோம்.

முயற்சி செய்

(i) கீழ்கண்டவற்றில் எவை கூட்டுத்தொடர்? ஏன்?

(a) 2, 3, 5, 7, 8, 10, 15, ... (b) 2, 5, 7, 10, 12, 15, ...

(c) -1, -3, -5, -7, ...

(ii) ஏதேனும் 3 கூட்டுத்தொடர்களை எழுது.

6.2.1 கூட்டுத்தொடர் என்றால் என்ன?

மேற்கண்டவற்றிலிருந்து ஓர் எண் பட்டியலில் முதல் உறுப்பை தவிர மற்ற உறுப்புகள் அவற்றின் முந்தைய உறுப்புடன் ஏதேனும் ஒரு நிலையான எண்ணை கூட்டுவதால் கிடைக்கும் பட்டியலை கூட்டுத்தொடர் என்கிறோம்.

இந்த நிலையான எண் கூட்டுத்தொடரின் பொது வித்தியாசம் என்று அழைக்கப்படும். அது மிகை, குறை அல்லது பூஜ்ஜியம் ஆக இருக்கலாம் என்பதை நினைவில் கொள்.

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் உறுப்பு a_1, இரண்டாவது உறுப்பு $a_2, \ldots$, nவது உறுப்பு a_n மேலும் பொது வித்தியாசத்தை d என்றும் நாம் குறிக்கிறோம். எனவே கூட்டுத்தொடர் $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

ஆகவே, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$.

மேலும் சில கூட்டுத்தொடர் எடுத்துக்காட்டுகளை நாம் பார்க்கலாம்.

(a) ஒரு பள்ளியில் பிரார்த்தனை வேளையில் வரிசையாக நின்ற மாணவர்களின் உயரங்கள் (செ.மீ.)ல் 147 , 148, 149, . . ., 157.

(b) ஒரு நகரத்தில் ஜனவரி மாதத்தில் ஒரு வாரத்தில் பதிவான மிகக்குறைந்த வெப்பநிலை ஏறுவரிசையில் (செல்சியஸ்) $-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$

(c) ₹ 1000 கடனை 5% வீதம் ஒவ்வொரு மாதமும் செலுத்திய பிறகு, ஒவ்வொரு மாதமும் செலுத்த வேண்டிய தொகை 950, 900, 850, 800, . . ., 50.

(d) ஒரு பள்ளியில் 1லிருந்து 12ம் வகுப்பு வரை ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் அதிக மதிப்பெண் பெற மாணவர்களுக்கு வழங்கப்பட்ட பரிசுத்தொகை (ரூபாயில்) முறையே 200, 250, 300, 350, . . ., 750

(e) 10 மாதங்களுக்கு ஒவ்வொரு மாதமும் ₹ 50 வீதம் சேமிப்பு செய்தால், ஒவ்வொரு மாத இறுதியிலும் உள்ள தொகை முறையே 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

1. மேற்கூறிய ஒவ்வொரு பட்டியலும் எவ்வாறு ஒரு கூட்டுத்தொடராகிறது என்று சிந்தித்து பார். இதைப்பற்றி உன்னுடைய நண்பர்களுடன் விவாதி.
2. மேற்கூறிய ஒவ்வொரு பட்டியலுக்கும் பொது வித்தியாசத்தைக் காண்க. அது எப்போது மிகையாகும் என்று சிந்தி?
3. மிகச்சிறிய மிகை மதிப்பை பொதுவித்தியாசமாக உடைய ஒரு மிகை கூட்டுத்தொடரை தயார் செய்.
4. மிகப்பெரிய மிகை மதிப்பை பொதுவித்தியாசமாக உடைய ஒரு கூட்டுத்தொடரை எழுது.
5. பொது வித்தியாசம் குறை எண்ணாக உடைய ஒரு கூட்டுத்தொடரை எழுது.

கூட்டுத்தொடரின் பொதுவடிவம் :

எல்லா கூட்டுத்தொடரையும் $a, a + d, a + 2d, a + 3d, . . .$

என்று எழுதலாமா?

இது ஒரு கூட்டுத்தொடரின் பொது வடிவம் எனப்படும். இங்கு 'a' என்பது முதல் உறுப்பு, 'd' என்பது பொதுவித்தியாசம் ஆகும்.

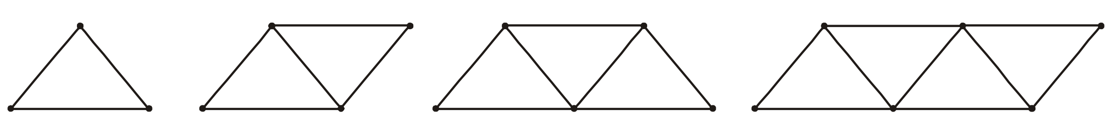
எடுத்துக்காட்டாக 1, 2, 3, 4, 5, ...

முதல் உறுப்பு 1, பொது வித்தியாசமும் 1 ஆகும்.

2, 4, 6, 8, 10 ..... ல் முதல் உறுப்பு என்ன? பொதுவித்தியாசம் என்ன?

செயல்பாடு

(i) கீழ்கண்ட படங்களை தீக்குச்சிகளால் செய்.



(iii) ஒவ்வொரு படத்திற்கும் தேவைப்படும் தீக்குச்சிகளின் எண்ணிக்கையை எழுது.

(iv) பட்டியலில் உள்ள உறுப்புகளின் பொது வித்தியாசத்தை உன்னால் காணமுடியுமா?

(v) இந்த எண் பட்டியல் ஒரு கூட்டுத்தொடராகுமா?

6.2.2 கூட்டுத்தொடர் வழியலகுகள்

பிரிவு 6.2.1ல் (a) லிருந்து (e) வரை உள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் முடிவுறு எண்கள் இருப்பதை கவனியுங்கள். இவ்வாறான கூட்டுத்தொடர் முடிவுறு கூட்டுத்தொடர் எனப்படும். இவ்வாறான ஒவ்வொரு கூட்டுத்தொடரிலும் கடைசி உறுப்பு இருப்பதை கவனியுங்கள். பிரிவு 6ல் (i) லிருந்து (v) வரை உள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் உள்ள கூட்டுத்தொடர்கள் முடிவற்ற கூட்டுத்தொடர்கள் ஆகும். இவை முடிவுறா கூட்டுத்தொடர்கள் என்று அழைக்கப்படும். இவ்வாறான கூட்டுத்தொடர்கள் முடிவுபெறாது. மேலும் கடைசி உறுப்பு இருக்காது.

இதை செய்

முடிவுறு கூட்டுத்தொடருக்கு மூன்று எடுத்துகாட்டுகளும் முடிவுறா கூட்டுத்தொடருக்கு மூன்று எடுத்துக்காட்டுகளும் எழுது.

இப்பொழுது, ஒரு கூட்டுத்தொடரைப்பற்றி அறிய உனக்கு தேவையான குறைந்தபட்ச விவரம் என்ன? முதல் உறுப்பு தெரிந்தால் போதுமா? அல்லது பொதுவித்தியாசம் மட்டும் தெரிந்தால் போதுமா?

ஒரு கூட்டுத்தொடர் தெரியவேண்டுமானால் நமக்கு இரண்டு அதாவது முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d தேவை என்பதை நாம் கவனிக்கலாம்.

கூட்டுத்தொடரை முழுமையாக்க நமக்கு இந்த இரண்டு அளவுகள் போதுமானது.

எடுத்துக்காட்டாக, முதல் உறுப்பு $a = 6$, பொது வித்தியாசம் $d = 3$ எனில் கூட்டுத்தொடர்

$6, 9, 12, 15, \ldots$ ஆகும்.

$a = 6$; $d = -3$, எனில் கூட்டுத்தொடர் $6, 3, 0, -3, \ldots$

இவ்வாறே,

$a = -7$, $d = -2$, எனில் கூட்டுத்தொடர் $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0$, $d = 0.1$, எனில் கூட்டுத்தொடர் $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0$, $d = 1\frac{1}{2}$, எனில் கூட்டுத்தொடர் $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2$, $d = 0$, எனில் கூட்டுத்தொடர் $2, 2, 2, 2, \ldots$

எனவே a, dகளின் மதிப்புகள் தெரிந்தால் நாம் கூட்டுத்தொடரை எழுதலாம்.

மற்றொரு முறையில் முயற்சிசெய்யலாம். நமக்கு எண்களின் பட்டியல் கொடுக்கப்பட்டால் அது கூட்டுத்தொடரா? இல்லையா? என்பதை எவ்வாறு காண்பாய்? உதாரணமாக

$6, 9, 12, 15, \ldots$ என்ற எண்கள் பட்டியலை கருதுவோம்.

அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசத்தை சரிபார்ப்போம். கொடுக்கப்பட்ட பட்டியலில்

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 \ldots = 3$ என்பதை நாம் காணலாம்.

இங்கு ஒவ்வொரு வகையிலும் எந்த இரண்டு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசமும் 3. ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட பட்டியல் ஒரு கூட்டுத்தொடர் ஆகும். இதன் முதல் உறுப்பு, $a=6;$ பொதுவித்தியாசம், $d=3$ ஆகும்.

$6, 3, 0, -3, \ldots$ என்ற எண்கள் பட்டியலுக்கு

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3,$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$
$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = -3$$

இவ்வாறே இதுவும் ஒரு கூட்டுத்தொடராகும். இதில் முதல்உறுப்பு 6 மேலும் பொதுவித்தியாசம் -3 ஆகும். பொதுவாக $a_1, a_2, \ldots, a_n$ என்ற கூட்டுத்தொடருக்கு

$d = a_{k+1} - a_{k.}$ இங்கு k I N; $k \geq 1$ என்று சொல்லலாம்.

இங்கு a_{k+1}, a_k என்பன முறையே $(k+1)$வது மற்றும் k வது உறுப்புகள் ஆகும்.

$1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ என்ற எண்கள் பட்டியலை கருதுவோம். ஏதேனும் அடுத்தடுத்த இரண்டு உறுப்புகளின் வித்தியாசம் ஒன்றுபோல் இல்லை என்பதை நீ காணலாம். ஆகவே இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் ஆகாது.

குறிப்பு : $6, 3, 0, -3, \ldots$ என்ற கூட்டுத்தொடரில் d ஐ காண 3லிருந்து 6ஐ கழித்திருக்கிறோமே தவிர 6லிருந்து 3ஐ அல்ல. $(k+1)$ வது உறுப்பு சிறியது என்றாலும் நாம் $(k+1)$ வது உறுப்பிலிருந்து k வது உறுப்பை தான் கழிக்க வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடருக்கு 'd'ஐ காண $a_2 - a_1$ ஐ காண வேண்டுமே தவிர $a_1 - a_2$ ஐ காணக் கூடாது.

இதை செய்

1. ஏதேனும் ஒரு கூட்டுத்தொடரை எடுத்துக்கொள்.
2. கூட்டுத்தொடரின் ஒவ்வொரு உறுப்புடனும் ஒரு நிலையான எண்ணைக் கூட்டு. கிடைக்கும் எண்களை ஒரு பட்டியலாக எழுது.
3. இவ்வாறே கூட்டுத்தொடரின் ஒவ்வொரு உறுப்புடனும் ஒரு நிலையான எண்ணைக் கழி. கிடைக்கும் எண்களை ஒரு பட்டியலாக எழுது.
4. கூட்டுத்தொடரின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒருநிலையான எண்ணால் பெருக்கு. கிடைக்கும் எண்களை ஒரு பட்டியலாக எழுது. மேலும் கூட்டுத்தொடரின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு நிலையான எண்ணால் வகு. கிடைக்கும் எண்களை ஒரு பட்டியலாக எழுது.
5. ஒவ்வொரு வகையிலும் எழுதிய பட்டியல் கூட்டுத்தொடரா என சரிபார்க்கவும்.
6. உன்னுடைய முடிவு என்ன?

நாம் மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-1. $\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{4}$ ...., என்ற கூட்டுத்தொடரின் முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d காண்க. மேலும் 7வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு : இங்கு, $a = \frac{1}{4}$; $d = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}$

கொடுக்கப்பட்டது கூட்டுத்தொடர் என்று தெரிந்திருந்தால், ஏதேனும் அடுத்தடுத்த இரண்டு உறுப்புகளை பயன்படுத்தி d ஐ காணலாம் என்பதை நினைவில்கொள்.

ஏழாவது உறுப்பு $\frac{-5}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-11}{4}$

எடுத்துக்காட்டு-2. கீழ்கண்டவைகளில் எவை கூட்டுத்தொடர்? கூட்டுத்தொடர் எனில் அடுத்த இரண்டு உறுப்புகளை எழுது.

(i) 4, 10, 16, 22, . . . (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . . (iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . .

(iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . . (v) x, $2x$, $3x$, $4x$ ......

தீர்வு : (i) நாம் பெறுவது $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$

$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

அதாவது $a_{k+1} - a_k$ என்பது ஒவ்வொரு முறையும் ஒன்றே ஆகும். ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் பட்டியல் ஒரு கூட்டுத்தொடர் ஆகும். இதில் பொதுவித்தியாசம் $d = 6$.

அடுத்த இரண்டு உறுப்புகள் : $22 + 6 = 28$, $28 + 6 = 34$.

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$$

$$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$$

அதாவது $a_{k+1} - a_k$ என்பது ஒவ்வொரு முறையும் ஒன்றே ஆகும்.

ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் பட்டியல் கூட்டுத்தொடர் ஆகும். இதன் பொது வித்தியாசம் $d = -2$.

அடுத்த இரண்டு உறுப்புகள் : $-5 + (-2) = -7$, $-7 + (-2) = -9$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

$a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, எனவே கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் பட்டியல் கூட்டுத்தொடராகாது.

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

இங்கு, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$.

ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் பட்டியல் கூட்டுத்தொடராகாது

(v) $a_2 - a_1 = 2x - x = x$

$a_3 - a_2 = 3x - 2x = x$

$a_4 - a_3 = 4x - 3x = x$

அதாவது $a_{k+1} - a_k$ என்பது ஒவ்வொரு முறையும் ஒன்றே ஆகும்.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் பட்டியல் ஒரு கூட்டுத்தொடராகும்.

அடுத்த இரண்டு உறுப்புகள் $4x + x = 5x$, $5x + x = 6x$.

பயிற்சி - 6.1

1. கீழ்கண்ட சூழ்நிலைகளில் எந்த சூழ்நிலையில் கிடைக்கும் எண்களின் பட்டியல் கூட்டுத்தொடராகும்?

   (i) ஒரு டாக்சி முதல் ஒரு மணிநேர பிரயாணத்திற்கு ₹ 20 வீதமும் அதன் பிறகு ஒவ்வொரு மணிக்கும் ₹ 8 வீதமும் தரவேண்டும் எனில் ஒவ்வொரு கிலோ மீட்டருக்கும் தரவேண்டிய பணம்.

   (ii) ஒரு வெற்றிடக் குழாய், சிலிண்டரில் உள்ள காற்றில் $\frac{1}{4}$ பாகத்தை வெளியேற்றும் எனில் ஒவ்வொரு முறையும் சிலிண்டரில் மீதமுள்ள காற்றின் அளவு.

   (iii) ஒரு கிணறு வெட்ட முதல் ஒரு மீட்டருக்கு ₹ 150 ம் அதன் பின் ஒவ்வொரு மீட்டருக்கும் ₹ 50 செலவாகும் எனில் ஒவ்வொரு மீட்டருக்கும் ஆகும் செலவு.

   (iv) ஒரு வங்கியில் ₹10000 ஐ வருடத்திற்கு 8% கூட்டுவட்டிவீதம் சேமிக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு வருட கடைசியில் கணக்கில் உள்ள பணம்.

2. கூட்டுத்தொடரின் முதல் உறுப்பு a ம் பொது வித்தியாசம் d ம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அடுத்த நான்கு உறுப்புகளை எழுது.

   (i) $a = 10, d = 10$ (ii) $a = -2, d = 0$

   (iii) $a = 4, d = -3$ (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

   (v) $a = -1.25, d = -0.25$

3. கீழ்கண்ட கூட்டுத்தொடர்களின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொதுவித்தியாசம் காண்க.

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. கீழ்கண்டவற்றில் எவை கூட்டுத்தொடர்? கூட்டுத்தொடர் எனில் பொது வித்தியாசம் d ம், அடுத்த மூன்று உறுப்புகளையும் காண்க.

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$ (x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$

6.3 ஒரு கூட்டுத்தொடரின் n வது உறுப்பு

உஷா ஒரு வேலைக்கு விண்ணப்பித்தாள். ஒரு மாத சம்பளம் ₹ 8000 ஆகவும் ஒவ்வொரு வருட உயர்வு ₹ 500 ஆகவும் உள்ள ஒரு வேலைக்கு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டாள். அவளின் ஐந்தாவது வருட மாத சம்பளம் என்னவாக இருக்கும்?

இதற்கு விடைகாணவேண்டுமானால், முதலில் அவளுடைய இரண்டாவது வருட மாத சம்பளம் எவ்வளவு என்று நாம் பார்க்கலாம்.

அது ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500.

இவ்வாறே 3வது, 4வது, 5வது வருடத்தின் மாத சம்பளம் காண முந்தைய வருடத்துடன் ₹ 500ஐ கூட்டுவதன் மூலம் கண்டுகொள்ளலாம்.

ஆகவே, 3வது வருட சம்பளம் = ₹(8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ [8000 + **(3 – 1)** × 500] (3வது வருடத்திற்கு)

= ₹ 9000

4வது வருடசம்பளம் = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

$= ₹ (8000 + 3 \times 500)$

$= ₹ [8000 + \mathbf{(4 - 1)} \times 500]$ (4வது வருடத்திற்கு)

$= ₹ 9500$

5வது வருட சம்பளம் $= ₹ (9500 + 500)$

$= ₹ (8000+500+500+500 + 500)$

$= ₹ (8000 + 4 \times 500)$

$= ₹ [8000 + \mathbf{(5 - 1)} \times 500]$ (5வது வருடத்திற்கு)

$= ₹ 10000$

மேலே உள்ளவற்றிலிருந்து

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .என்ற எண்கள் பட்டியலில் கிடைக்கிறது என்பதை கவனி.

மேற்கண்ட அமைப்பிலிருந்து அவளுடைய 6வது வருட சம்பளத்தை காண முடியுமா? 15வது வருட சம்பளம் எவ்வளவு? அவள் இதே வேலையில் தொடர்ந்து இருப்பதாக கொள்வோம். அவளுடைய 25வது வருட சம்பளம் என்னவாக இருக்கும்? இங்கு தற்போதைய வருட சம்பளம் முந்தைய வருட சம்பளத்துடன் ₹ 500 ஐ கூட்டி கணக்கிடுகிறோம். இதை சுருக்கமாக செய்ய முடியுமா? நாம் பார்க்கலாம். மேலே சம்பளம் கணக்கிட்ட முறையில் இருந்து உங்களுக்கு ஓரளவு புரிந்திருக்கும்.

15வது வருட சம்பளம் = 14வது வருடசம்பளம் $+ ₹ 500$

$$= ₹\left[8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + \ldots + 500}_{13 \text{ முறைகள்}}\right] + ₹500$$

$= ₹ [8000 + 14 \times 500]$

$= ₹ [8000 + \mathbf{(15 - 1)} \times 500] = ₹ 15000$

i.e., முதல் சம்பளம் $+ (15 - 1) \times$ வருடாந்திர உயர்வு

இவ்வாறே அவருடைய 25வது வருட சம்பளம்

$₹ [8000 + \mathbf{(25 - 1)} \times 500] = ₹ 20000$

$=$ முதல் சம்பளம் $+ \mathbf{(25 - 1)} \times$ வருடாந்திரஉயர்வு.

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டிலிருந்து 15வது உறுப்பு அல்லது 25வது உறுப்பை எவ்வாறு எழுதுவது என்பது நமக்கு புரிகிறது.

இதே முறையை பயன்படுத்தி ஒரு கூட்டுத்தொடரின் nவது உறுப்பை காணலாம்.

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத்தொடர் என்க. இதன் முதல்உறுப்பு a_1, பொதுவித்தியாசம் d.

பிறகு இரண்டாவது உறுப்பு, $a_2 = a + d = a + \mathbf{(2 - 1)}\, d$

மூன்றாவது உறுப்பு, $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + \mathbf{(3 - 1)}\, d$

நான்காவது உறுப்பு, $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + \mathbf{(4 - 1)}\, d$

. . . .

. . . .

மேற்கண்ட அமைப்பு பார்க்கும் போது, ***n***வது உறுப்பு $a_n = a + (n - 1)\, d$ என்று கூறலாம்.

ஆகவே முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d உள்ள கூட்டுத்தொடரின் nவது உறுப்பு a_n எனில் $a_n = a + (n - 1)\, d$ ஆகும்.

மேலும் $\boldsymbol{a_n}$ என்பது கூட்டுத்தொடரின் பொதுஉறுப்பு என்றும் அழைக்கப்படும்.

கூட்டுத்தொடரில் m உறுப்புகள் இருந்தால் $\boldsymbol{a_m}$ என்பது கடைசி உறுப்பைக் குறிக்கும். இது l என்றும் குறிக்கப்படும்.

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் உறுப்புகளைக் காணல் : மேற்கண்ட சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி ஒரு கூட்டுத்தொடரின் வெவ்வேறு உறுப்புகளை காணலாம்.

நாம் சில எடுத்துக்காட்டுகளை கருதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு-3. $5, 1, -3, -7 \ldots$ என்ற கூட்டுத்தொடரின் 10வது உறுப்பு காண்க.

தீர்வு : இங்கு $a = 5, d = 1 - 5 = -4, \ n = 10.$

$$a_n = a + (n - 1)\, d$$

$$a_{10} = 5 + (10 - 1)(-4) = 5 - 36 = -31$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடரின் 10வது உறுப்பு -31.

எடுத்துக்காட்டு-4. $21, 18, 15, \ldots$ என்ற கூட்டுத்தொடரில் -81 எத்தனையாவது உறுப்பு? ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு 0ஆகுமா? உன் விடைக்கு காரணம் கூறு.

தீர்வு : இங்கு $a = 21, d = 18 - 21 = -3, \ a_n = -81$, எனில் நாம் n ஐ காணவேண்டும்.

$$a_n = a + (n - 1)\, d,$$

$$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$$

$$-81 = 24 - 3n$$

$$-105 = -3n$$

ஆகவே, $$n = 35$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடரின் 35வது உறுப்பு -81.

அடுத்து $a_n = 0$ ஆகுமாறு ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு உள்ளதா என நாம் அறியவேண்டும்.

$$21 + (n - 1)(-3) = 0,$$

$$3(n - 1) = 21$$

$$n = 8$$

ஆகவே, 8வது உறுப்பு 0 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு-5. ஒரு கூட்டுத்தொடரின் 3வது உறுப்பு 45 மற்றும் 7வது உறுப்பு 9 எனில் கூட்டுத்தொடரை காண்க.

தீர்வு :

$$a_3 = a + (3 - 1)\, d = a + 2d = 5 \quad (1)$$

$$a_7 = a + (7 - 1)\, d = a + 6d = 9 \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$a = 3, d = 1$$

எனவே $3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ என்பது தேவையான கூட்டுத்தொடர் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு-6. $5, 11, 17, 23, \ldots$ என்ற எண்களின் பட்டியலில் 301 ஒரு உறுப்பு ஆகுமா?

தீர்வு : $a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6$, $a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6$, $a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$

$k = 1, 2, 3,$ மதிப்புகளுக்கு $(a_{k+1} - a_k)$ என்பது ஒன்றாக இருப்பதால், கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் பட்டியல் ஒரு கூட்டுத்தொடராகும்.

இந்த கூட்டுத்தொடரில் $a = 5$, $d = 6$.

301 இந்த எண்கள் பட்டியலில் உள்ள ஒரு உறுப்பு அதாவது, கூட்டுத்தொடரின் nவது உறுப்பு எனக்கொள்வோம்.

அதாவது $a_n = 301$ என்றிருக்குமாறு 'n' உள்ளதா என பார்ப்போம்.

$a_n = a + (n - 1)\, d$ என்று நமக்குத்தெரியும்.

$$301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

$$301 = 6n - 1$$

எனவே, $n = \dfrac{302}{6} = \dfrac{151}{3}$

ஆனால் n என்பது ஒரு மிகை எண்ணாக இருக்கவேண்டும். (ஏன்?)

எனவே, 301 கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் பட்டியலில் இருக்காது.

எடுத்துக்காட்டு-7. 3ஆல் வகுபடக்கூடிய ஈரிலக்க எண்கள் எத்தனை?

தீர்வு : 3ஆல் வகுபடக்கூடிய ஈரிலக்க எண்கள் $12, 15, 18, \ldots, 99$

இது ஒரு கூட்டுத்தொடரா? ஆமாம். இங்கு $a = 12, d = 3, a_n = 99.$

$$a_n = a + (n - 1)\, d.$$

$$99 = 12 + (n - 1) \times 3$$

$$87 = (n-1) \times 3$$

$$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

$$n = 29 + 1 = 30$$

எனவே 3ஆல் வகுபடக்கூடிய ஈரிலக்க எண்கள் 30.

எடுத்துக்காட்டு-8. $10, 7, 4, \ldots, -62$ என்ற கூட்டுத்தொடரில் கடைசியிலிருந்து 11வது உறுப்பு காண்க.

தீர்வு : $a = 10, d = 7 - 10 = -3, l = -62,$

$l = a + (n-1)\,d$ என்று நமக்குத் தெரியும்.

கடைசியில் இருந்து 11வது உறுப்பைக்காண கூட்டுத்தொடரில் உள்ள மொத்த உறுப்புகளை நாம் காணவேண்டும்.

எனவே,

$$-62 = 10 + (n-1)(-3)$$

$$-72 = (n-1)(-3)$$

$$n - 1 = 24$$

$$n = 25$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடரில் 25 உறுப்புகள் உள்ளன.

$\therefore$ கடைசியில் இருந்து 11வது உறுப்பு 15வது உறுப்பாகும். (அது 14வது உறுப்பு அல்ல என்பதை கவனி. ஏன்?)

எனவே, $a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

$\therefore$ கடைசியிலிருந்து 11வது உறுப்பு -32 ஆகும்.

குறிப்பு : கடைசியில் இருந்து 11வது உறுப்பு என்பது முதல் உறுப்பு -62, பொது வித்தியாசம் 3 உள்ள கூட்டுத்தொடரின் 15வது உறுப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு-9: ₹ 1000 க்கு வருடத்திற்கு 8% தனிவட்டி வீதம் ஒவ்வொரு வருடக்கடைசியில் கிடைக்கும் வட்டியை கணக்கிடு. இந்த வட்டிகள் ஒரு கூட்டுத்தொடராகுமா? கூட்டுத்தொடர் எனில் 30வது வருட கடைசியில் கிடைக்கும் வட்டியை கணக்கிடு.

தீர்வு : $\frac{P \times R \times T}{100}$ என்பது தனி வட்டி காணும் சூத்திரம் என்று நமக்குத் தெரியும்.

தனிவட்டி, $I = \frac{P \times R \times T}{100}$

முதல்வருட கடைசியில் வட்டி $= ₹\, \frac{1000 \times 8 \times 1}{100} = ₹\, 80$

2ம் வருட கடைசியில் வட்டி $= ₹\, \frac{1000 \times 8 \times 2}{100} = ₹\, 160$

3ம் வருட கடைசியில் வட்டி $= \dfrac{1000 \times 8 \times 3}{100} = ₹\, 240$

இவ்வாறே 4ம், 5ம்,.... வருட கடைசியில் கிடைக்கும் வட்டியை பெறலாம். எனவே 1ம், 2ம், 3ம் .... வருட கடைசியில் கிடைக்கும் வட்டி (ரூபாயில்) முறையே 80,160,240...

இந்த பட்டியலில் அடுத்தடுத்த இரண்டு உறுப்புகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் 80. எனவே இது கூட்டுத்தொடராகும்.

அதாவது $d = 80$ மேலும் $a = 80$.

எனவே, 30வது வருட கடைசியில் கிடைக்கும் வட்டியை காண, நாம் a_{30} ஐ காண வேண்டும்.

இப்போது $a_{30} = a + (30 - 1)\, d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

$\therefore$ 30வது வருட கடைசியில் கிடைக்கும் வட்டி ₹ 2400.

எடுத்துக்காட்டு-10 : ஒரு மலர்படுக்கையில் முதல் வரிசையில் 23 ரோஜா செடிகளும் 2வது வரிசையில் 21, 3வது வரிசையில் 19... உள்ளன. கடைசி வரிசையில் 5 ரோஜா செடிகள் உள்ளன. மலர்படுக்கையில் உள்ள வரிசைகள் எத்தனை?

தீர்வு : 1ம், 2ம், 3ம்... வரிசைகளில் உள்ள ரோஜா செடிகளின் எண்ணிக்கை : 23,21,19,.........,5

இது கூட்டுத்தொடராகும். (ஏன்)

மலர் படுக்கையில் உள்ள வரிசைகளின் எண்ணிக்கை n என்க.

இங்கு $a = 23,\ d = 21 - 23 = -2,\ a_n = 5$

$$a_n = a + (n - 1)\, d$$
$$5 = 23 + (n - 1)(-2)$$
$$-18 = (n - 1)(-2)$$
$$n = 10$$

ஆகவே, மலர் படுக்கையில் 10 வரிசைகள் உள்ளன.

பயிற்சி - 6.2

1. கூட்டுத்தொடரின் முதல் உறுப்பு a, பொதுவித்தியாசம் d, n வது உறுப்பு a_n எனில் பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்புக.

வ.எண்	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	– 18	. . .	10	0

(iii)	. . .	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

2. கீழ்கண்டவற்றை காண்க.
   (i) 10, 7, 4 ...... என்ற கூட்டுத்தொடரின் 30வது உறுப்பு.
   (ii) $-3, \frac{-1}{2}, 2, \ldots$.. என்ற கூட்டுத்தொடரின் 11வது உறுப்பு.
3. கீழ்கண்டவற்றை காண்க.
   (i) $a_1 = 2,\ a_3 = 26$; எனில் a_2 (ii) $a_2 = 13,\ a_4 = 3$; எனில் a_1, a_3
   (iii) $a_1 = 5, a_4 = 9\frac{1}{2}$; எனில் a_2, a_3 (iv) $a_1 = -4, a_6 = 6$; எனில் a_2, a_3, a_4, a_5
   (v) $a_2 = 38,\ a_6 = -22$; எனில் a_1, a_3, a_4, a_5
4. 3, 8, 13, 18, . . . என்ற கூட்டுத்தொடரில் 78 எத்தனையாவது உறுப்பு?
5. கீழ்கண்ட ஒவ்வொரு கூட்டுத்தொடரிலும் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை எழுது.
   (i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, \ldots, -47$
6. 11, 8, 5, 2.... என்ற கூட்டுத்தொடரில் -150 ஓர் உறுப்பா? இல்லையா? என சோதித்துப்பார்.
7. ஒரு கூட்டுத்தொடரில் 11வது உறுப்பு 38, 16வது உறுப்பு 73 எனில் 31வது உறுப்பைக் காண்க.
8. ஒரு கூட்டுத்தொடரின் 3வது மற்றும் 9வது உறுப்புகள் முறையே 4 மற்றும் -8 எனில் எத்தனையாவது உறுப்பு 0ஆக இருக்கும்?
9. ஒரு கூட்டுத்தொடரின் 17வது உறுப்பு 10வது உறுப்பைவிட 7 அதிகம் எனில் பொதுவித்தியாசத்தைக் காண்க.
10. இரண்டு கூட்டுத்தொடர்கள் ஒரே பொதுவித்தியாசத்தை பெற்றுள்ளன. அவற்றின் 100வது உறுப்புகளின் வித்தியாசம் 100 எனில் அவற்றின் 1000வது உறுப்புகளின் வித்தியாசம் என்ன?
11. 7ஆல் வகுபடக்கூடிய மூன்றிலக்க எண்கள் எத்தனை?
12. 10க்கும் 250க்கும் இடையில் உள்ள 4ன் மடங்கிகள் எத்தனை?
13. 63,65,67... மற்றும் 3,10,17... என்ற இரண்டு கூட்டுத்தொடர்களில் n-ன் எந்த மதிப்பிற்கு n வது உறுப்புகள் சமமாக இருக்கும்?
14. மூன்றாவது உறுப்பு 16 மற்றும் 7வது உறுப்பு 5வது உறுப்பை விட 12 அதிகம் உள்ள கூட்டுத்தொடரை காண்க.
15. 3, 8, 13, . . ., 253 என்ற கூட்டுத்தொடரின் கடைசியிலிருந்து 20வது உறுப்பைக் காண்க.

16. ஒரு கூட்டுத்தொடரில் 4வது மற்றும் 8வது உறுப்புகளின் கூடுதல் 24 மேலும் 6வது மற்றும் 10வது உறுப்புகளின் கூடுதல் 44 எனில் முதல் மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

17. சுப்பாராவு 1995ஆம் வருடம் மாதம் ₹ 5000 சம்பளத்திற்கு வேலையில் சேர்ந்தார். ஒவ்வொரு வருடமும் சம்பள உயர்வு ₹ 200 பெற்றார். எந்த வருடம் அவர் சம்பளம் ₹ 7000 ஐ அடையும்?

6.4 ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் 12 உறுப்புகளின் மொத்தம்

பிரிவு 6.1ல் கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலையை மீண்டும் நாம் கருதுவோம். ஹேமா தன் மகனின் முதல் பிறந்தநாள் அன்று ₹ 1000 ஐ அவளுடைய பணப்பெட்டியில் போட்டாள். இரண்டாவது பிறந்தநாள் அன்று ₹ 1500; மூன்றாவது பிறந்தநாள் அன்று ₹ 2000 மற்றும் இவ்வாறே ஒவ்வொரு பிறந்தநாள் அன்றும் தொடர்கிறது. அவளுடைய மகளின் 21வது பிறந்தநாள் அன்று பணப்பெட்டியில் எவ்வளவு பணம் இருக்கும்?

இங்கு முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம்,நான்காம்... பிறந்த நாட்களில் பெட்டியில் உள்ள பணம் முறையே 1000, 1500, 2000, 2500.... இவ்வாறு 21வது பிறந்தநாள் வரை தொடர்கிறது. 21வது பிறந்தநாள் வரை அவள் பணப்பெட்டியில் உள்ள மொத்த பணத்தைக் காண, மேலே கூறிய 21 எண்களை வரிசையாக எழுதி, கூட்ட வேண்டும். இவ்வாறு செய்வது நேரத்தை வீணாக்குவது மட்டுமல்லாமல் கடினமானதும் கூட என்று உங்களால் ஊகிக்க முடிகிறதா? இதை சுலபமாக்க முடியுமா?

மொத்தம் காணும் முறையை காண முடிந்தால் அது சாத்தியமாகும். நாம்பார்க்கலாம்.

6.4.1 காஸ் உறுப்புகளின் மொத்தம் காணும் முறை

Carl Fredrich Gauss (1777-1855) is a great German Mathematician

காஸ் 10வது வயதில் செய்த ஒரு கணக்கை இப்பொழுது நாம் கருதுவோம். இவருடைய 10வது வயதில் 1லிருந்து 100வரை உள்ள மிகை எண்களின் மொத்தம் காணுமாறு இவரிடம் கேட்கப்பட்டது. அவர் உடனே மொத்தம் 5050 என்று விடையளித்தார். அவர் எவ்வாறு செய்திருப்பார் என்று உன்னால் ஊகிக்க முடிகிறதா?

அவர் அதை கீழ்கண்டவாறு எழுதினார்

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

மீண்டும் அவர் அவற்றை திருப்பி எழுதினார்

$$S = 100 + 99 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

அவர் இந்த இரண்டையும் கூட்டி கீழ்கண்டவாறு கண்டார்

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \ldots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$= 101 + 101 + \ldots + 101 + 101$ (100 முறை) (இதை சரிபார்த்துவிவாதி)

ஆகவே, $S = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050$, $\therefore$ மொத்தம் $= 5050$.

6.4.2 ஒரு கூட்டுத்தொடரின் n உறுப்புகளின் மொத்தம்.

நாமும் $a, a + d, a + 2d, . . .$ என்ற கூட்டுத்தொடரின் n உறுப்புகளின் மொத்தம் காண காஸ் முறையை பின்பற்றுகிறோம்.

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் nவது உறுப்பு $a + (n - 1) d$.

கூட்டுத்தொடரின் 12வது உறுப்புகள் வரை மொத்தம் S_n என்க. இதன் n வது உறுப்பு $a_n = a + (n - 1) d$

$$\therefore\ S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + ... + a + (n-1)d$$

$$S_n = (a + (n-1)d) + (a + (n-2)d + ... + a$$

கூட்ட $2S_n = (2a + (n - 1)d) + (2a + (n - 1)d) + ... + (2a + (n - 1)d)$ (n முறைகள்)

$$= n(2a + (n - 1)d)$$

$$\therefore\ S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] = \frac{n}{2}\ [\text{முதல்உறுப்பு} + n\text{வதுஉறுப்பு}] = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் உறுப்பு மற்றும் கடைசி உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டு, பொது வித்தியாசம் கொடுக்கப்படவில்லை எனில்

$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$ என்பது S_n காண்பதற்கு மிகவும் உதவியாக இருக்கும்.

ஹேமா மகளின் பணம் :

மீண்டும் நாம் ஆரம்பத்தில் பார்த்த வினாவை பரிசீலனை செய்வோம்

ஹேமா மகளின் 1ம்,2ம்,3ம்,4ம்..... பிறந்த நாள் அன்று பணப் பெட்டியில் உள்ள பணம் முறையே 1000,1500,2000,2500...

இது ஒரு கூட்டுத்தொடர். 21வது பிறந்தநாள் அன்று அவளுடைய பணப்பெட்டியில் உள்ள மொத்த பணத்தை நாம் கணக்கிட வேண்டும். அதாவது கூட்டுத்தொடரின் முதல் 21வது உறுப்புகளின் மொத்தம் காணவேண்டும்.

இங்கு $a = 1000$, $d = 500$ மற்றும் $n = 21$.

சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d],$$

$$S = \frac{21}{2}[2 \times 1000 + (21-1) \times 500]$$

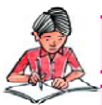
$$= \frac{21}{2}[2000 + 10000]$$

$$= \frac{21}{2}[12000] = 126000$$

ஆகவே, 21வது பிறந்தநாள் அன்று அவளுடைய பணப்பெட்டியில் உள்ள மொத்த பணம் ₹ 126000 ஆகும்.

கூட்டுத்தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் மொத்தம் காண S க்கு பதிலாக S_n ஐ பயன்படுத்துகிறோம். இதனால் நாம் எத்தனை உறுப்புகளை கூட்டவேண்டும் என்று நமக்குத்தெரியும். ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் 20 உறுப்புகளின் மொத்தத்தை S_{20} என்று எழுதுகிறோம். முதல் n உறுப்புகளின் மொத்தம் காணும் சூத்திரத்தில் S_n, a, d மற்றும் n என்ற நான்கு அளவைகள் உள்ளன. இதில் ஏதேனும் மூன்று தெரிந்தால், நாம் நான்காவதை கண்டுபிடிக்கலாம்.

குறிப்பு : ஒரு கூட்டுத்தொடரில் முதல் n உறுப்புகளின் மொத்தத்திற்கும் மற்றும் முதல் (n-1) உறுப்புகளின் மொத்தத்திற்கும் உள்ள வித்தியாசம் nவது உறுப்பு ஆகும். i.e., $a_n = S_n - S_{n-1}$.



இதை செய்

பின்வரும் ஒவ்வொரு கூட்டுத்தொடரிலும் கேட்கப்பட்ட உறுப்புகள் வரை மொத்தம் காண்க.

(i) 16, 11, 6 .....; 23 உறுப்புகள் வரை (ii) –0.5, –1.0, –1.5, ...; 10 உறுப்புகள் வரை

(iii) $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$....., 10 உறுப்புகள் வரை

நாம் சில எடுத்துக்காட்டுகளை காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-11: ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் 14உறுப்புகளின் கூடுதல் 1050. முதல் உறுப்பு 10 எனில் 20வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு : இங்கு $S_n = 1050; n = 14, a = 10$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$1050 = \frac{14}{2}[2a + 13d] = 140 + 91d$$

$$910 = 91d$$

$$\therefore \quad d = 10$$

$$\therefore \quad a_{20} = 10 + (20 - 1)\, 10 = 200$$

எடுத்துக்காட்டு-12: 24, 21, 18, . . . என்ற கூட்டுத்தொடரில் எத்தனை உறுப்புகளின் மொத்தம் 78ஆகும்?

தீர்வு : இங்கு $a = 24, d = 21 - 24 = -3, Sn = 78$. நாம் n ஐ காணவேண்டும்.

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ என்று நமக்குத் தெரியும்.

ஆகவே $\quad 78 = \frac{n}{2}[48 + (n - 1(-3)] = \frac{n}{2}[51 - 3n]$

அல்லது $\quad 3n^2 - 51n + 156 = 0$

$$n^2 - 17n + 52 = 0$$
$$(n-4)(n-13) = 0$$
$$n = 4 \text{ or } 13$$

nன் இரண்டு மதிப்புகளையும் எடுத்துக்கொள்ளலாம். ஆகவே உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 4 அல்லது 13.

குறிப்புகள் :

1. இந்த வகையில் முதல் நான்கு உறுப்புகளின் மொத்தம் = முதல் 13உறுப்புகளின் மொத்தம் = 78

2. இத்தொடரில் 5வது உறுப்பிலிருந்து 13வது உறுப்புகள் வரையான மொத்தம் 0 ஆவதால் இந்த இரண்டு விடைகளும் சாத்தியமே. ஏனெனில் a மிகை d குறையாக இருப்பதால் சில உறுப்புகள் மிகையாகவும் சில உறுப்புகள் குறையாகவும் இருக்கின்றன. அவை ஒன்றுக்கொன்று அடிபட்டுவிடும்.

எடுத்துக்காட்டு-13 : மொத்தம் காண்க :

(i) முதல் 1000 மிகை முழுக்களின் (ii) முதல் n மிகை முழுக்களின்

தீர்வு :

(i) $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$ என்க

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் n உறுப்புகள் வரை மொத்தம்

$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ என்ற சூத்திரத்தை பயன்படுத்தினால்

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

$\therefore$ முதல் 1000 மிகை முழுக்களின் மொத்தம் 500500.

(ii) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ என்க

இங்கு $a = 1$ கடைசி உறுப்பு $l = n$.

$$\therefore S_n = \frac{n(1+n)}{2} \quad \text{(or)} \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

எனவே, முதல் n மிகை முழுக்களின் மொத்தம்

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

எடுத்துக்காட்டு-14 : $a_n = 3 + 2n$ ஐ n-வது உறுப்பாக கொண்ட தொடரின் முதல் 24 உறுப்புகளின் மொத்தம் காண்க.

தீர்வு : $a_n = 3 + 2n,$

$$a_1 = 3 + 2 = 5$$

$$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$$
$$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$$
$$\vdots$$

எண்கள் பட்டியல் $5, 7, 9, 11, \ldots$

இங்கு, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$

ஆகவே, இது கூட்டுத்தொடராகும். இதன் பொதுவித்தியாசம் $d = 2$.

n=24, a=25, d=2 ஆகியவற்றைக்கொண்டு நாம் S_{24} ஐ காணவேண்டும்.

$$\therefore \quad S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24-1) \times 2] = 12(10+46) = 672$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் முதல் 24 உறுப்புகள் வரை மொத்தம் 672.

எடுத்துக்காட்டு-15. ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டி தயாரிக்கும் கம்பெனி 3ம் ஆண்டு 600 தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளையும் 7ம் ஆண்டு 700 தொலைக்காட்சி பெட்டிகளையும் தயாரிக்கிறது. இந்த தயாரிப்பு ஒவ்வொரு வருடமும் ஒரு நிலையான எண்ணிக்கையில் உயருகிறது எனக் கொள்வோம். கீழ்கண்டவற்றை காண்க.

(i) முதல் ஆண்டு தயாரிப்பு (ii) 10ஆம் ஆண்டு தயாரிப்பு

(iii) முதல் 7வருட மொத்த தயாரிப்பு

தீர்வு : (i) தயாரிப்பு ஒவ்வொரு ஆண்டும் ஒரு நிலையான எண்ணிக்கையில் உயருவதால், 1ம்,2ம்,3ம்... ஆண்டுகளில் தயாரிக்கப்படும் தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை ஒரு கூட்டுத்தொடராகும்.

nம் ஆண்டில் தயாரிக்கப்படும் தொலைக்காட்சிப்பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை a_n என்க. பிறகு $a_3 = 600, \; a_7 = 700$

அல்லது $a + 2d = 600$

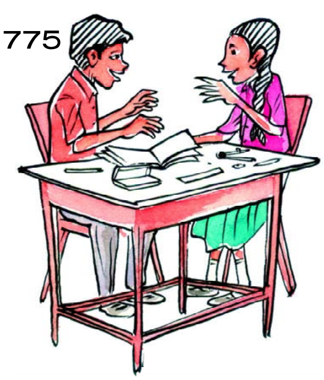
$a + 6d = 700$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளை தீர்த்தால், நாம் பெறுவது $d = 25, \; a = 550$.

முதல் ஆண்டில் தயாரிக்கப்பட்ட தொலைக்காட்சிப்பெட்டிகள் = 500

(ii) இப்பொழுது $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

10ம் ஆண்டில் தயாரிக்கப்பட்ட தொலைக்காட்சிபெட்டிகள் = 775



(iii) மேலும் $$S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7-1) \times 25]$$

$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

எனவே முதல் 7ஆண்டுகளில் தயாரிக்கப்பட்ட மொத்த தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகள் = 4375

பயிற்சி - 6.3

1. கீழ்கண்ட கூட்டுத்தொடர்களின் மொத்தம் காண்க.

(i) 2, 7, 12, . . ., 10 உறுப்புகள் வரை (ii) –37, –33, –29, . . ., 12 உறுப்புகள் வரை
(iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., 100 உறுப்புகள் வரை (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, ...$ 11 உறுப்புகள் வரை.

2. கீழ்கண்டவற்றிற்கு மொத்தங்களை காண்க.

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + ... + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + . . . + 10$

(iii) $–5 + (–8) + (–11) + . . . + (–230)$

3. ஒரு கூட்டுத்தொடரில்

(i) $a = 5, d = 3, a_n = 50$, எனில் n மற்றும் S_n காண்க.
(ii) $a = 7, a_{13} = 35$, எனில் d மற்றும் S_{13} காண்க.
(iii) $a_{12} = 37, d = 3$, எனில் a மற்றும் S_{12} காண்க.
(iv) $a_3 = 15, S_{10} = 125$, எனில் d மற்றும் a_{10} காண்க.
(v) $a = 2, d = 8, S_n = 90$, எனில் n மற்றும் a_n காண்க.
(vi) $a_n = 4, d = 2, S_n = –14$, எனில் n மற்றும் a காண்க.
(vii) $l = 28, S = 144$, மேலும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 9 எனில் aஐ காண்க.

4. ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் மற்றும் கடைசி உறுப்புகள் முறையே 17 மற்றும் 350. பொது வித்தியாசம் 9 எனில் தொடரில் உள்ள உறுப்புகள் எத்தனை? அவற்றின் மொத்தம் என்ன?

5. ஒரு கூட்டுத்தொடரின் இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் உறுப்புகள் முறையே 14 மற்றும் 18 எனில் முதல் 51 உறுப்புகளின் மொத்தம் காண்க.

6. ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் 7 உறுப்புகளின் மொத்தம் 49. 17 உறுப்புகளின் மொத்தம் 289 எனில் முதல் n உறுப்புகளின் மொத்தம் காண்க.

7. a_n கீழே உள்ளவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. $a_1, a_2, . . ., a_n, . . .$ ஒரு கூட்டுத்தொடர் எனக்காட்டு.

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 – 5n$

மேலும் ஒவ்வொரு நிலையிலும் முதல் 15 உறுப்புகளின் மொத்தம் காண்க.

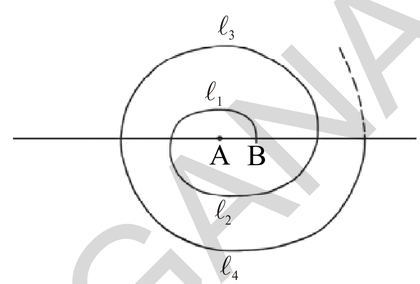
8. ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் n உறுப்புகள் வரை மொத்தம் $4n – n^2$. முதல் உறுப்பு என்ன? முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் மொத்தம் என்ன? இரண்டாவது உறுப்பு என்ன? இவ்வாறே 3வது, 10வது மற்றும் nவது உறுப்புகளை காண்க.

9. 6ஆல் வகுபடக்கூடிய முதல் 40 மிகை முழுக்களின் மொத்தம் காண்க.

10. ஒரு பள்ளியில் கல்வி சம்பந்தமாக மாணவர்களுக்கு ஏழு பரிசுத்தொகைகளை பணமாக வழங்க ₹ 700 ஐ செலவு செய்தது. ஒவ்வொரு பரிசுத்தொகையும் முந்தைய பரிசுத்தொகையை விட ₹ 20 குறைவு, எனில் ஒவ்வொரு பரிசுத்தொகையின் மதிப்பு காண்க.

11. ஒரு பள்ளியில் சுற்றுப்புறச் சூழல் பாதுகாப்பிற்காக, மாணவர்கள் பள்ளியை சுற்றிலும் மரக்கன்றுகளை நடமுடிவு செய்தனர். ஒவ்வொரு பிரிவு மாணவர்களும் அவர்கள் படிக்கும் வகுப்பிற்கு சமமான செடிகளை அதாவது 1ம் வகுப்பு படிக்கும் ஒரு பிரிவு மாணவர்கள் 1 செடியும், இரண்டாம் வகுப்பு படிக்கும் ஒரு பிரிவு மாணவர்கள் 2 செடிகளும் நடவேண்டும். இவ்வாறு 12ம் வகுப்பு வரை செய்யவேண்டும் என்று முடிவு செய்தார்கள். ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் மூன்று பிரிவுகள் இருந்தால் நட்ட மொத்த செடிகள் எத்தனை?

12. தொடர்ச்சியான அரைவட்டங்களால் ஒரு சுருள் செய்யப்படுகிறது. படத்தில் காட்டியவாறு அரைவட்டத்தின் மையங்கள் A ஆரம்பித்து A, Bகளுக்கு இடையே மாறிக்கொண்டே இருக்கிறது. அதாவது முதல் அரைவட்டத்தின் மையம் A, இரண்டாவது அரைவட்ட மையம் B, மூன்றாவது அரைவட்ட மையம் A..., மேலும் அரைவட்டத்தின் ஆரங்கள் முறையே 0.5 செ.மீ, 1.0 செ.மீ, 1.5 செ.மீ, 2.0 செ.மீ . . . இவ்வாறு 13 அரைவட்டங்கள் உள்ளது எனில் சுருளின் மொத்த நீளம் எவ்வளவு? ($\pi = \frac{22}{7}$)



[**குறிப்பு :** தொடர்ச்சியான அரைவட்டத்தின் நீளங்கள் முறையே $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$ மேலும் அவற்றின் மையங்கள் முறையே A, B, A, B, . . .]

13. 200 மரத்துண்டுகள் கீழே படத்தில் காட்டியவாறு அடுக்கிவைக்கப்பட்டுள்ளது. கீழ்வரிசையில் 20 மரத்துண்டுகள், அதன்மேல் 19 மரத்துண்டுகள் அதன்மேல் 18 மரத்துண்டுகள்... அடுக்கி வைக்கப்படுகிறது. 200 மரத்துண்டுகளை அடுக்கிவைப்பதற்கு எத்தனை வரிசைகள் தேவை? எல்லாவற்றிற்கும் மேலே உள்ள வரிசையில் எத்தனை மரத்துண்டுகள் இருக்கும்?

14. வாளி பந்து போட்டியில் ஆரம்பத்தில் வாளி வைக்கப்பட்ட இடத்திலிருந்து அதிலிருந்து 5மீ தூரத்தில் ஒரு பந்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. மொத்தம் உள்ள 10 பந்துகளில் மீதமுள்ள பந்துகள் ஒன்றுக்கொன்று 3மீ தூரத்தில் படத்தில் காட்டியவாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது.

விளையாட்டில் கலந்துகொள்ளும் ஒரு சிறுமி, வாளி உள்ள இடத்திலிருந்து கிளம்பிச் சென்று முதல் பந்தை எடுத்து வந்து வாளியில் போடுகிறாள். மீண்டும் வாளியிடம் இருந்து கிளம்பிச் சென்று இரண்டாவது பந்தை எடுத்துவந்து வாளியில் போடுகிறாள். இவ்வாறு மொத்த பந்துகளையும் வாளியில் போடவேண்டும். அந்த சிறுமி ஓடவேண்டிய மொத்த தூரம் எவ்வளவு?

[**குறிப்பு :** ஒன்றாவது, இரண்டாவது பந்துகளை எடுத்துவர அச்சிறுமி ஓடவேண்டிய தூரம் $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

6.5 பெருக்குத்தொடர் :

கீழ்கண்ட பட்டியலை கருதுவோம்

(i) 30, 90, 270, 810 ..... (ii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$.....

(iii) 30, 24, 19.2, 15.36, 12.288

மேலே சொன்ன ஒவ்வொரு பட்டியலிலும் அடுத்த உறுப்பை நம்மால் கூறமுடியுமா?

(i)ல் ஒவ்வொரு உறுப்பும், அதன் முந்தைய உறுப்பை 3ஆல் பெருக்குவதால் கிடைக்கிறது.

(ii) ல் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்பை $\frac{1}{4}$ ஆல் பெருக்குவதால் கிடைக்கிறது.

(iii) ல் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்பை 0.8ஆல் பெருக்குவதால் கிடைக்கிறது.

மேலே கூறிய அனைத்திலும், தொடரி உறுப்புகள், அதன் முந்தைய உறுப்புகளை ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் பெருக்குவதால் கிடைக்கிறது. இவ்வாறான எண்களின் பட்டியலை பெருக்குத் தொடர் **(GP)** என்பர். இந்த நிலையான எண் பெருக்குத் தொடரின் பொதுவிகிதம் 'r' எனப்படுகிறது. எனவே மேலே கூறிய எடுத்தக்காட்டில் (i), (ii), (iii)ல் பொதுவிகிதம் முறையே $3, \frac{1}{4}, 0.8$ஆகும்.

ஒரு பெருக்குத்தொடரின் முதல் உறுப்பு a என்றும், பொதுவிகிதத்தை r என்றும், நாம் குறிக்கிறோம். இரண்டாவது உறுப்பை பெற பெருக்குத்தொடரின் விதிப்படி, முதல் உறுப்பை பொதுவிகிதம் 'r'ஆல் பெருக்கவேண்டும்.

$\therefore$ இரண்டாவது உறுப்பு $= ar$

மூன்றாவது உறுப்பு $= ar \cdot r = ar^2$

$\therefore$ a, ar, ar^2 ..... என்பது ஒரு பெருக்குத்தொடரின் பொது வடிவம் ஆகும். மேற்கூறிய பெருக்குத்தொடரில் ஒரு உறுப்பிற்கும் (முதல் உறுப்பை தவிர) அதன் முன் உறுப்பிற்கும் உள்ள விகிதம் 'r' ஆகும்.

அதாவது $\frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar} = \ldots\ldots\ldots = r$

ஒரு பெருக்குத்தொடரின் முதல் உறுப்பை a_1, இரண்டாம் உறுப்பை a_2 ..... nவது உறுப்பை a_n என்று குறிப்பிட்டால்.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

$\therefore$ $a_1, a_2, a_3 \ldots. a_n \ldots$ என்பது ஒரு பெருக்குத்தொடராக வேண்டுமெனில் ஒவ்வொறு உறுப்பும் பூஜ்ஜியமல்லாத உறுப்பாகவும் $\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$ $(r \neq 1)$ ஆகவும் இருக்கவேண்டும். இங்கு n ஓர் இயல் எண் மேலும் $n \geq 2$.

இதை செய்

கீழ்கண்டவற்றில் எவை பெருக்குத்தொடர் எனக்காண்க.

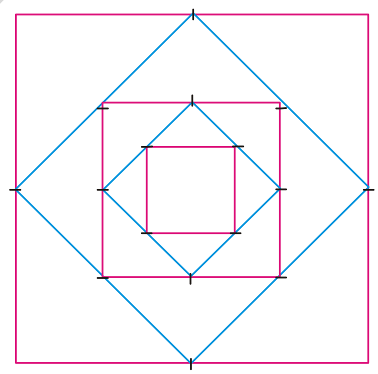
1. 6, 12, 24, 48, ...
2. 1, 4, 9, 16, ...
3. 1, −1, 1, −1, ...
4. −4, −20, −100, −500, ...

பெருக்குத்தொடருக்கு மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) ஒருவர் தன்னுடைய நான்கு நண்பர்களுக்கு ஒரு கடிதம் எழுதுகிறார். அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் மேலும் நான்கு பேருக்கு இதே கடிதத்தை எழுதி அனுப்புமாறு கூறினார். இந்த சங்கிலி இவ்வாறே தொடர்ந்தால் முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம், நான்காம்..... நிலையில் கடிதங்களின் எண்ணிக்கை முறையே 1, 4, 16, 64 ....

(ii) ₹ 500/- ஐ வருடத்திற்கு 10% கூட்டுவட்டிவீதம் ஒரு வங்கியில் சேமிப்பில் போட்டால், முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம்... வருடக் கடைசியில் உள்ள மொத்தம் முறையே 550, 605, 665.5 ......

(iii) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சதுரத்தின் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை சேர்த்து ஒரு சதுரம் வரையப்படுகிறது. இதே முறையில் இரண்டாவது சதுரத்திற்குள் மூன்றாவது சதுரம் வரையப்படுகிறது. இது முடிவில்லாமல் தொடர்கிறது. முதல் சதுரத்தின் பக்கம் 16செ.மீ. எனில் முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம், நான்காம் ,.... சதுரங்களின் பரப்பளவுகள் முறையே 256, 128, 64, 32, ...



(iv) ஒரு கடிகாரத்தில் உள்ள ஊசல் முதல் அலையில் 18செ.மீ. வில்லை ஏற்படுத்துகிறது. அடுத்தடுத்த ஒவ்வொரு அலைவின் போதும் வில்லின் நீளம் 0.9 மடங்கு குறைந்து கொண்டே செல்கிறது. அப்படியெனில் முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது... அலைவுகளில் ஏற்படும் வில்லின் நீளங்கள் முறையே 18, 16.2, 14.58, 13.122......

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

1. மேலே கூறிய விவரங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஏன் ஒரு பெருக்குத்தொடராகிறது என்பதை விவரி.

2. ஒரு பெருக்குத்தொடரை அறிய நமக்குத் தேவையான மிகக்குறைந்த விவரம் என்ன?

முதல் உறுப்பு 'a'ம் பொது விகிதம் 'r' ம் கொடுக்கப்பட்டால், ஒரு பெருக்குத்தொடரை எவ்வாறு அமைப்பது என்பதை நாம் இப்பொழுது கற்கலாம். மேலும் கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் பட்டியல் ஒரு பெருக்குத்தொடரா இல்லையா என சரிபார்ப்பது எப்படி என்பதையும் கற்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-16 : முதல் உறுப்பு $a = 3$, பொதுவிகிதம் $r = 2$ எனில் பெருக்குத்தொடரை எழுது.

தீர்வு : முதல் உறுப்பு 'a' ஆனதால், தொடரை சுலபமாக எழுதலாம்.

பெருக்குத்தொடரில் ஒவ்வொரு தொடரியும் அதற்கு முந்தைய உறுப்பை பொதுவிகிதம் 'r'அல் பெருக்குவதால் கிடைக்கிறது என்று நமக்குத் தெரியும். எனவே இரண்டாவது உறுப்பை பெற முதல் உறுப்பு $a = 3$ஐ பொதுவிகிதம் $r = 2$ஆல் பெருக்கவேண்டும்.

$\therefore$ இரண்டாவது உறுப்பு $= ar = 3 \times 2 = 6$

இவ்வாறே மூன்றாவது உறுப்பு = இரண்டாவது உறுப்பு $\times$ பொதுவிகிதம்

$= 6 \times 2 = 12$

இதே முறையில் செய்தால் பெருக்குத்தொடர் பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$3, 6, 12, 24, \ldots\ldots$.

எடுத்துக்காட்டு-17 : $a = 256,\ r = \frac{-1}{2}$ எனில் பெருக்குத்தொடரை எழுது.

தீர்வு : பெருக்குத்தொடரின் பொதுவடிவம் $\text{GP} = a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots$

$$= 256, 256\left(\frac{-1}{2}\right), 256\left(\frac{-1}{2}\right)^2, 256\left(\frac{-1}{2}\right)^3$$

$$= 256, -128, 64, -32 \ldots\ldots$$

எடுத்துக்காட்டு-18 : $25,\ -5,\ 1,\ \frac{-1}{5}$ என்ற பெருக்குத்தொடரின் பொதுவிகிதம் காண்க.

தீர்வு : ஒரு பெருக்குத்தொடரின் முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது,.... உறுப்புகள் முறையே $a_1, a_2, a_3 \ldots.$ எனில் பொதுவிகிதம் $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots..$ என்று நமக்குத் தெரியும்.

இங்கு $a_1 = 25,\ a_2 = -5, a_3 = 1.$

எனவே, பொதுவிகிதம் $r = \frac{-5}{25} = \frac{1}{-5} = \frac{-1}{5}$.

எடுத்துக்காட்டு-19 : பின்வரும் எண்களின் பட்டியலில் எவை பெருக்குத்தொடரை அமைக்கின்றன?

(i) $3, 6, 12, \ldots..$ (ii) $64, -32, 16,$

(iii) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$

தீர்வு : (i) $a_1, a_2, a_3, ...a_n .....$ என்பது ஒரு பெருக்குத்தொடர் ஆகவேண்டுமெனில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் பூஜ்ஜியமல்லாத உறுப்பாகவும் $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$ ஆகவும் இருந்தால் ஒரு எண்களின் பட்டியல் பெருக்குத்தொடராகும் என்று நமக்குத் தெரியும்.

இங்கு அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியமற்ற உறுப்புகள் ஆகும். மேலும்

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = 2$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் பட்டியலில் பொதுவிகிதம் 2ஐ உடைய ஒரு பெருக்குத் தொடர் ஆகும்.

(ii) அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியமற்றவை.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-32}{64} = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{16}{-32} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{2}$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் பட்டியலில் பொதுவிகிதம் $\frac{-1}{2}$ஐ உடைய ஒரு பெருக்குத்தொடராகும்.

(iii) அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியமற்றவை

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{64}} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{32}} = 4$$

இங்கு $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$

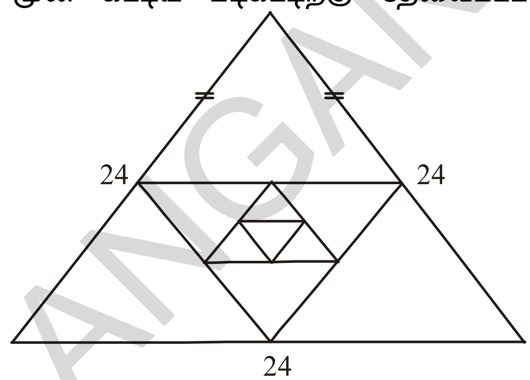
எனவே, கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் பட்டியல் பெருக்குத்தொடராகாது.

பயிற்சி - 6.4

1. கீழ்கண்ட எந்த சூழ்நிலையில் உருவாகும் எண்களின் பட்டியல் ஒரு பெருக்குத்தொடரை அமைக்கும்?

   (i) ஷர்மிளாவின் முதல் ஆண்டு சம்பளம் ₹ 5,00,000 அதன் பிறகு ஒவ்வொரு ஆண்டும் முன்னுள்ள சம்பளத்தை விட 10% அதிகரிக்கிறது.

   (ii) 30 படிகள் உள்ள ஒரு மாடியை கட்ட அனைத்திற்கும் கீழே உள்ள படியை கட்ட 100 செங்கற்கள் தேவைப்படுகிறது. அதன் பிறகு ஒவ்வொரு படியை கட்டுவதற்கும் அதன் முன் கட்டிய படிகட்டிற்கு தேவைபட்ட செங்கற்களை விட 2 குறைவாக தேவைப்படுகிறது எனில் ஒவ்வொரு படிகட்டும் கட்டுவதற்கு தேவைபடும் செங்கற்களின் எண்ணிக்கை பட்டியல்.



   (iii) 24செ.மீ பக்க அளவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து இரண்டாவது முக்கோணம், அதன் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து மூன்றாவது முக்கோணம் ஏற்படுகிறது. இம் முறையை முடிவில்லாமல் தொடர்ந்தால் முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது,.... முக்கோணங்களின் சுற்றளவுகள்.

2. ஒரு பெருக்குத்தொடரின் முதல் உறுப்பு 'a' மற்றும் பொதுவிகிதம் 'r' கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. முதல் மூன்று உறுப்புகளை எழுது.

   (i) $a = 4;\quad r = 3$ (ii) $a = \sqrt{5}\,;\quad r = \dfrac{1}{5}$

   (iii) $a = 81;\quad r = \dfrac{-1}{3}$ (iv) $a = \dfrac{1}{64}\,;\quad r = 2$

3. கீழ்கண்டவற்றில் எவை பெருக்குத்தொடர்? மேலும் மூன்று உறுப்புகளை எழுது.

   (i) $4, 8, 16$ ..... (ii) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{-1}{6}, \dfrac{1}{12}$.....

   (iii) $5, 55, 555,$ .... (iv) $-2, -6, -18$ .....

   (v) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}$..... (vi) $3, -3^2, 3^3,$ .....

   (vii) $x, 1, \dfrac{1}{x}, \ldots\ldots, (x \neq 0)$ (viii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -2, 4\sqrt{2}$.....

   (ix) $0.4, 0.04, 0.004,$ .....

4. $x, x+2, x+6$ ஆகியவை ஒரு பெருக்குத்தொடரின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகள் எனில் x ன் மதிப்பு காண்க.

6.6 ஒரு பெருக்குத்தொடரின் n வது உறுப்பு

நாம் ஒரு கணக்கை பரிசீலிப்போம். ஒவ்வொரு ஒரு மணிநேரத்திற்கும் 3 மடங்கு உற்பத்தியாகும் ஒரு பாக்டீரியா வளர்ப்பில் முதல் ஒரு மணிநேரத்தில் 30 பாக்டீரியாக்கள் இருந்தால் 4வது மணியில் இருக்கக்கூடிய பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

இதற்கு விடையளிக்க, இரண்டாவது மணியில் இருக்கக்கூடிய பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கையை முதலில் காண வேண்டும்.

ஒவ்வொரு மணிக்கும் 3 மடங்கு அதிகரிப்பதால் இரண்டாவது மணியில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை = 3 $\times$ முதலில் இருந்த பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை

$$= 3 \times 30 = 30 \times 3^1$$
$$= 30 \times 3^{(2-1)}$$
$$= 90$$

மூன்றாவது மணியில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை

= $3 \times$ இரண்டாவது மணியில் இருந்த பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை

$$= 3 \times 90 \qquad = 30 \times (3\times3)$$
$$= 30 \times 3^2 \qquad = 30 \times 3^{(3-1)}$$
$$= 270$$

நான்காவது மணியில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை =

$3 \times$ மூன்றாவது மணியில் இருந்த பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை

$$= 3 \times 270 \qquad = 30 \times (3\times3\times3)$$
$$= 30 \times 3^3 \qquad = 30 \times 3^{(4-1)}$$
$$= 810$$

இங்கு நாம் ஒரு எண்களின் பட்டியல் கிடைப்பதை அறியலாம். அது

30, 90, 270, 810, ...

இந்த எண்கள் பெருக்குத்தொடரில் உள்ளதா?

மேலே அமைந்த அமைப்பை பார்க்கும்போது, 20வது மணியில் இருக்கக்கூடிய பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கையை உன்னால் கூறமுடியுமா?

மேலே உள்ளவாறு பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கையை கண்டறிந்த முறையில் இருந்து உங்களுக்கு ஓர் ஆலோசனை தோன்றியிருக்கும். இதே முறையை பயன்படுத்தி, நாம் 20வது மணியில் இருக்கக்கூடிய பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கையை பெறலாம்.

$$= 30\times\underbrace{(3\times3\times\ldots\times3)}_{\text{19 உறுப்புகள்}}$$

$$= 30 \times 3^{19} \qquad = 30 \times 3^{(20-1)}$$

இந்த எடுத்துக்காட்டிலிருந்து நாம் சுலபமாக 25வது உறுப்பு, 35வது உறுப்பு மற்றும் n வது உறுப்புகளைக் கூட காண முடியும்.

a_1, a_2, a_3 ..... ஒரு பெருக்குத்தொடர் என்க. இதன் முதன் உறுப்பு 'a_1' மற்றும் பொதுவிகிதம் 'r'

இரண்டாவது உறுப்பு, $a_2 = ar = ar^{(2-1)}$

மூன்றாவது உறுப்பு, $a_3 = a_2 \times r = (ar) \times r = ar^2 = ar^{(3-1)}$

நான்காவது உறுப்பு, $a_4 = a_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3 = ar^{(4-1)}$

....

....

இந்த அமைப்பை பார்க்கும் போது nவது உறுப்பு $a_n = ar^{n-1}$ என்று நாம் கூறலாம். எனவே, முதல் உறுப்பு 'a', பொது விகிதம் 'r' உடைய ஒரு பெருக்குத்தொடரின் nவது உறுப்பு $a_n = ar^{n-1}$ என கூறலாம்.

நாம் சில எடுத்துக்காட்டுகளை கருதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு-20 : $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}$....... என்ற பெருக்குத்தொடரின் 20வது மற்றும் nவது உறுப்பு காண்க.

தீர்வு : இங்கு $a = \frac{5}{2}, \quad r = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}$

$$\therefore a_{20} = ar^{20-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{5}{2^{20}}$$

$$a_n = ar^{n-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{2^n}$$

எடுத்துக்காட்டு-21 : $2, 2\sqrt{2}, 4$ ..... என்ற பெருக்குத்தொடரில் 128 எத்தனையாவது உறுப்பு?

தீர்வு : இங்கு $a = 2 \quad r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

பெருக்குத்தொடரின் nவது உறுப்பு 128 என்க.

$$a_n = ar^{n-1} = 128$$

$$2.(\sqrt{2})^{n-1} = 128$$

$$(\sqrt{2})^{n-1} = 64$$

$$(2)^{\frac{n-1}{2}} = 2^6$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{n-1}{2} = 6$$

$$\therefore \qquad n = 13.$$

எனவே, பெருக்குத்தொடரின் 13வது உறுப்பு 128.

எடுத்துக்காட்டு-22 : ஒரு பெருக்குத்தொடரின் 3வது உறுப்பு 24, 6வது உறுப்பு 192. 10வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு : இங்கு $a_3 = ar^2 = 24$ ...(1)

$a_6 = ar^5 = 195$ ...(2)

(2)ஐ (1)ஆல் வகுக்க, கிடைப்பது $\dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{195}{24}$

$$\Rightarrow \qquad r^3 = 8 = 2^3$$

$$\Rightarrow \qquad r = 2$$

$r = 2$ ஐ (1)ல் பிரதியிட $a = 6$.

$\therefore \; a_{10} = ar^9 = 6(2)^9 = 3072.$

பயிற்சி-6.5

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட பெருக்குத்தொடரின் பொதுவிகிதம் 'r', nவது உறுப்பு காண்க.

   (i) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$......... (ii) $2, -6, 18, -54$

   (iii) $-1, -3, -9, -27$.... (iv) $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}$.........

2. $5, 25, 125,$ .....என்ற பெருக்குத்தொடரின் 10வது மற்றும் nவது உறுப்பு காண்க.

3. கீழே கொடுக்கப்பட்ட பெருக்குத்தொடரில் கேட்கப்பட்ட உறுப்பைக் கண்டுபிடி.

   (i) $a_1 = 9; \; r = \frac{1}{3}; \; a_7$ காண்க (ii) $a_1 = -12; \; r = \frac{1}{3}; \; a_6$ காண்க

4. (i) $2, 8, 32,$ ..... என்ற பெருக்குத்தொடரில் 512 எத்தனையாவது உறுப்பு?

   (ii) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$ ...... பெருக்குத்தொடரில் 729 எத்தனையாவது உறுப்பு?

   (iii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$..... பெருக்குத்தொடரில் $\frac{1}{2187}$ எத்தனையாவது உறுப்பு?

5. ஒரு பெருக்குத்தொடரின் 8வது உறுப்பு 192, பொதுவிகிதம் 2 எனில் 12வது உறுப்பை காண்க.

6. ஒரு பெருக்குத்தொடரின் 4வது உறுப்பு $\frac{2}{3}$ மற்றும் ஏழாவது உறுப்பு $\frac{16}{81}$ எனில் பெருக்குத்தொடரைக் காண்க.

7. $162, 54, 18$ ..... . மற்றும் $\frac{2}{81}, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}\cdots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்கள் சமமான nவது உறுப்பை பெற்றுள்ளன எனில் nன் மதிப்பு காண்க.

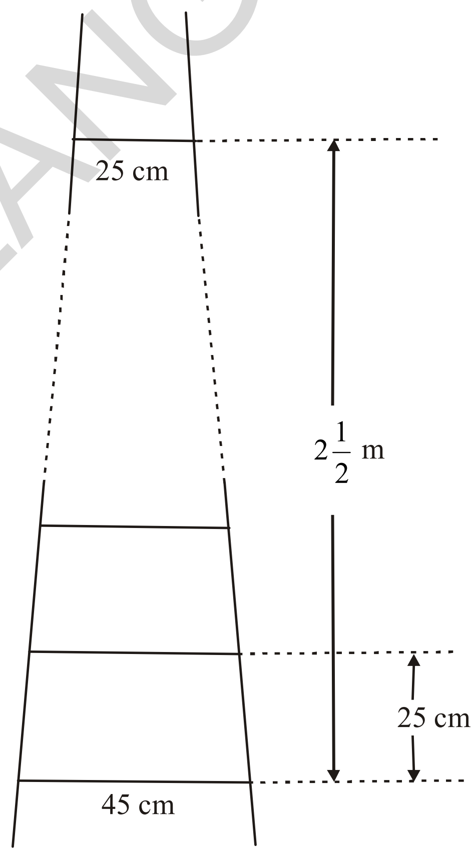
விருப்பப் பயிற்சி (தேர்வுக்குரிய வினாக்கள் அல்ல)

1. $121, 117, 113, \ldots,$ என்ற கூட்டுத்தொடரில் முதல் குறை உறுப்பு எது?
[**குறிப்பு :** $a_n < 0$இருக்குமாறு nன் மதிப்பு காண்க]

2. ஒரு கூட்டுத்தொடரின் 3வது மற்றும் ஏழாவது உறுப்புகளின் மொத்தம் 6. மேலும் பெருக்கல் பலன் 8. முதல் பதினாறு உறுப்புகளின் மொத்தம் காண்க.

3. ஒரு ஏணியின் படிகள் 25செ.மீ இடைவெளியில் அமைந்துள்ளன. படிகளின் நீளம் கீழிருந்து மேலாக அடியில் 45செ.மீ. லிருந்து மேலே 25செ.மீ. வரை ஓரே சீராக குறைகிறது. கீழ்படிக்கும் மேல்படிக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் $2\frac{1}{2}$ மீ எனில் ஏணிப்படிகள் அமைக்கத் தேவையான கட்டையின் நீளம் என்ன?

[**குறிப்பு :** படிகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{250}{25}+1$]

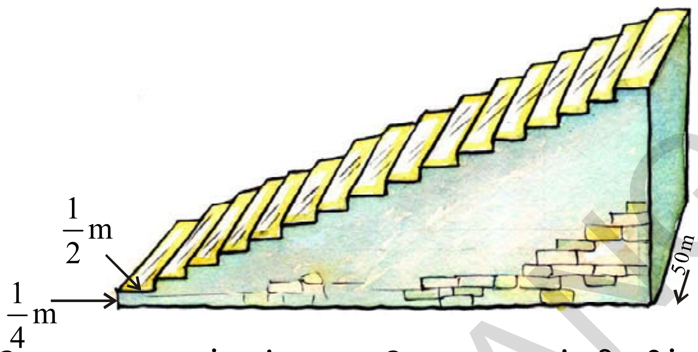


4. ஒரு வரிசையில் உள்ள வீடுகளுக்கு வரிசையாக 1லிருந்து 49வரை கொடுக்கப்பட்டது. ஏதேனும் ஒரு வீட்டிற்கு கொடுக்கப்பட்ட எண் x எனக்கொண்டால், இந்த வீட்டிற்கு முன் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கையின் மொத்தம், அதன் பின் உள்ள வீடுகளின் எண்ணிக்கையின் மொத்தத்திற்கு சமமாக உள்ளவாறு அந்த வீட்டு எண் x உள்ளது என்று காட்டு. மேலும் xன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி. [**குறிப்பு :** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. படத்தில் காட்டியவாறு ஒரு கால்பந்து மைதானத்தில் 15 படிகள் உள்ள ஒரு மேடை உள்ளது. இதன் ஒவ்வொரு படியின் நீளம் 50மீ., அகலம் $\frac{1}{2}$ மீ முதல் படி

பூமியில் இருந்து $\frac{1}{4}$ மீ உயரத்திலும் ஒவ்வொரு படியும் அதற்கு முன் உள்ள படிக்கு $\frac{1}{4}$ மீ உயரத்திலும் இருக்கிறது. அந்த மேடையை கட்டுவதற்கு தேவைப்படும் கான்கிரீட்டின் மொத்த கனஅளவு காண்க.

[**குறிப்பு :** முதல்படி கட்டுவதற்குத் தேவையான கான்கிரீட்டின் கனஅளவு $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50$ மீ^{3}]



6. ஒரு வேலையை முடிப்பதற்கு 150 வேலையாட்கள் நியமிக்கப்பட்டார்கள். ஆனால் இரண்டாவது நாள் அவர்களில் 4பேர் வேலைக்கு வராமல் நின்றுவிட்டார்கள். மூன்றாம் நாள் மேலும் 4பேர் நின்றுவிட்டார்கள். ஒவ்வொரு நாளும் இவ்வாறே நடந்ததால் அந்த வேலையை முடிக்க நினைத்த நாட்களைவிட 8 நாட்கள் அதிகமாகும் போல் உள்ளது. அந்த வேலை எத்தனை நாட்களில் முடிந்தது?

[வேலையை முடிக்க ஆகும் காலம் 'x' என்க.

$$150x = \frac{x+8}{2}[2 \times 150 + (x+8-1)(-4)]$$

[விடை : $x = 17 \Rightarrow x + 8 = 17 + 8 = 25$]

7. ஒரு இயந்திரத்தின் விலை ₹ 5,00,000. முதல் ஆண்டில் அதன் விலையில் 15% குறைந்தது. இரண்டாவது ஆண்டில் $13\frac{1}{2}\%$ ம் மூன்றாம் ஆண்டு 12%ம் இவ்விதமாக தொடர்கிறது. 10ஆண்டுகளுக்கு பிறகு அதன் விலை என்ன? கொடுக்கப்பட்ட சதவீதங்கள் அனைத்தும் ஆரம்பவிலையிலேயே கணக்கிடப்படுகிறது.

[மொத்த குறைப்பு $= 15 + 13\frac{1}{2} + 12 + \ldots .10$ உறுப்புகள்.

$$S_n = \frac{10}{2}[30 - 13.5] = 82.5\%$$

$\therefore$ 10 ஆண்டுகளுக்கு பின் அதன் விலை $= 100 - 82.5 = 17.5$
அதாவது 5,00,000 ல் 17.5%

செயல்திட்டம்

- ஒரு எண் வரிசையை எழுதி, அது கூட்டுத்தொடரில் உள்ளதா?இல்லையா? என்பதை கட்டத்தாளை பயன்படுத்தி சரிபார்.
- ஒரு கூட்டுத்தொடரின் n உறுப்புகளின் மொத்தத்தை கட்டத்தாளின் உதவியுடன் கண்டறிக.

நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் நீங்கள் கீழ்கண்டவற்றை கற்றீர்கள்.

1. ஒரு எண்களின் பட்டியலில் முதல் உறுப்பை தவிர மீதமுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் அவற்றிற்கு முன் உள்ள உறுப்புடன் ஒரு நிலையான எண்ணை கூட்டுவதால் ஏற்படுகின்ற எண்களின் பட்டியலை **கூட்டுத்தொடர்** என்கிறோம். நிலையான எண் d **பொது வித்தியாசம்** என்று அழைக்கப்படுகிறது.

   கூட்டுத் தொடரின் உறுப்புகள் : $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$

2. $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots,$ மதிப்புகள் சமம் எனில் $a_1, a_2, a_3, \ldots$ என்ற எண்களின் பட்டியல் ஒரு கூட்டுத்தொடராகும். அதாவது $a_{k+1} - a_k$ என்பது kன் வெவ்வேறான மதிப்புகளுக்கு சமம் எனில் $a_1, a_2, a_3, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத்தொடராகும்.

3. முதல் உறுப்பு a, பொது வித்தியாசம் d உள்ள ஒரு கூட்டுத்தொடரின் nவது உறுப்பு (பொதுஉறுப்பு) $a_n = a + (n - 1)\, d$.

4. ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் மொத்தம் : $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

5. ஒரு கூட்டுத்தொடரின் கடைசி உறுப்பு அதாவது nவது உறுப்பு l எனில் கூட்டுத்தொடரின் எல்லா உறுப்புகளின் மொத்தம் $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$.

6. ஒரு எண்களின் பட்டியலில் முதல் உறுப்பைத் தவிர மீதமுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் அவற்றிற்கு முன் உள்ள உறுப்பை ஒரு நிலையான எண் 'r' ஆல் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் எண்களின் பட்டியல் **பெருக்குத்தொடர்** எனப்படும். இந்த நிலையான எண் 'r' **பொதுவிகிதம்** என்று அழைக்கப்படுகிறது.

   பெருக்குத்தொடரின் பொதுவடிவம் $a, ar, ar^2, ar^3 \ldots$

7. ஒரு பெருக்குத் தொடரின் முதல் உறுப்பு a, பொதுவிகிதம் r எனில் nவது உறுப்பு $a_n = ar^{n-1}$.

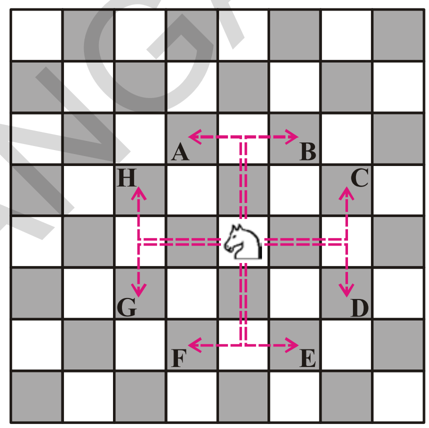
அத்தியாயம்

7 ஆயத்தொலை வடிவியல்

(COORDINATE GEOMETRY)

7.1 அறிமுகம்

உங்களுக்கு சதுரங்க விளையாட்டைப் பற்றி தெரிந்திருக்கும். இதில் குதிரை, படத்தில் காட்டியவாறு 'L' வடிவில் அதாவது இரண்டு படிகள் நேராகவும் ஒரு படி பக்கவாட்டிலும் நகரும் மேலும் இது மற்ற காய்களின் மீது தாவிச் செல்லும். இவ்வாறே மந்திரி மூலைவிட்ட வடிவில் எத்தனைப்படிகள் வேண்டுமானாலும் நகரும்.



சதுரங்கத்தில் மற்ற காய்கள் எவ்வாறு நகருமோ தெரிந்து கொள்ளுங்கள். இவ்வாறு குதிரை, மந்திரி மேலும் மற்ற காய்களை சதுரங்கப்பலகையில் குறித்துக்காட்டி அவை எவ்வாறு நகருகின்றதோ கவனியுங்கள்.

குதிரையின் இடம் ஆதிப்புள்ளி(0,0)ல் உள்ளதாக நினைத்துக்கொள்வோம். அது நகரும் நான்கு திசைகளும் படத்தில் கோடிட்டு காட்டப்பட்டுள்ளது. குதிரையின் வெவ்வேறு நகர்த்தலுக்குப்பிறகு அதன் இடத்தை உற்றுநோக்கி அச்சு தூரங்களை கண்டறியவும்.

இதை செய்

i. மேற்கண்ட படத்திலிருந்து A, B, C, D, E, F, G, H ஆகிய புள்ளிகளின் அச்சு தூரங்களை கண்டுபிடி.

ii. 8 நகர்த்துதலுக்குப் பிறகு குதிரை நகர்ந்த தூரத்தை கண்டுபிடி. அதாவது ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து (0,0) A, B, C, D, E, F, G, H புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

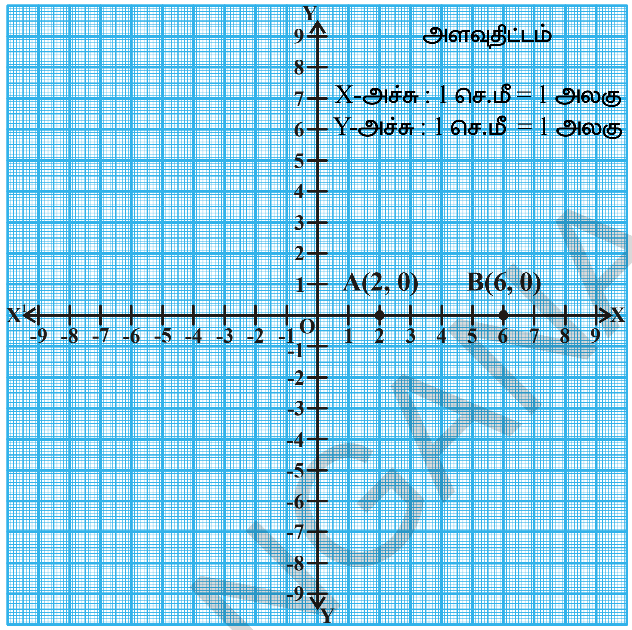
iii. புள்ளி H மேலும் புள்ளி Cக்கு இடைப்பட்ட தூரம் எவ்வளவு? அவ்வாறே A மற்றும் B க்கு இடைப்பட்ட தூரம் எவ்வளவு?

7.2 இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்

இரண்டு புள்ளிகள் A (2, 0) மேலும் B(6, 0) ஆகியவை படத்தில் காட்டியவாறு X-அச்சின் மீது அமைகிறது. A மேலும் B புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரம் 4 அலகுகள் என எளிதாக தெரிந்துகொள்ளலாம்.

ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகள் X-அச்சின் மீது அமைந்திருந்தால் Xஅச்சு தூரங்களின் வேறுபாடு அந்த புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரத்தைக் குறிக்கிறது.

A $(-2,\ 0)$ மேலும் B $(-6,\ 0)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரம் எவ்வளவு?



x-அச்சு தூரங்களுக்கு இடைப்பட்ட வித்தியாசம் $(-6) - (-2) = -4$ (குறைஎண்)

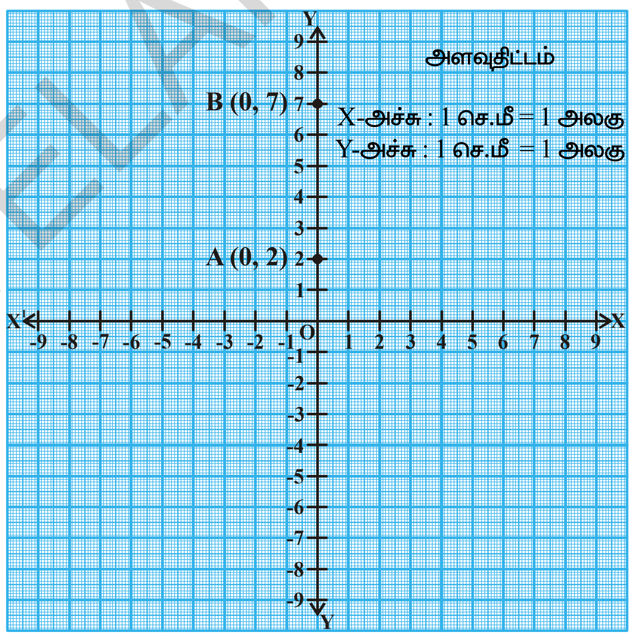
தூரத்தை குறைமதிப்பைக்கொண்டு கூறமுடியாது. எனவே நாம் தூரத்தை அதன் மெய்மதிப்பைக் கொண்டு கணக்கிடுவோம்.

எனவே துரம் =

$= |(-6) - (-2)| = |-4| = 4$ அலகுகள்.

பொதுவாக Xஅச்சின் மீதுள்ள புள்ளிகள் $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ எனில் A மேலும் Bக்கு இடைப்பட்ட தூரம் $|x_2 - x_1|$

இவ்வாறே இரண்டு புள்ளிகள் Y அச்சின் மீது இருந்தால் அந்த புள்ளிகளின் Y-அச்சு தூரங்களின் வேறுபாடு A மேலும் B புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரத்தை குறிக்கிறது. $(0,\ y_1)$ $(0,\ y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரம் $|y_2 - y_1|$ ஆகும்.



எடுத்துக்காட்டாக $A(0, 2)$ மேலும் $B(0, 7)$ ஆகிய புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

A மேலும் Bக்கு இடைப்பட்ட தூரம் $|7 - 2| = 5$ அலகுகள்

இதை செய்

1. $(-4, 0)$, $(2, 0)$, $(6, 0)$, $(-8, 0)$ ஆகிய புள்ளிகள் எங்கு அமையும்?
2. $(-4, 0)$ மேலும் $(6, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கிடைப்படட தூரம் எவ்வளவு?

முயற்சி செய்

1. $(0, -3), (0, -8), (0, 6), (0, 4)$ ஆகிய புள்ளிகள் எங்கு அமையும்?
2. $(0,-3), (0,-8)$ புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரம் எவ்வளவு? மேலும் Y-அச்சின் மீதுள்ள புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரம் $|y_2 - y_1|$ உடன் சரிபார்.

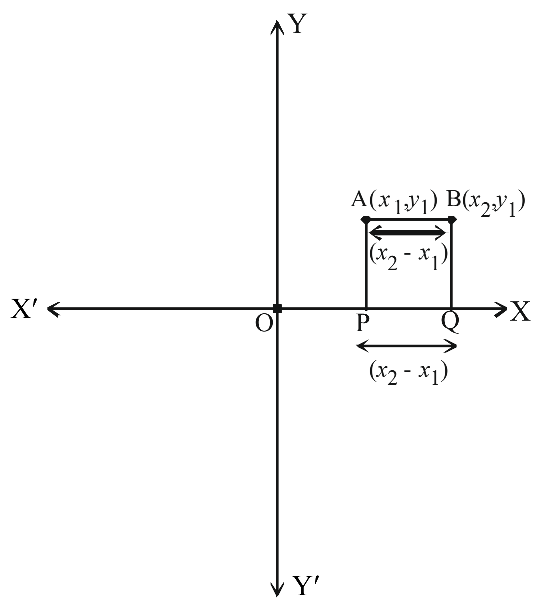
சிந்தித்து கலந்துரையாடு

இரண்டு புள்ளிகளிலுள்ள x அல்லது y அச்சு தூரங்கள் ஒரே மாதிரியாகவும் ஆனால் பூச்சியம் இல்லாமலும் இருந்தால் அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது?

7.3 ஆயத்தொலை அச்சுகளுக்கு இணையாக உள்ள கோட்டின் மீதுள்ள இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்.

$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_1)$ ஆகிய புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு y-அச்சு தூரங்கள் சமம். எனவே இந்த புள்ளிகள் X-அச்சிற்கு இணையாக உள்ள கோட்டின் மீது இருக்கும்.

AP மேலும் BQ கள் X-அச்சிற்கு செங்குத்தாக வரையப்பட்டுள்ள படத்தை உற்றுநோக்குங்கள். A மேலும் Bக்கு இடைப்பட்ட தூரம் P மேலும் Qக்கு இடைப்பட்ட தூரத்திற்கு சமமாகும்.



எனவே ABன் தூரம் = PQ ன் தூரம் $= |x_2 - x_1|$ (அதாவது x அச்சு தூரங்களின் வேறுபாடு)

இவ்வாறே இரண்டு புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$ மேலும் $B(x_1, y_2)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோடு Y-அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும். இப்போது இந்த புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் $|y_2 - y_1|$ (அதாவது y அச்சு தூரங்களின் வித்தியாசம்)

எடுத்துக்காட்டு-1. A (4,0) மேலும் B (8, 0) புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரம் எவ்வளவு?

தீர்வு : x அச்சு தூரங்களின் வித்தியாசம் $|x_2 - x_1| = |8 - 4| = 4$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு-2. A மேலும் B ஆகிய புள்ளிகள் (8, 3), (−4, 3) எனில் A மேலும் Bக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை கண்டுபிடி.

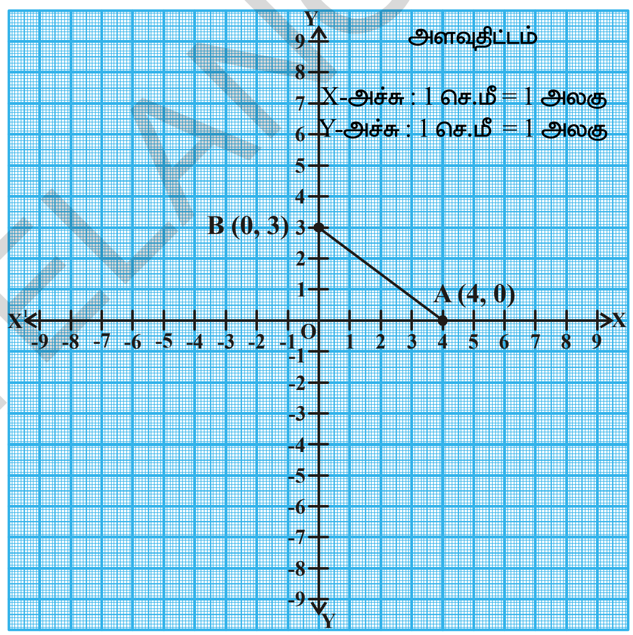
தீர்வு : இங்கு x_1 மேலும் x_2 ஆகியவை இரண்டு வெவ்வேறு காற்பகுதியில் உள்ளன மேலும் yஅச்சு தூரங்கள் சமம்.

அதாவது $AB = |x_2 - x_1| = |-4 - 8| = |-12| = 12$ அலகுகள்.

இதை செய்

பின்வரும் புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக்காண்க i. (3, 8), (6, 8)
ii. (−4,−3), (−8,−3) iii. (3, 4), (3, 8) iv. (−5, −8), (−5, −12)

A மேலும் B புள்ளிகள் (4, 0) மேலும் (0, 3) 'O' என்பது ஆதிப்புள்ளி என்க. படத்தில் ΔAOB என்பது செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.



படத்திலிருந்து OA = 4 அலகுகள் (x-ஆயத்தொலைவு)

OB = 3 அலகுகள் (y-ஆயத்தொலைவு)

எனில் ABன் தூரம் = ?

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$AB^2 = 4^2 + 3^2$$

$AB = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\,\text{units} \Rightarrow$ A மேலும் Bக்கு இடைப்பட்ட தூரம் ஆகும்.

இதை செய்

பின்வரும் புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக்காண்க (i) A = (2, 0) மேலும் B(0, 4) (ii) P(0, 5) மேலும் Q(12, 0)

முயற்சி செய்

ஆதிப்புள்ளி 'O' மேலும் 'A' (7, 4) புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக் காண்க.

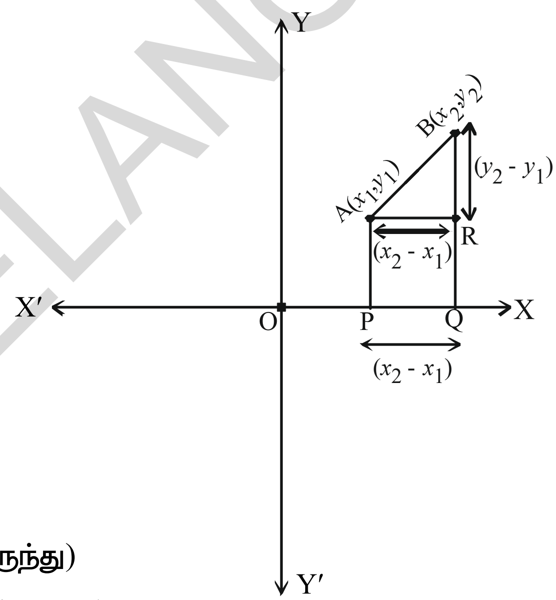
சிந்தித்து கலந்துரையாடு

1. ஆதிப்புள்ளி O (0,0)க்கும் புள்ளி P(x, y) க்கும் இடைப்பட்ட தூரம் $\sqrt{x^2+y^2}$. என ராமு கூறினான். நீ இதை ஏற்றுக்கொள்வாயா? இல்லையா? காரணம் கூறு.
2. ராமு தூரத்தை காணும் சூத்திரம் $AB = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ என எழுதினான் (ஏன்?)

7.4 x-y தளத்தில் ஒரு கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்

$A(x_1, y_1)$ மேலும் $B(x_2, y_2)$ ஆகியவை தளத்திலுள்ள ஒரு கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகள் என்க.

Xஅச்சிற்கு செங்குத்தாக AP மேலும் BQ கோடுகளை வரைக. புள்ளி Aலிருந்து BQக்கு செங்குத்தாக Rல் வெட்டுமாறு செங்குத்துக்கோடு ARஐ வரைக.



இங்கு $OP = x_1$, $OQ = x_2$

எனவே $PQ = OQ - OP = x_2 - x_1$

APQR வடிவத்தை உற்றுநோக்கு. இது ஒரு செவ்வகம் ஆகும்.

எனவே $PQ = AR = x_2 - x_1$.

மேலும் $QB = y_2$, $QR = y_1$,

எனவே $BR = QB - QR = y_2 - y_1$

ΔARB (செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து)

$AB^2 = AR^2 + RB^2$ (பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி)

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

அதாவது, $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

எனவே A மேலும் B புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

இதுவே தூரத்தை காணும் சூத்திரம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு-3. A(4, 3) மேலும் B(8, 6) ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ அகிய புள்ளிகளுடன் ஒப்பிடு.

$x_1 = 4,\ x_2 = 8, y_1 = 3, y_2 = 6$

தூரத்தை காணும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தினால்

ABன் தூரம் $= d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$= \sqrt{(8-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ அலகுகள்}$$

இதை செய்

பின்வரும் ஜோடிப் புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை கண்டுபிடி.

(i) (7, 8) மேலும் (–2, 3) (ii) (–8, 6) மேலும் (2, 0)

முயற்சி செய்

A(1, –3) மேலும் B(–4, 4)க்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை இரண்டு தசம திருத்தமாக கூறு.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

விஜய் T(5, 2) மேலும் R(–4, –1)க்கு இடைப்பட்ட தூரம் 10க்கு அருகில் 9.5 அலகுகள் என கணக்கிட்டான்.

இப்போது நீங்கள் P (4, 1) மேலும் Q (-5, -2)க்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை கண்டுபிடியுங்கள். உங்களுக்கும், விஜய்க்கும் கிடைத்த விடை ஒரே மாதிரியாக உள்ளதா? ஏன்?

இப்பொழுது சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-4. A (4, 2), B (7, 5), C (9, 7) ஆகிய மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டின் மீது அமைந்துள்ளது எனக்காட்டு.

தீர்வு : இப்பொழுது, நாம் AB, BC, AC ன் தூரங்களை காணவேண்டும்.

தூரத்தை காணும் சூத்திரத்தின் படி $= d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

எனவே, $d = AB = \sqrt{(7-4)^2+(5-2)^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$= \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$ அலகுகள்

$BC = \sqrt{(9-7)^2+(7-5)^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ அலகுகள்

$AC = \sqrt{(9-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

$= \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$ அலகுகள்.

இப்பொழுது $AB+BC = 3\sqrt{2}+2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$. எனவே $(4, 2), (7, 5)$ மேலும் $(9, 7)$ ஆகிய மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டின் மீது அமைந்துள்ளன. (ஒரே கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளிகள் ஒரு கோட்டுப்புள்ளிகள் எனப்படும்.)

எடுத்துக்காட்டு-5. $(3, 2), (-2, -3)$ மேலும் $(2, 3)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு முக்கோணத்தை ஏற்படுத்துமா?

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $P(3, 2)$, $Q(-2, -3)$, $R(2, 3)$ ஆகியவற்றிற்கு சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி PQ, QR, PR ன் தூரங்களை காணலாம்.

$PQ = \sqrt{(-2-3)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 7.07$ அலகுகள் (தோராயமாக)

$QR = \sqrt{(2-(-2))^2+(3-(-3))^2} = \sqrt{(4)^2+(6)^2} = \sqrt{52} = 7.21$ அலகுகள் (தோராயமாக)

$PR = \sqrt{(2-3)^2+(3-2)^2} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} = 1.41$ அலகுகள் (தோராயமாக)

இங்கு ஏதேனும் இரண்டு தூரங்களின் கூடுதல் மூன்றாவது தூரத்தைவிட அதிகம். எனவே P, Q, R புள்ளிகள் முக்கோணத்தை ஏற்படுத்தும் மேலும் முக்கோணத்தின் எந்த பக்கமும் சமமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு-6. $(1, 7), (4, 2), (-1, -1), (-4, 4)$ ஆகிய புள்ளிகள் சதுரத்தின் முனைகள் எனக்காட்டு.

தீர்வு : $A(1, 7)$, $B(4, 2)$, $C(-1, -1)$, $D(-4, 4)$ ஆகியவை கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் என்க.

இப்பொழுது $ABCD$ ஒரு சதுரம் எனக்காட்ட இதன் எல்லா பக்கங்களின் நீளங்கள் மேலும் மூலைவிட்டங்களின் நீளங்கள் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

எனவே பக்கங்களின் நீளங்கள் $AB = d = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ அலகுகள்

$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ அலகுகள்

$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ அலகுகள்

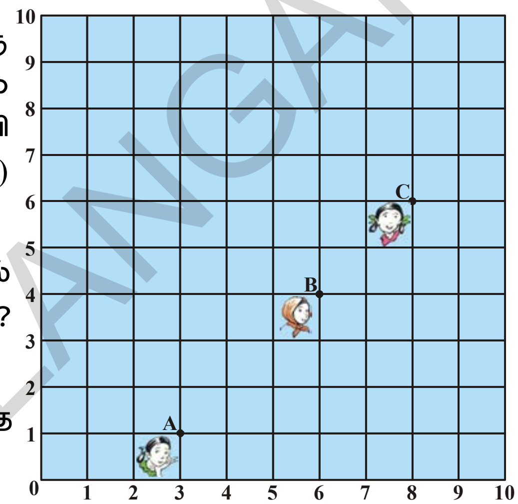
$$DA = \sqrt{(-4-1)^2+(4-7)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \text{ அலகுகள்}$$

மேலும் மூலைவிட்டங்கள் $AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$ அலகுகள்

$$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} \text{ அலகுகள்}$$

$AB = BC = CD = DA$ மேலும் $AC = BD$. எனவே நாற்கரம் ABCDல் நான்கு பக்கங்கள் சமம் மேலும் மூலைவிட்டங்கள் AC, BD சமம். எனவே ABCD ஒரு சதுரம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு-7. பக்கத்திலுள்ள படம் ஒரு வகுப்பறையில் நாற்காலிகள் அமைக்கப்பட்டிருக்கும் விதத்தை காட்டுகிறது. மாதுரி, மீனா, பல்லவி ஆகியோர் முறையே A(3, 1), B(6, 4), C(8, 6) இடங்களில் அமர்ந்துள்ளனர்.



இவர்கள் மூவரும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமர்ந்துள்ளனர் என நினைக்கிறீர்களா? உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.

தீர்வு : தூரத்தை காணும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தினால் நாம் பெறுவது

$$AB=\sqrt{(6-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ அலகுகள்}$$

$$BC=\sqrt{(8-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ அலகுகள்}$$

$$AC=\sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ அலகுகள்}$$

இதிலிருந்து $AB+BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$, எனவே A, B, C புள்ளிகளை ஒரு கோட்டுப்புள்ளிகள் என கூறலாம். எனவே மூவரும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமர்ந்துள்ளனர்.

எடுத்துக்காட்டு-8. (x, y) எனும் புள்ளி (7, 1) மேலும் (3, 5) எனும் புள்ளிகளுக்கு சமமான தூரத்தில் உள்ளது எனில் x, yக்கு இடையே உள்ள உறவை காண்க.

தீர்வு : $P(x, y)$ எனும் புள்ளி A(7, 1) மேலும் B(3, 5) எனும் புள்ளியிலிருந்து சமமான தூரத்தில் உள்ளது.

இதிலிருந்து $AP = BP$. எனவே $AP^2 = BP^2$

அதாவது $(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

$(x^2 - 14x + 49) + (y^2 - 2y + 1) = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25)$

$(x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50) - (x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34) = 0$

$-8x + 8y = -16$

அதாவது $x - y = 2$ இதுவே தேவையான உறவு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு-9. A(6, 5) மேலும் B(– 4, 3) புள்ளிகளுக்கு சமதூரத்திலும், Yஅச்சின் மீதும் அமைந்துள்ள புள்ளியை கண்டுபிடி.

தீர்வு : Y-அச்சின் மீதுள்ள புள்ளியின் வடிவம் $(0, y)$ என நமக்குத் தெரியும். எனவே A மேலும் B புள்ளிகளுக்கு சமமான தூரத்தில் உள்ள புள்ளி $P(0, y)$ என்க.

$$PA = \sqrt{(6-0)^2 + (5-y)^2}$$

$$PB = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-y)^2}$$

$$PA^2 = PB^2$$

எனவே, $(6 - 0)^2 + (5 - y)^2 = (-4 - 0)^2 + (3 - y)^2$

அதாவது $36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

$4y = 36$

$y = 9$

எனவே தேவையான புள்ளி $(0, 9)$ ஆகும்.

நமக்கு கிடைத்த தீர்வினை சரிபார்ப்போம்: $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

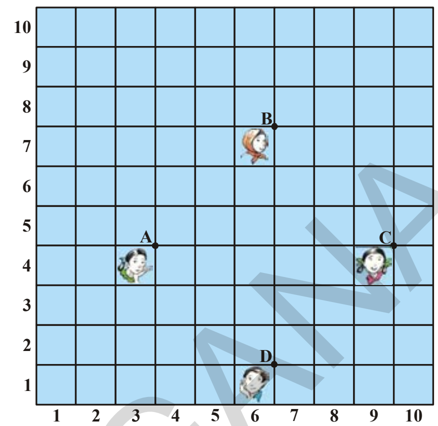
எனவே $(0, 9)$ என்ற புள்ளி $(6, 5)$ மேலும் $(4, 3)$ எனும் புள்ளிகளுக்கு சமமான தூரத்தில் உள்ளது.

பயிற்சி 7.1

1. பின்வரும் ஜோடி புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக் காண்க.
   (i) $(2, 3)$ மேலும் $(4, 1)$ (ii) $(-5, 7)$ மேலும் $(-1, 3)$
   (iii) $(-2, -3)$ மேலும் $(3, 2)$ (iv) (a, b) மேலும் $(-a, -b)$
2. $(0, 0)$ மேலும் $(36, 15)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை காண்க.
3. $(1, 5), (2, 3)$ மேலும் $(-2, -1)$ ஆகியவை ஒரு கோட்டுப்புள்ளிகளா? இல்லையா? என சரிபார்.

4. $(5, -2)$, $(6, 4)$ மேலும் $(7, -2)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் முனைகள் ஆகுமா? சரிபார்.

5. அருகிலுள்ள படத்தில் காட்டியவாறு ஒரு வகுப்பிலுள்ள 4 நண்பர்கள் A, B, C, D புள்ளிகளில் அமர்ந்துள்ளனர். ஜரினா, பழனி இருவரும் வகுப்பறைக்குள் சென்று சில நிமிடங்கள் உற்றுநோக்கியபிறகு ஜரினா பழனியைப் பார்த்து ABCD ஒரு சதுரம் என நினைக்கிறாயா? எனக் கேட்டாள். இதற்கு பழனி மறுப்பு தெரிவித்தான்.



தூரத்தை காணும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி யாருடையது சரியான விடை என்று பார். ஏன்?

6. $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $C(0, a\sqrt{3})$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டு.

7. $(-7, -3)$, $(5, 10)$, $(15, 8)$ மேலும் $(3, -5)$ ஆகிய புள்ளிகள் வரிசையாக ஓர் இணைகரத்தின் முனைகள் என நிரூபி.

8. $(-4, -7)$, $(-1, 2)$, $(8, 5)$, $(5, -4)$ ஆகியவற்றை வரிசையாக எடுத்துக்கொண்டால் இது ஒரு சாய்சதுரத்தின் முனைகள் எனில் பரப்பளவை கண்டுபிடி.

(குறிப்பு : சாய்சதுரத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ மூலைவிட்டங்களின் பெருக்கற்பலன்)

9. பின்வரும் புள்ளிகளால் ஏற்படும் நாற்கரத்தின் வகையைக்கூறு. மேலும் உன் விடைக்கான காரணத்தை கூறு.

(i) $(-1, -2)$, $(1, 0)$, $(-1, 2)$, $(-3, 0)$ (ii) $(-3, 5)$, $(1, 10)$, $(3, 1)$, $(-1, -4)$

(iii) $(4, 5)$, $(7, 6)$, $(4, 3)$, $(1, 2)$

10. $(2, -5)$ மேலும் $(-2, 9)$ லிருந்து சமமான தூரத்திலும் Xஅச்சின் மீதும் உள்ள புள்ளியை கண்டுபிடி.

11. $(x, 7)$ மேலும் $(1, 15)$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரம் 10 எனில் xன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

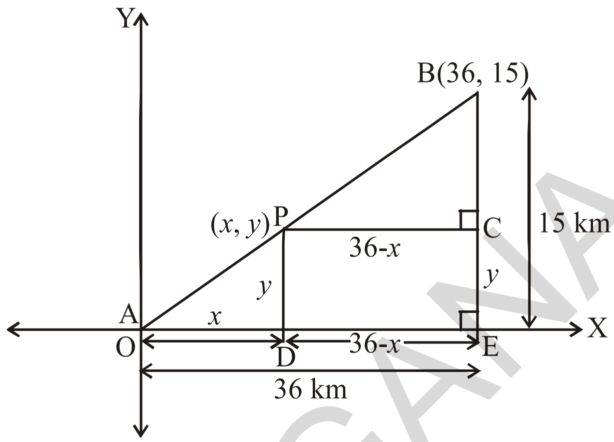
12. $P(2, -3)$ மேலும் $Q(10, y)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரம் 10 அலகுகள் எனில் Yன் மதிப்பை காண்க.

13. $(-5, 6)$ புள்ளி வழியே செல்லும் வட்டத்தின் மையம் $(3,2)$ எனில் வட்டத்தின் ஆரத்தை கண்டுபிடி.

14. $(1, 5)$, $(5, 8)$, $(13, 14)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தை வரைய முடியுமா? காரணம் கூறு.

15. (x, y) எனும் புள்ளி $(-2, 8)$ மேலும் $(-3, -5)$ எனும் புள்ளிகளுக்கு சமமான தூரத்தில் உள்ளது எனில் x, yக்கு இடையேயுள்ள உறவை கண்டுபிடி.

7.5 பிரிவுச்சூத்திரம்



ஒரு தொலைபேசி குழுமம் A மற்றும் Bக்கு இடையில் Pஎனும் இடத்தில் ஒரு அலைபரப்பு கோபுரத்தை (tower) அமைக்க நினைத்தார்கள். அலைபரப்பு கோபுரத்திலிருந்து Aக்கு உள்ள தூரத்தைப்போல இரண்டு மடங்கு தூரம் Bக்கு உள்ளவாறு அமைக்க நினைத்தார்கள். P என்ற இடம் ABன் மீது இருந்தால் இது ABஐ 1:2 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் (படத்தில் காட்டியவாறு) Aஐ ஆதிப்புள்ளி O ல் உள்ளது எனக்கொள். மேலும் ஆயஅச்சுகளின் மீது 1கி.மீ தூரத்தை 1அலகாகவும் எடுத்துக்கொள்வோம் Bன் ஆயத்தொலைவுகள் B (36, 15)ஆகும். இப்போது நாம் அலைபரப்பு கோபுரத்தின் நிலையை கண்டறிய வேண்டும். அதாவது நாம் Pன் ஆயத்தொலைவுகளை கண்டறிய வேண்டும். Pன் ஆயத்தொலைவுகளை எவ்வாறு கண்டறிவது?

P ன் ஆயத்தொலைவுகள் (x, y)எனக் கொள்வோம். P மேலும் Bலிருந்து x-அச்சுக்கு செங்குத்துக்கோடுகள் வரைந்தால் அது xஅச்சை D மேலும் E புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. BEக்கு செங்குத்து PC வரைக. அப்போது கோ.கோ வடிவொத்த கிளை தேற்றத்தின்படி ΔPOD மேலும் ΔBPC வடிவொத்தவை.

எனவே, $\dfrac{OD}{PC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$ மேலும் $\dfrac{PD}{BC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{x}{36-x} = \frac{1}{2} \qquad \frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}.$$

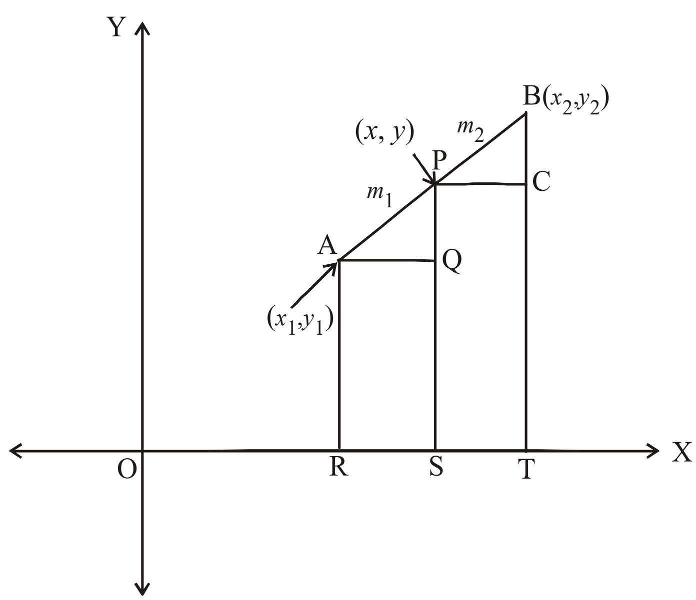
$$2x = (36 - x) \qquad 2y = 15 - y$$

$3x = 36$ $\quad 3y = 15$

$x = 12$ $\quad y = 5$

இந்த சமன்பாடுகள் மூலம் $x = 12$ மேலும் $y = 5$ என கிடைக்கிறது.

P(12, 5) ஆனது OP : PB = 1 : 2. எனும் நிபந்தனையை நிறைவு செய்வதை நீங்கள் சரிபார்க்கலாம்.



$A(x_1, y_1)$ மேலும் $B(x_2, y_2)$ ஆகியவை இரண்டு புள்ளிகள் எனக் கருதுவோம். $P (x, y)$ எனும் புள்ளி ABஐ உட்புறமாக $m_1 : m_2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம்.

அதாவது, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m_1}{m_2}$ ..... (1)

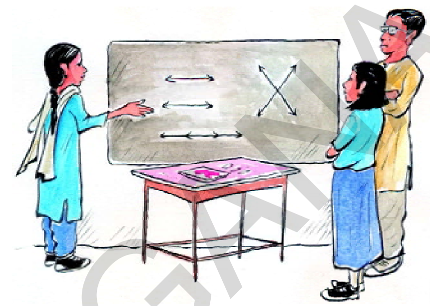
(படத்தைப்பார்).

AR, PS மேலும் BT ஆகியவற்றை x-அச்சுக்கு செங்குத்தாக வரைக.

AQ மற்றும் PC ஆகியவற்றை X-அச்சுக்கு இணையாக இருக்குமாறு வரையவும். இப்பொழுது கோணம் கோணம் கிளை தேற்றத்தின்படி

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

ஆகையால், $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{PC} = \dfrac{PQ}{BC}$ .....(2)



இப்பொழுது, $AQ = RS = OS - OR = x - x_1$

$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$

$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$

$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$

மதிப்புகளை சமன்பாடு (2)ல் பிரதியிட்டால் நாம் பெறுவது

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \quad \left[\because \frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2} \text{ from(1)}\right]$$

$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$, என எடுத்துக்கொண்டால் $x = \dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

இதைப்போலவே $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$, என எடுத்துக்கொண்டால் $y = \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

எனவே $A(x_1, y_1)$ மேலும் $B(x_2, y_2)$ ஆகியவற்றால் ஏற்படும் கோட்டுத்துண்டை உட்புறமாக $m_1:m_2$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P(x, y)$ன் அச்சு தூரங்கள்

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) \quad .....(3)$$

இது பிரிவுச்சூத்திரம் எனப்படும்.

A, P, Bகளிலிருந்து Yஅச்சுக்கு செங்குத்து கோடுகள் வரைந்து மேற்காணும் விகிதமுறைகள் மூலம் சமன்பாடு (3) போன்ற பிரிவுச் சூத்திரத்தை நாம் பெறமுடியும்.

AB எனும் கோட்டை Pஎனும் புள்ளி *k:1* எனும் விகிதத்தில் பிரித்தால் Pன் ஆயத்தொலைவுகள் முறையே

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k + 1}, \frac{ky_2 + y_1}{k + 1}\right).$$

சிறப்பானவகை : ஒரு கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளி என்பது அந்த கோட்டுத்துண்டை 1:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும். எனவே $A(x_1, y_1)$ மேலும் $B(x_2, y_2)$ இவற்றை இணைப்பதால் ஏற்படும் மையப்புள்ளி P ன் ஆயத்தொலைவுகள்

$$\left(\frac{1.x_1+1.x_2}{1+1}, \frac{1.y_1+1.y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

இப்பொழுது பிரிவு சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி சில எடுத்துக்காட்டுகளை தீர்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-10. $(4, -3)$ மேலும் $(8, 5)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை 3:1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சு தூரங்களை கண்டுபிடி.

தீர்வு : தேவையான புள்ளியின் அச்சுதூரம் $P(x, y)$ என்க. பிரிவு சூத்திரத்தின் படி

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right),$$

$$x = \frac{3(8)+1(4)}{3+1} = \frac{24+4}{4} = \frac{28}{4} = 7,$$

$$y = \frac{3(5)+1(-3)}{3+1} = \frac{15-3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

தேவையான புள்ளி $P(x, y) = (7, 3)$

எடுத்துக்காட்டு-11. $(3, 0)$ மேலும் $(-1, 4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளியை காண்க.

தீர்வு : (x_1, y_1), (x_2, y_2) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளி $M(x, y)$ என்க.

$$M(x, y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$\therefore$ $(3, 0)$ மேலும் $(-1, 4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளி

$$M(x, y) = \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = (1, 2).$$

இதை செய்

1. (3, 5) மேலும் (8, 10) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை 2:3 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கும் புள்ளியை காண்க.
2. (2, 7) மேலும் (12, −7) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளியை கண்டுபிடி.

7.6 ஒரு கோட்டை முச்சமக்கூறிடும் புள்ளிகள்

எடுத்துக்காட்டு-12. A(2,–2) மேலும் B(–7, 4) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமபாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளியை காண்க. (ஒரு கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமபாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகளை முச்சமக்கூறிடும் புள்ளிகள் எனப்படும்)

தீர்வு : AB கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமபாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகள் P,Q என்க. அதாவது AP=PQ=QB (படத்தில் காட்டியவாறு).

ஆகவே P என்ற புள்ளி ABஐ 1:2 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கிறது.

பிரிவு சூத்திரத்தின் படி P ன் அச்சுதூரங்கள்

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right)$$

$$\text{i.e., } \left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3}\right) = \left(\frac{-3}{3}, \frac{0}{3}\right) = (-1, 0)$$

இப்பொழுது Q என்ற புள்ளியும் AB ஐ 1:2 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கிறது. எனவே Qன் அச்சுதூரங்கள்

$$= \left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right)$$

$$\left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right) = \left(\frac{-12}{3}, \frac{6}{3}\right) = (-4, 2)$$

எனவே, AB கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் அச்சுதூரங்கள் P(-1, 0) மேலும் Q(-4, 2) ஆகும்.

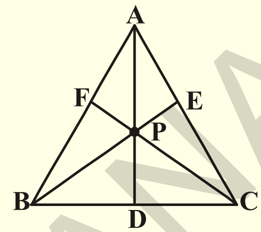
இதை செய்

1. (2, 6) மேலும் (–4, 8) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமபாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

2. (–3, –5) மேலும் (–6, –8) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமபாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

முயற்சி செய்

$A(4, 2)$, $B(6, 5)$, $C(1, 4)$ ஆகியவை ΔABCன் உச்சிகள் என்க.

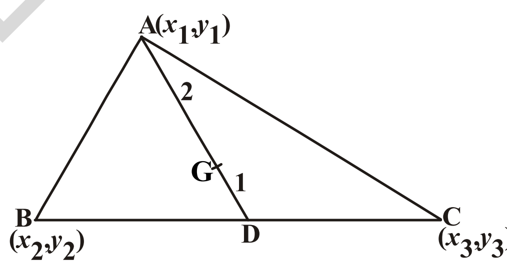


1. A லிருந்து BCக்கு வரையப்பட்ட மையக்கோடு Dல் சந்திக்கிறது எனில் Dன் அச்சுதூரங்களை கண்டுபிடி.
2. $AP : PD = 2 : 1$ என இருக்குமாறு ADன் மீது P புள்ளியின் அச்சு தூரங்களை கண்டுபிடி.
3. BE கோட்டுத்துண்டை 2:1 விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியையும், CF கோட்டுத்துண்டை 2:1 விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியையும் கண்டுபிடி.
4. நீங்கள் உற்றுநோக்கியது என்ன?

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு மையக்கோடும் 2:1 விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியை அந்த முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச்சந்தி ஆகும்.

7.6 முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச்சந்தி

ஒரு முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச்சந்தி என்பது மையக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி ஆகும்.



$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ஆகியவை ΔABCன் முனைப்புள்ளிகள் என்க. AD எனும் மையக்கோடு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தை சமமாக பிரிக்கிறது என்க.

$$D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

ADன் மீது 2:1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கும் புள்ளி G என்பது மையக்கோட்டுச்சந்தி ஆகும். (x, y) என்பன Gன் ஆயத்தொலைவுகள் எனில்

$$G(x, y) = \left[\frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1(x_1)}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1(y_1)}{2+1}\right]$$

$$= \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right]$$

எனவே, மையக்கோட்டுச்சந்தியின் ஆயத்தொலைவுகள்

$$\left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right].$$

எடுத்துக்காட்டு-13. $(3, -5), (-7, 4), (10, -2)$ ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக்கொண்ட முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச்சந்தியை காண்க.

தீர்வு : மையக்கோட்டுச்சந்தியின் ஆயத்தொலைவுகள்

$$= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$$\left(\frac{3+(-7)+10}{3}, \frac{(-5)+4+(-2)}{3}\right) = (2, -1)$$

$\therefore$ நடுக்கோட்டு மையம் $(2, -1)$.

இதை செய்

$(-4, 6), (2, -2), (2, 5)$ ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச்சந்தியை கண்டுபிடி.

முயற்சி செய்

$(2, 3), (x, y), (3, -2)$ ஆகியவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச்சந்தி ஆதிப்புள்ளி எனில் (x, y)ஐ கண்டுபிடி.

எடுத்துக்காட்டு-14. $A(-6, 10)$ மற்றும் $B(3, -8)$ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டினை $(-4, 6)$ எனும் புள்ளி எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும்??

தீர்வு : $(-4, 6)$ என்ற புள்ளி AB ஐ $m_1 : m_2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கிறது என்க.

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1+m_2}, \frac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}\right) \qquad .....(1)$$

$(x, y) = (a, b)$ எனில் $x = a$ மேலும் $y = b$ என நமக்குத் தெரியும்.

எனவே $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1+m_2}$ மேலும் $6 = \dfrac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}$

இப்பொழுது $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

$$7m_1 = 2m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

அதாவது $m_1 : m_2 = 2 : 7$

இந்த விகிதம் yன் அச்சுதூரங்களை திருப்திபடுத்துகிறது என காட்டலாம்.

இப்பொழுது, $\dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{-8\dfrac{m_1}{m_2} + 10}{\dfrac{m_1}{m_2} + 1}$ (பகுதி மற்றும் தொகுதி இரண்டையும் m_2 ஆல் வகுத்தால்)

$$= \frac{-8 \times \dfrac{2}{7} + 10}{\dfrac{2}{7} + 1} = \frac{\dfrac{-16}{7} + 10}{\dfrac{9}{7}} = \frac{-16 + 70}{9} = \frac{54}{9} = 6$$

அதாவது A(−6, 10) மேலும் B (3, −8) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுதுண்டினை (−4, 6) எனும் புள்ளி 2:7 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

A(6, 9) மேலும் B(−6, −9) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு

(a) ஆதிப்புள்ளி $\overline{AB}$ ஐ எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும்? மேலும் $\overline{AB}$ க்கு ஆதிப்புள்ளியை என்னவென்று அழைப்பர்?

(b) P(2, 3) எனும் புள்ளி $\overline{AB}$ ஐ எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

(c) Q(−2, −3) எனும் புள்ளி $\overline{AB}$ ஐ எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

(d) P மேலும் Q ஆகியவை $\overline{AB}$ ஐ எத்தனை சமபாகங்களாக பிரிக்கும்?

(e) P, Qஐ $\overline{AB}$ க்கு என்னவென்று கூறலாம்?

எடுத்துக்காட்டு-15. $(5, -6)$, $(-1, -4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை Y அச்சு எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கிறது மேலும் வெட்டும் புள்ளியையும் கண்டுபிடி.

தீர்வு : பிரிக்கும் விகிதம் $K : 1$ என்க பிரிவுச் சூத்திரத்தின்படி $K : 1$ எனும் விகிதத்தில் ABஐ பிரிக்கும் அச்சுதூரங்கள்

$$\left(\frac{K(-1)+1(5)}{K+1}, \frac{K(-4)+1(-6)}{K+1}\right)$$

$$\left(\frac{-K+5}{K+1}, \frac{-4K-6}{K+1}\right)$$

y-அச்சின் மீதுள்ள புள்ளியின் x அச்சுதூரம் 0 என நமக்குத் தெரியும்

எனவே $\dfrac{-K+5}{K+1} = 0$

$-K + 5 = 0 \Rightarrow K = 5.$

எனவே பிரிக்கும் விகிதம் $K : 1 = 5 : 1$

$K = 5$ எனும் மதிப்பை பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சுதூரத்தில் பிரதியிட

$$= \left(\frac{-5+5}{5+1}, \frac{-4(5)-6}{5+1}\right) = \left(0, \frac{-20-6}{6}\right) = \left(0, \frac{-26}{6}\right) = \left(0, \frac{-13}{3}\right)$$

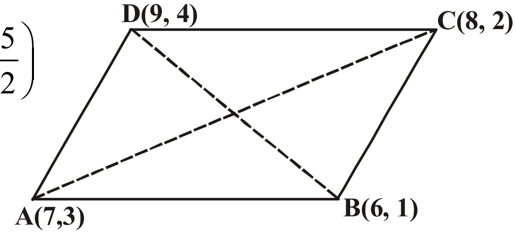
எடுத்துக்காட்டு-16. $A(7, 3), B(6, 1), C(8, 2), D(9, 4)$ ஆகியவை ஓர் இணைகரத்தின் வரிசைப்படி அமைந்த உச்சிகள் எனக்காட்டு.

தீர்வு : $A(7, 3), B(6, 1), C(8, 2), D(9, 4)$ ஆகியவை வரிசைப்படி அமைந்த ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகள் என்க.

ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று இருசமக்கூறிடும் என நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore$ AC மேலும் DB மூலைவிட்டங்களின் மையப்புள்ளிகள் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

இப்போது $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ எனும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி AC மற்றும் BDன் மையப்புள்ளிகளை கண்டறியலாம்.



AC ன் மையப்புள்ளி $= \left(\dfrac{7+8}{2}, \dfrac{3+2}{2}\right) = \left(\dfrac{15}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

DBன் மையப்புள்ளி $= \left(\dfrac{9+6}{2}, \dfrac{4+1}{2}\right) = \left(\dfrac{15}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

ACன் மையப்புள்ளி $=$ DB ன் மையப்புள்ளி.

எனவே A, B, C, D ஆகியவை இணைகரத்தின் உச்சிகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு-17. A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4), D(p, 3) ஆகியவை ஓர் இணைகரத்தின் வரிசைப்படி அமைந்த உச்சிகள் எனில் Pன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு : ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடும் என நாம் அறிவோம்.

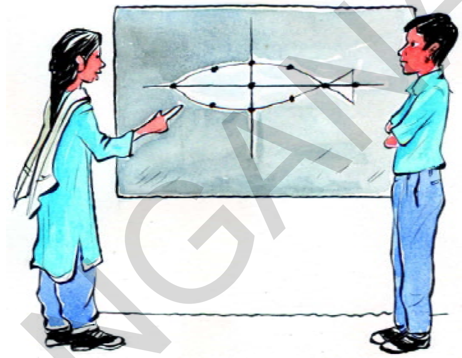
எனவே AC மையப்புள்ளியின் அச்சுதூரங்கள் = BD மையப்புள்ளியின் அச்சுதூரங்கள்

அதாவது $\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

$$15 = 8 + p \Rightarrow p = 7.$$



பயிற்சி - 7.2

1. $(-1, 7)$ மேலும் $(4, -3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை 2:3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சுதூரங்களை காண்க.
2. $(4, -1)$, $(-2, -3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமபாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகளின் அச்சுதூரங்களைக் காண்க.
3. $(-3, 10)$, $(6, -8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $(-1, 6)$ எனும் புள்ளி எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.
4. $(1, 2)$, $(4, y)$, $(x, 6)$, $(3, 5)$ ஆகியவை ஓர் இணைகரத்தின் வரிசைப்படி அமைந்த உச்சிகள் எனில் x, y ன் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.
5. ABஐ விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் மையம் $(2, -3)$ மேலும் ஒரு முனை B $(1, 4)$ எனில் A புள்ளியின் அச்சுதூரங்களை கண்டுபிடி.
6. $(-2, -2)$ மேலும் $(2, -4)$ ஆகியவை முறையே A,B புள்ளிகள். AB கோட்டுத்துண்டின் மீது $AP = \frac{3}{7} AB$ என இருக்குமாறு P புள்ளியின் அச்சுதூரங்களை கண்டுபிடி.
7. A$(-4, 0)$, B$(0, 6)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை நான்கு சமபாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சுதூரங்களை காண்க.

8. A(−2, 2), B(2, 8) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை நான்கு சமபாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகளின் அச்சுதூரங்களைக் காண்க.

9. $(a + b, a - b)$, $(a - b, a + b)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை உட்புறமாக 3:2 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சுதூரங்களைக் காண்க.

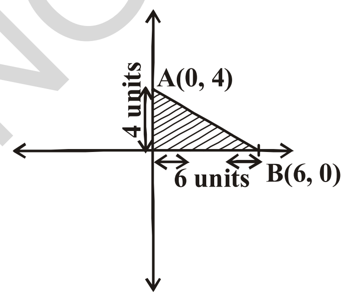
10. பின்வரும் புள்ளிகளின் மையக்கோட்டுச்சந்தியின் அச்சுதூரங்களை காண்க.

i. (-1, 3), (6, -3), (-3, 6) ii. (6, 2), (0, 0), (4, -7)

iii. (1, -1), (0, 6), (-3, 0)

7.8 முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

படத்தில் காட்டியவாறு ஒரு தளத்தில் A(0, 4), B(6, 0) ஆகிய புள்ளிகள் ஆதிப்புள்ளி O உடன் ஒரு முக்கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது எனக்கொள்வோம்.



ΔAOBன் பரப்பளவு என்ன?

ΔAOB ஒரு செங்கோண முக்கோணம். இதன் அடிப்பக்கம் 6 அலகுகள் (அதாவது x அச்சுதூரம்) மேலும் உயரம் 4 அலகுகள் (அதாவது y அச்சுதூரம்)

$\therefore$ ΔAOBன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ அடிப்பக்கம் $\times$ உயரம்

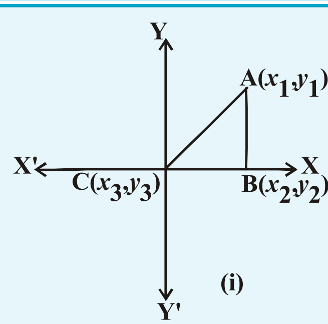
$= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$ சதுரஅலகுகள்

முயற்சி செய்

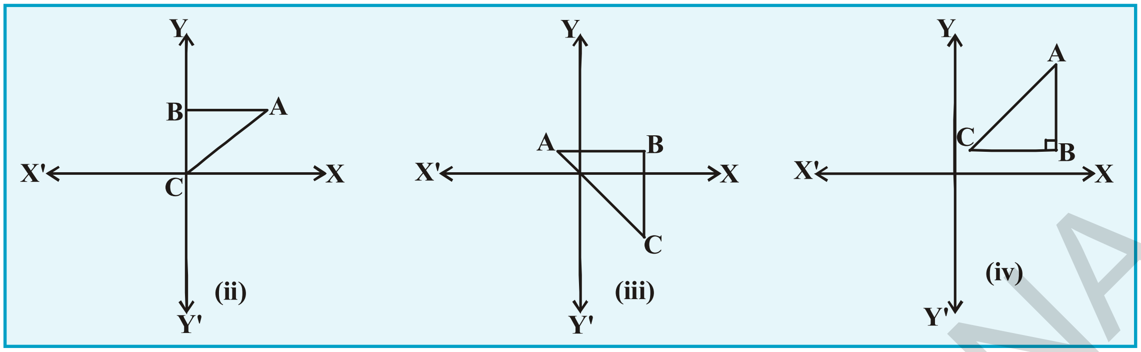
X-அச்சின் மீது ஒரு புள்ளியை Aஎனவும் Y-அச்சின் மீது ஒரு புள்ளியை B எனவும் எடுத்துக்கொண்டு முக்கோணம் AOBன் பரப்பளவை கண்டுபிடி. உன்னுடைய நண்பர்கள் என்ன செய்தார்கள் என்பதை அவர்களுடன் கலந்துரையாடு.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ என்க. தளத்திலுள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பளவை கண்டுபிடி. மேலும் இந்த முக்கோணத்தின் பரப்பளவை குழுவில் உள்ள உன் நண்பர்களுடன் கலந்துரையாடு.



(i)



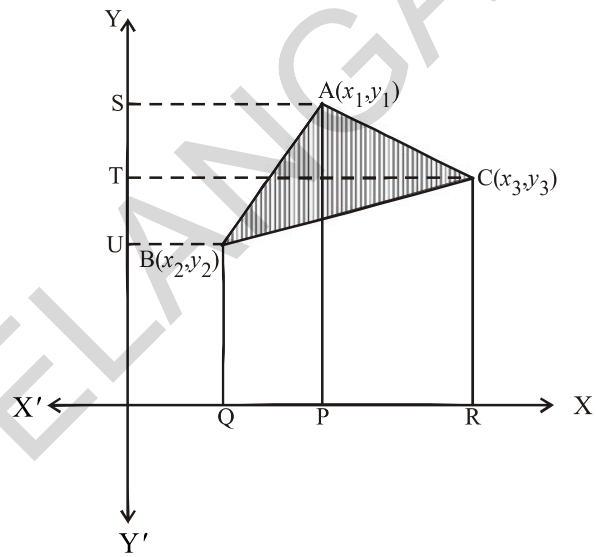
முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணம் ABC என்க.

A,B,மேலும் C லிருந்து AP, BQ , CR ஆகியவற்றை x-அச்சுக்கு செங்குத்தாக வரையவும்.

படத்தில் காட்டியவாறு ABQP, APRC மேலும் BQRC ஆகிய அனைத்தும் சரிவகம் ஆகும். இப்பொழுது படத்திலிருந்து தெளிவாகத் தெரிவது.

ΔABCன் பரப்பளவு = சரிவகம் ABQPன் பரப்பளவு + சரிவகம் APRCன் பரப்பளவு – சரிவகம் BQRCன் பரப்பளவு என்பது தெளிவாகிறது.



$\because$ சரிவகத்தின் பரப்பளவு = $\frac{1}{2}$ (இணையான பக்கங்களின் கூடுதல்) (இவற்றிற்கு இடையே உள்ள தூரம்)

$$\Delta ABC\text{ன் பரப்பளவு} = \frac{1}{2}(BQ + AP)QP + \frac{1}{2}(AP + CR)PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)QR \quad .... (1)$$

இங்கு படத்திலிருந்து

$BQ = y_2,\ AP = y_1,\ QP = OP - OQ = x_1 - x_2$

$CR = y_3,\ PR = OR - OP = x_3 - x_1$

$QR = OR - OQ = x_3 - x_2$

$\because$ ΔABCன் பரப்பளவு [(1)லிருந்து]

$$= \frac{1}{2}\left|(y_2 + y_1)\,(x_1 - x_2)\right| + \frac{1}{2}\left|(y_1 + y_3)\,(x_3 - x_1)\right| - \frac{1}{2}\left|(y_3 + y_2)\,(x_3 - x_2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\, x_1(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\,\right|$$

இதுவே, ΔABCன் பரப்பளவின் எண்மதிப்பை கண்டறியும் சூத்திரம்

$$\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

குறிப்பு: பரப்பளவு என்பது குறைஅளவாக அமையாது. ஆகவே நாம் மெய்மதிப்பை எடுத்துக்கொள்வோம்.

இப்போது சில எடுத்துக்காட்டுகளை தீர்க்க முயற்சிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-18. (1, –1), (–4, 6), (–3, –5) ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு : A(1, –1), B(–4, 6), C(–3, –5) ஆகிய முனைகளால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக்காண மேற்கண்ட சூத்திரத்தை பயன்படுத்தினால்

$$=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|1(6+5)+(-4)(-5+1)+(-3)(-1-6)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|11+16+21\right|=24$$

எனவே முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 24 சதுர அலகுகள்.

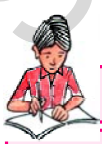
எடுத்துக்காட்டு-19. $A(5,2), B(4,7), C(7,-4)$ ஆகிய புள்ளிகளால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவை கண்டுபிடி.

தீர்வு : $A(5,2), B(4,7), C(7,-4)$ ஆகிய முனைகளால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$\frac{1}{2}\left|5(7+4)+4(-4-2)+7(2-7)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|55-24-35\right|=\left|\frac{-4}{2}\right|=\left|-2\right|$$

$\therefore$ முக்கோணத்தின் பரப்பளவு = 2சதுர அலகுகள்



இதை செய்

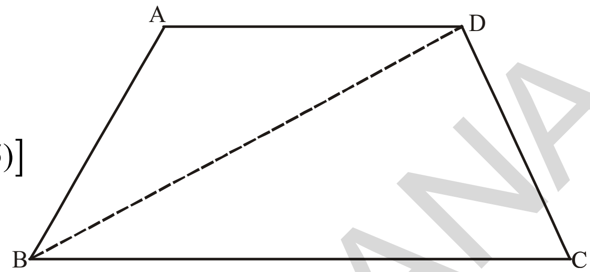
1. கீழ்கண்டவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி

   (i) (5, 2) (3, –5), (–5, –1)

   (ii) (6, –6), (3, –7), (3, 3)

எடுத்துக்காட்டு-20. A(−5, 7), B(−4,−5), C(−1, −6), D(4,5) ஆகியவை ஒரு நாற்கரத்தின் முனைகள் எனில் நாற்கரம் ABCD ன் பரப்பளவை காண்க.

தீர்வு : B லிருந்து Dஐ இணைத்தால் நாம் ABD மேலும் BCD எனும் இரண்டு முக்கோணங்களைப் பெறலாம்.



ΔABD ன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2}\left[-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(50+8+48) = \frac{106}{2} = 53 \text{ ச.அ}$$

ΔBCD ன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\left[-4(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[44-10+4\right] = 19 \text{ சதுர அலகுகள்}$$

ΔABD ன் பரப்பளவு $+ \Delta BCD$ ன் பரப்பளவு = 53+19 = 72சதுர அலகுகள்

எனவே நாற்கரம் ABCDன் பரப்பளவு 72 சதுர அலகுகள்

முயற்சி செய்

(0, −1), (2, 1) (0, 3), (−2, 1) ஆகியவை வரிசைப்படி அமைந்த முனைகளாகக் கொண்ட சதுரத்தின் பரப்பளவை கண்டுபிடி.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

பின்வரும் புள்ளிகளால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவை கண்டுபிடி

(i) (2, 0), (1, 2), (1, 6)

(ii) (3, 1), (5, 0), (1, 2)

(iii) (−1.5, 3), (6, 2), (−3, 4)

நீ உற்றுநோக்கியது என்ன?

இந்த புள்ளிகளை மூன்று வெவ்வேறு வரைபடத்தாளில் குறி. நீ உற்றுநோக்கியது என்ன?

0 சதுர அலகுகள் கொண்ட முக்கோணத்தை பெறமுடியுமா?

இதன் பொருள் என்ன?

7.8.1. ஒரு கோடமைவன

ஒரே கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளிகள் ஒருகோடமைப்புள்ளிகள் என்பர் என நமக்கு தெரியும். $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ ஆகியவை ஒரே கோட்டின் மீது அமைந்த புள்ளிகள் எனில் இவை ஒரு முக்கோணத்தை ஏற்படுத்தாது. அதாவது ΔABCன் பரப்பளவு பூச்சியம் ஆகும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு எப்பொழுது பூச்சியம் ஆகிறதோ அப்பொழுது அந்த மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு-21. $(3, -2)$ $(-2, 8), (0, 4)$ ஆகியவை ஒரு தளத்திலுள்ள மூன்று புள்ளிகள் எனில் இந்த மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் எனக்காட்டு.

தீர்வு : முக்கோணத்தின் பரப்பளவை காணும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி

$$\Delta = \frac{1}{2}\left|3(8-4)+(-2)(4-(-2))+0((-2)-8)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|12 - 12\right| = 0$$

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 0. எனவே இந்த மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோடமைப்புள்ளிகள் அல்லது ஒரே கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளிகள் ஆகும்.

இதை செய்

பின்வரும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைப்புள்ளிகளா என சரிபார்.

(i) $(1, -1), (4, 1), (-2, -3)$

(ii) $(1, -1), (2, 3), (2, 0)$

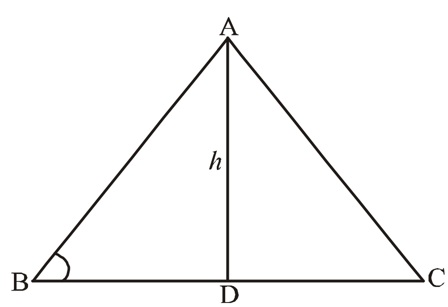
(iii) $(1, -6), (3, -4), (4, -3)$

7.8.2. முக்கோணத்தின் பரப்பளவு-ஹீரான் சூத்திரம்

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு காணும் சூத்திரம் $\frac{1}{2}\times$அடிப்பக்கம் $\times$ உயரம் என நமக்குத் தெரியும்.

கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம், சமபக்க முக்கோணம் மேலும் இருசமபக்க முக்கோணம் ஆகியவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்றாக இருக்கும். இந்த முக்கோணத்தின் பரப்பளவை நாம் கண்டுபிடிக்க முடியுமா?

ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம், உயரம் தெரிந்தபோது மேற்கண்ட சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி எளிதில் முக்கோணத்தின் பரப்பளவை கண்டுபிடிக்கலாம்.



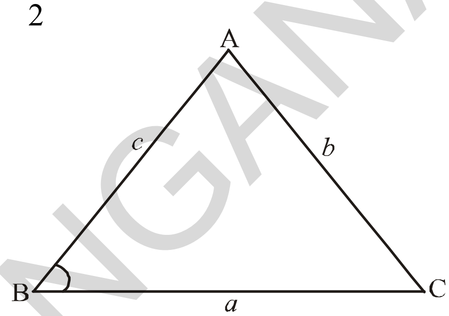
உயரம் (h) தெரியாதபோது முக்கோணத்தின் பரப்பளவை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது?

இதற்காக ஹீரான் எனும் கிரேக்க கணிதமேதை a, b, c ஆகியவற்றை பக்கங்களின் நீளங்களாகக்கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவை காணும் சூத்திரத்தை வருவித்தார்.

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ இங்கு } s = \frac{a+b+c}{2}$$

எடுத்துக்காட்டாக 12மீ, 9மீ, 15மீ ஆகியவற்றை பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக்காண ஹீரான் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தினால்

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ இங்கு } s = \frac{a+b+c}{2}$$



$$s = \frac{12+9+15}{2} = \frac{36}{2} = 18\text{மீ}$$

$s - a = 18 - 12 = 6$மீ

$s - b = 18 - 9 = 9$மீ

$s - c = 18 - 15 = 3$மீ

$A = \sqrt{18(6)(9)(3)} = \sqrt{2916} = 54$ சதுர மீட்டர்.

இதை செய்

(i) 15மீ, 17மீ, 21மீ ஆகியவற்றை பக்கஅளவாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவை கண்டுபிடி. (ஹீரான் சூத்திரத்தை பயன்படுத்து)

(ii) $(0, 0), (4, 0), (4, 3)$ ஆகிய புள்ளிகளால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவை ஹீரான் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி கண்டுபிடி.

எடுத்துக்காட்டு-22. $A(1, 2), B(-1, b), C(-3, -4)$ ஆகியவை ஒருகோடமைப் புள்ளிகள் எனில் 'b' ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு : $A(1, 2), B(-1, b), C(-3, -4)$ ஆகியவை கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள்

$x_1 = 1, y_1 = 2;$ $\quad x_2 = -1, y_2 = b;$ $\quad x_3 = -3, y_3 = -4$

ΔABCன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$ என நமக்குத் தெரியும்

$\therefore \frac{1}{2}\left|1(b+4) + (-1)(-4,-2) + (-3)(2-b)\right| = 0$ ($\because$ கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைந்தவை)

$|b + 4 + 6 - 6 + 36| = 0$

$|4b + 4| = 0$

$4b + 4 = 0$

$\therefore b = -1$

பயிற்சி - 7.3

1. பின்வரும் புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவை காண்க.
   (i) (2, 3) (−1, 0), (2, −4) (ii) (−5, −1), (3, −5), (5, 2)
   (iii) (0, 0), (3, 0), (0, 2)
2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரு கோடமை புள்ளிகள் எனில் ‘K’ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.
   (i) (7, −2) (5, 1) (3, K) (ii) (8, 1), (K, −4), (2, −5)
   (iii) (K, K) (2, 3), (4, −1).
3. (0, −1), (2, 1), (0, 3) ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைப்பதால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவை காண்க. மேலும் இந்த முக்கோணத்தின் பரப்பளவிற்கும், கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவிற்கும் இடையே உள்ள விகிதத்தை கண்டுபிடி.
4. (−4, −2), (−3, −5), (3, −2), (2, 3) ஆகியவற்றை வரிசையான முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பளவை கண்டுபிடி.
5. (i) (1, 1), (1, 9) மற்றும் (5, 1) (ii) (2, 3), (-1,3) மற்றும் (2,-1) ஆகிய புள்ளிகளால் உருவாகும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவை ஹீரான் சூத்திரம் பயன்படுத்தி காண்க.

7.9 நேர்க்கோடுகள்

பரத் மேலும் மீனா ஆகிய இருவரும் இரண்டு மாறிகளைக் கொண்ட கோட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வைக்காண விவாதித்துக் கொண்டிருந்தனர்.

பரத் : $2x + 3y = 12$ ன் தீர்வை உன்னால் கண்டுபிடிக்க முடியுமா?

மீனா : ஆம் நான் இதை செய்கிறேன் பார்

x	0	3	6	−3
y	4	2	0	6

$$2x+3y = 12$$
$$3y = 12 - 2x$$
$$y = \frac{12-2x}{3}$$

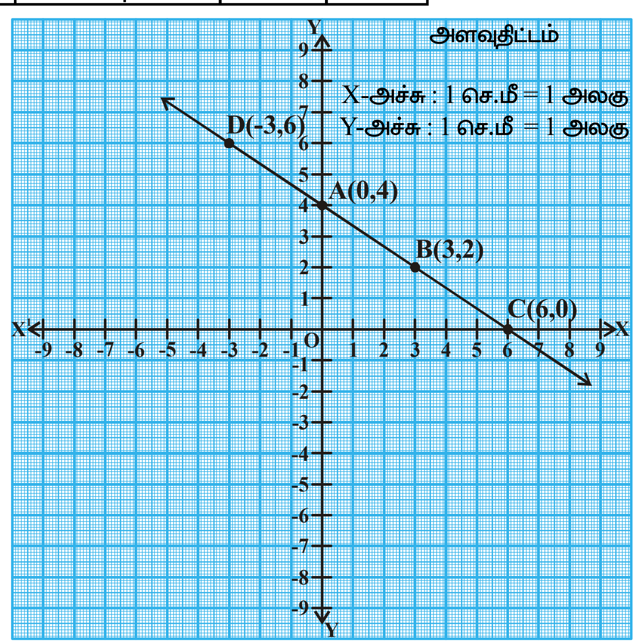
மீனா : நீ இந்த தீர்வுகளை வரிசை ஜோடிகளாக எழுத முடியுமா?

பரத் : ஆம்,(0,4), (3, 2), (6, 0), (−3, 6)

மீனா நீ இந்த புள்ளிகளின் அச்சுதூரங்களை தளத்தின் மீது குறிப்பாயா?

மீனா : நான் இதை இவ்வாறு செய்தேன்.

பரத் : நீ உற்றுநோக்கியது என்ன?



இந்த கோடு எதை குறிக்கிறது?

மீனா : இது ஒரு நேர்க்கோடு

பரத் : இந்த கோட்டின் மீது மேலும் சில புள்ளிகளை கண்டறிய முடியுமா?

இந்த கோட்டின் மீது மேலும் சில புள்ளிகளை கண்டறிய நீங்கள் மீனாவுக்கு உதவி செய்வீர்களா?

.................., ..., ..., ...

இந்த கோட்டில் $\overline{AB}$ ஐ என்னவென்று அழைக்கப்படுகிறது?

$\overline{AB}$ என்பது கோட்டுத்துண்டு.

இதை செய்

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் அச்சுதூரங்களை குறித்துக்காட்டி அவற்றை இணைக்கவும்.

1. $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $C(7, -1)$
2. $P(3, -5)$ $Q(5, -1)$, $R(2, 1)$, $S(1, 2)$ இவற்றுள் எது நேர்க்கோட்டை குறிக்கிறது? எது குறிக்கவில்லை? ஏன்

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

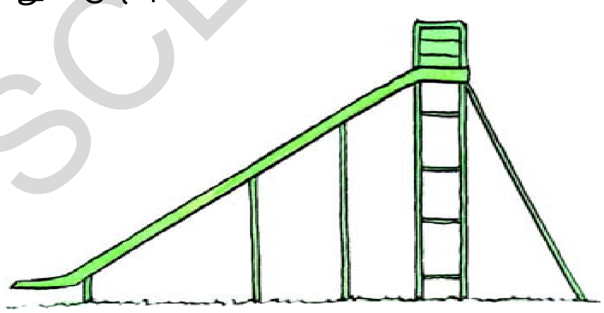
$y = x + 7$ என்பது ஒரு நேர்க்கோட்டை குறிக்கிறதா? இந்த கோட்டை வரைபடத்தில் வரைக.

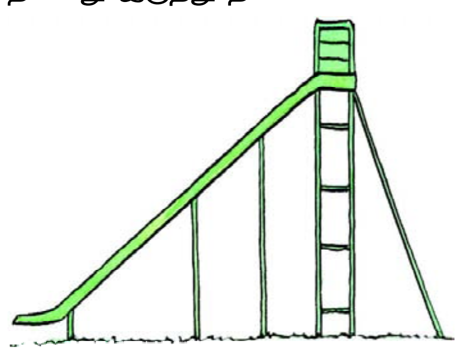
இந்த கோடு Y-அச்சை எந்த புள்ளியில் வெட்டுகிறது?

X-அச்சோடு எவ்வளவு கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது? உன்னுடைய நண்பர்களுடன் கலந்துரையாடு

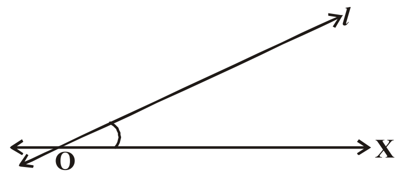
7.9.1 நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

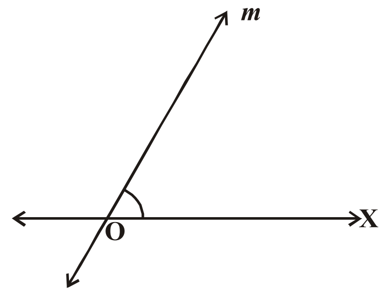
நீங்கள் பூங்காக்களில் சறுக்குப்பலகையை பார்த்திருப்பீர்கள். இங்கு இரண்டு சறுக்குப்பலகைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன இவற்றுள் எதன்மீது இருந்து நீங்கள் வேகமாக சறுக்கமுடியும்.





உங்களுடைய விடை இரண்டாவது என்பது மிகவும் சரியானது. ஏன்? பின்வரும் கோடுகளை உற்றுநோக்குங்கள்.





OXஉடன் எந்தகோடு அதிக கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது ?

OX உடன் l கோடு ஏற்படுத்தும் கோணத்தைவிட "m" கோடு ஏற்படுத்தும் கோணம் அதிகம்.

'l'கோட்டைவிட 'm' கோடு அதிக சாய்வை கொண்டுள்ளது. இதை வேறுவிதமாக கூறவேண்டுமானால் ஒரு கோட்டின் சரிவுத்தன்மை அந்த கோட்டின் சாய்வு எனப்படும்.

ஒரு கோட்டின் சாய்வை எவ்வாறு காணலாம்?

செயல்

கீழே உள்ள படத்தில் கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளிகளை உற்றுநோக்கி பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்புக.

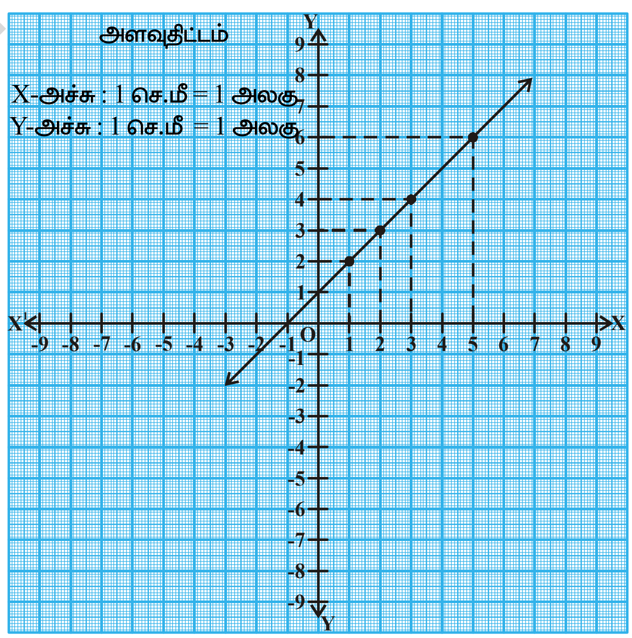
x அச்சுதூரம்	1	-	-	4	-
y அச்சுதூரம்	2	3	4	-	6

xஅச்சுதூரம் மாறும் போது y அச்சின் தூரமும் மாறுவதை கவனிக்கலாம். y அச்சுதூரம் $y_1 = 2$ லிருந்து $y_2 = 3$ஆக அதிகரிக்கும் போது,

yல் ஏற்படும் மாற்றம் = ...

இதற்கு ஒத்த 'x'ல் ஏற்படும் மாற்றம்= ...

$\therefore \dfrac{y \text{ ல் ஏற்படும் மாற்றம்}}{x\text{ல் ஏற்படும் மாற்றம்}} =$ ....



y அச்சுதூரம் $y_1 = 2,$ லிருந்து $y_3 = 4$ ஆக அதிகரிக்கும் போது

yல் ஏற்படும் மாற்றம் = ...

இதற்கு ஒத்த xல் ஏற்படும் மாற்றம் ....

$\therefore \dfrac{y \text{ ல் ஏற்படும் மாற்றம்}}{x\text{ல் ஏற்படும் மாற்றம்}} =$ ....

கோட்டின் மீதுள்ள மற்ற புள்ளிகளில் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளில் உள்ள அச்சு தூரங்களை எடுத்துக்கொண்டு பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்புக.

y மதிப்பு		yல் ஏற்படும் மாற்றம்	x	xல் ஏற்படும் மாற்றம்		$\frac{y \text{ ல் ஏற்படும் மாற்றம்}}{x\text{ல் ஏற்படும் மாற்றம்}}$
2	4	-	1	2	1	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

மேற்கண்ட செயலில் இருந்து கவனித்தது என்ன?

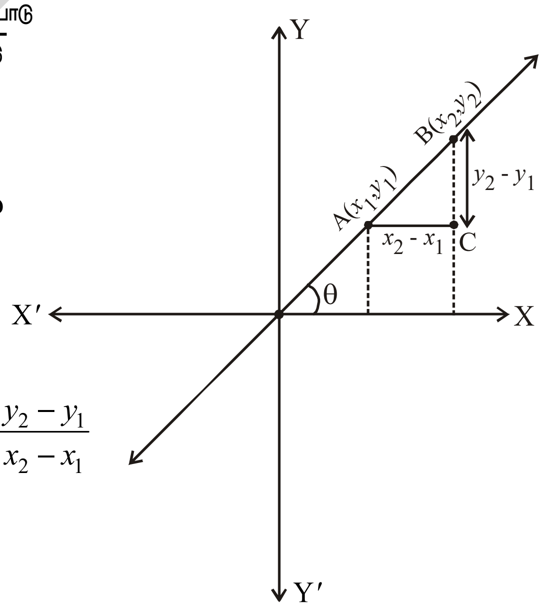
ஒரு கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளிகளின் அச்சு தூரங்களில் y அச்சுதூரம், x அச்சுதூரம் மாறுவதற்கு உள்ள விகிதத்திற்கும், அந்த கோடு x அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணத்திற்கும் ஓர் உறவு உள்ளது.

முக்கோணவியல் அத்தியாயத்தில் நீங்கள் $\tan\theta$ எனும் கருத்தைப் பற்றி கற்பீர்கள்

அதாவது $\tan\theta = \frac{\text{கோணம் } \theta\text{ன் எதிர்பக்கம்}}{\text{கோணம் } \theta\text{ன் அடுத்துள்ளபக்கம்}} = \frac{y \text{ ல் ஏற்படும் மாற்றம்}}{x\text{ல் ஏற்படும் மாற்றம்}}$

7.9.2 இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வு

படத்தில் காட்டியவாறு l கோட்டின்மீது $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ எனும் இரண்டு புள்ளிகள் உள்ளன என்க.



கோட்டின் சாய்வு = $\frac{y \text{ அச்சு தூரங்களின் வேறுபாடு}}{x\text{அச்சு தூரங்களின் வேறுபாடு}}$

$\overline{AB}$ ன் சாய்வு $= m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

சாய்வை 'm' எனும் எழுத்தால் குறித்துக்காட்டப்படுகிறது. மேலும் 'l' கோடு Xஅச்சுடன் θ கோணத்தை ஏற்படுத்தும்.

எனவே AB கோட்டுத்துண்டு ACஉடன் அதே θ கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது.

$$\therefore \tan\theta = \frac{\text{கோணம் } \theta\text{ன் எதிர்பக்கம்}}{\text{கோணம் } \theta\text{ன் அடுத்துள்ளபக்கம்}} = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

$$\therefore m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

இதுவே $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் $\overline{AB}$ கோட்டுத்துண்டின் சாய்வை கண்டறியும் சூத்திரம் ஆகும்.

Xஅச்சுடன் θ கோணத்தை ஏற்படுத்தும் கோட்டின் சாய்வு $m = \tan\theta$.

எடுத்துக்காட்டு-23. ஒரு கோட்டின் முனைப்புள்ளிகள் (2, 3), (4, 5)எனில் அக்கோட்டின் சாய்வை கண்டுபிடி.

தீர்வு : கோட்டின் முனைப்புள்ளிகள் (2, 3), (4, 5) எனில் அக்கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் சாய்வு 1 ஆகும்.

இதை செய்

பின்வரும் முனைப்புள்ளிகளால் ஏற்படும் $\overleftrightarrow{AB}$ ன் சாய்வை கண்டுபிடி.

1. A(4, −6) B(7, 2)
2. A(8, −4), B(−4, 8)
3. A(−2, −5), B(1, −7)

முயற்சி செய்

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் $\overleftrightarrow{AB}$ ன் மேல் அமைந்துள்ளன எனில் இதன் சாய்வை கண்டுபிடி.

1. A(2, 1), B(2, 6)
2. A(−4, 2), B(−4, −2)
3. A(−2, 8), B(−2, −2)
4. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளால் ஏற்படும் $\overleftrightarrow{AB}$ கோட்டுத்துண்டு Yஅச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் என்பதை நியாயப்படுத்து. இந்த சாய்வைப் பற்றி என்ன கூறுவாய்? ஏன்?

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

A(3, 2), (−8, 2) ஆகிய புள்ளிகள் $\overleftrightarrow{AB}$ ன் மீது இருந்தால் சாய்வை கண்டுபிடி. $\overleftrightarrow{AB}$ கோட்டுத்துண்டு எப்பொழுது X-அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்? உன்னுடைய குழுவில் உள்ள நண்பர்களுடன் சிந்தித்து கலந்துரையாடு.

எடுத்துக்காட்டு-24. P(2, 5), Q(x, 3) ஆகிய புள்ளிகள் வழியே செல்லும் கோட்டின் சாய்வு 2 எனில் xன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு : P(2, 5), Q(x, 3) ஆகிய புள்ளிகள் வழியே செல்லும் கோட்டின் சாய்வு 2

இங்கு, $x_1 = 2,\ y_1 = 5,\ x_2 = x,\ y_2 = 3$

$$\overline{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-5}{x-2} = \frac{-2}{x-2} \Rightarrow \frac{-2}{x-2} = 2$$

$$\Rightarrow -2 = 2x - 4 \qquad \Rightarrow 2x = 2 \qquad \Rightarrow x = 1$$

பயிற்சி - 7.4

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வை கண்டுபிடி.

   (i) $(4, -8)$ மேலும் $(5, -2)$

   (ii) $(0, 0)$ மேலும் $(\sqrt{3}, 3)$

   (iii) $(2a, 3b)$ மேலும் $(a, -b)$

   (iv) $(a, 0)$ மேலும் $(0, b)$

   (v) $A(-1.4, -3.7)$, $B(-2.4, 1.3)$

   (vi) $A(3, -2)$, $B(-6, -2)$

   (vii) $A\left(-3\frac{1}{2}, 3\right)$, $B\left(-7, 2\frac{1}{2}\right)$

   (viii) $A(0, 4)$, $B(4, 0)$

விருப்பப் பயிற்சி (தேர்வுக்குரிய வினாக்கள் அல்ல)

1. வட்டத்தின் மையம் Q . Y-அச்சின் மீது உள்ளது. மேலும் இந்த வட்டம் $(0, 7)$ மற்றும் $(0, -1)$என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது. விட்டம் மிகை X-அச்சை $(P, 0)$ எனும் இடத்தில் வெட்டினால் ‘P’ன் மதிப்பைக் காண்க.
2. $A(2, 3), B(-2, -3), C(4, -3)$ ஆகிய புள்ளிகள் ΔABCஐ ஏற்படுத்துகிறது. பக்கம் BC மற்றும் Aன் கோண இருசமவெட்டி சந்திக்கும் புள்ளி எது?
3. சமபக்க முக்கோணம் ABC ன் பக்கம் BC, X அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது. இதன் பக்கங்கள் BC,CA,ABன் வழியாக செல்லும் கோட்டின் சாய்வை கண்டுபிடி.
4. $2x + 3y - 6 = 0$ எனும் கோடு ஆயத்தொலை அச்சுகளுடன் ஏற்படுத்தும் முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச்சந்தியை கண்டுபிடி.

செயல்திட்டம்

- ஒரு கோட்டுத்துண்டை உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியின் மையக்கோடுகளை வரைபடம் மூலம் கண்டறிக.

நாம் கற்றவை

1. $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
2. ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $P(x, y)$ எனும் புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் $\sqrt{x^2 + y^2}$.
3. Yஅச்சுக்கு இணையான கோட்டின் மீதுள்ள $(x_1, y_1), (x_1, y_2)$ எனும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் $|y_2 - y_1|$.
4. Xஅச்சுக்கு இணையான கோட்டின் மீதுள்ள $(x_1, y_1), (x_2, y_1)$ எனும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் $|x_2 - x_1|$.
5. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $P(x, y)$எனும் புள்ளி $m_1 : m_2$ என்ற விதத்தில் உட்புறமாக பிரித்தால் அப்புள்ளியின் அச்சுதூரங்கள் $\left[\dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right]$.
6. $P(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளி $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.
7. ஒரு முக்கோணத்தின் மையக்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி மையக்கோட்டுச்சந்தி எனப்படும். மையக்கோட்டுச்சந்தியின் அச்சுதூரங்கள் $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ இங்கு (x_1, y_1) (x_2, y_2) மற்றும் (x_3, y_3) என்பவை முக்கோணத்தின் உச்சிகள்.
8. ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்து மையக்கோடுகளையும் 2:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச்சந்தி ஆகும்.
9. (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) ஆகிய புள்ளிகளால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\dfrac{1}{2} |x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)|$
10. முக்கோணத்தின் பரப்பளவு காணும் ஹீரான் சூத்திரம்

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad \because s = \frac{a+b+c}{2}$$

(a, b, c ஆகியவை ΔABCன் மூன்று பக்கங்கள்)

11. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளைக் கொண்ட கோட்டின் சாய்வு $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

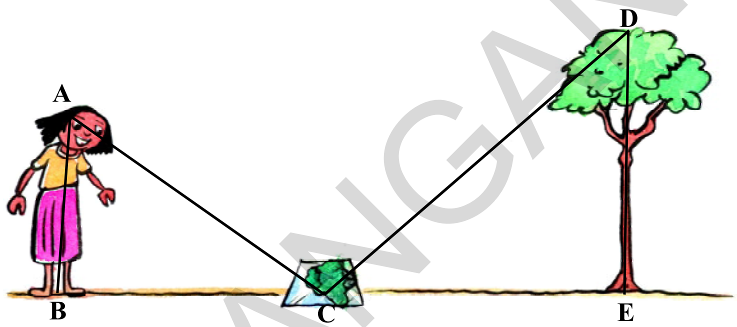
அத்தியாயம்

8 வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

(SIMILAR TRIANGLES)

8.1 அறிமுகம்

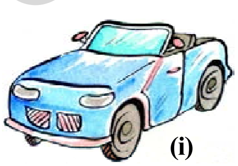
சுனிதா வீட்டு தோட்டத்தில் ஒரு உயரமான மரம் உள்ளது. அவள் அந்த மரத்தின் உயரத்தை காண நினைத்தாள். ஆனால் அதை எவ்வாறு காணவேண்டும் என்பது தெரியவில்லை. அப்போது அவளுடைய மாமா அவள் வீட்டிற்கு வந்தார். அப்போது சுனிதா அவரை அந்த மரத்தின் உயரத்தைக் காண உதவுமாறு கேட்டாள். அவர் சிறிது நேரம் ஆலோசித்து பிறகு அவளை ஒரு கண்ணாடி எடுத்து வருமாறு கேட்டார். அவர் அந்த கண்ணாடியை மரத்தின் அடியிலிருந்து சிறிது தூரத்தில் வைத்தார். பிறகு சுனிதாவை கண்ணாடிக்கு மற்றொருபுறம் சென்று கண்ணாடியின் மரத்தின் மேல் பாகம் அவளுக்கு தெரியும் இடத்தில் நிற்குமாறு கூறினார்.

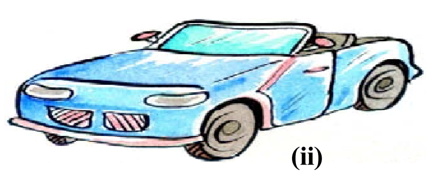


நாம் படத்தை வரையும் போது, சுனிதா (AB) விலிருந்து கண்ணாடி (C) மற்றும் கண்ணாடியிலிருந்து மரம் (DE) வரை மேலே வரைந்துள்ளபடி வரைந்தால் ΔABC மற்றும் ΔDECஐ கவனிக்கலாம். இப்போது இந்த முக்கோணங்களைப் பற்றி நீ என்ன சொல்ல முடியும்? அவை சர்வசமமா? இல்லை. ஏனெனில் அவை ஒரே வடிவத்தில் இருந்தாலும் அவற்றின் அளவுகள் வேறாக உள்ளன. இவ்வாறு, வடிவத்தில் ஒத்திருந்து அளவுகளில் வேறாக உள்ள வடிவியல் படங்களை என்னவென்று அழைப்பர் என உனக்குத் தெரியுமா? அவை வடிவொத்த படங்கள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

மரங்களின் உயரங்கள், மலைகளின் உயரங்கள் அல்லது வெகுதூரத்தில் உள்ள சூரியனுக்கு இடையேயுள்ள தூரங்கள் ஆகியவற்றை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கப்பட்டிருக்கும் என உன்னால் ஊகிக்கமுடியுமா? இவற்றை நாம் நேராக அளக்கும் நாடாவால் அளக்கமுடியுமா? நாம் இந்த உயரங்கள், தூரங்களை மறைமுகமான முறையில் காண்கிறோம். இந்த மறைமுக முறையில் வடிவொத்த படங்களில் அடிப்படையில் காண்கிறோம்.

8.2 வடிவொத்த படங்கள்


(i)


(ii)

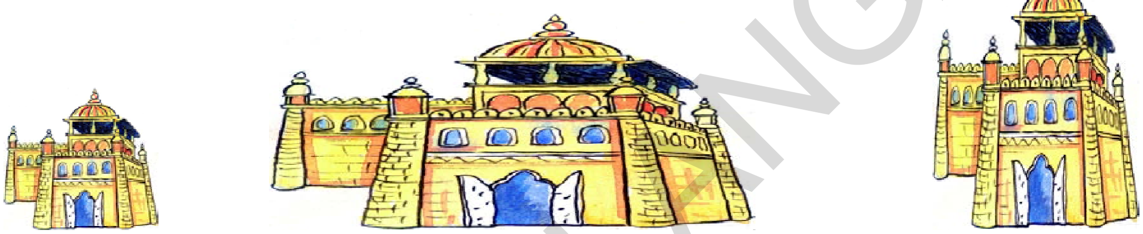

(iii)

முதல் படத்தில் உள்ள காரைக் கவனி. இந்த காரின் அகலத்தை அவ்வாறே வைத்து நீளத்தை இருமடங்காக்கினால் அது படம் (ii)ல் உள்ள காரைப்போன்று காணப்படும்.

படம் (i)ல் உள்ள காரின் நீளத்தை அப்படியே வைத்து அதன் அகலத்தை இருமடங்காக்கினால் அது படம் (iii)ல் உள்ளதைப் போல் காணப்படும்.

இப்போது, படம் (ii) மேலும் படம் (iii)ஐப்பற்றி என்ன கூறுவாய்? அவை படம் (i)ஐப் போன்று உள்ளனவா? இவை உருவத்தில் மாறுபட்டு உள்ளன. அவற்றை வடிவொத்தவை எனக்கூறமுடியுமா? இல்லை இவை ஒரே வடிவத்தில் இருந்தாலும் அவை வடிவொத்தவை அல்ல.

ஒரு புகைப்படம் எடுப்பவர் ஒரே படச்சுருளிலிருந்து(photo negative) பல்வேறு அளவுகளில் நிழற்படங்களை கொடுக்கிறார். நீங்கள் ஸ்டாம்ப் அளவு, பாஸ்போர்ட் அளவு, கார்டு அளவு என்ற அளவுகளைப் பற்றி கேள்விப்பட்டிருப்பீர்கள். பொதுவாக புகைப்படத்தை 35 *mm* பிலிமில் எடுப்பார். பிறகு அதை பெரிய அளவு அதாவது 45 mm (அல்லது 55 mm) என உருபெருக்கம் செய்கிறார். சிறிய புகைப்படத்தின் ஒவ்வொரு கோட்டுத்துண்டும் 35:45 அல்லது 35:55 என பெரிதாக்கப்படுகிறது. மேலும், இந்த இரண்டு புகைப்படங்களில் அளவுகள் வேறுபாடு இருந்தாலும் அவற்றின் கோணங்கள் ஒன்றாக இருப்பதை நாம் காணலாம். எனவே, புகைப்படங்கள் வடிவொத்தவை எனலாம்.



(i) (ii) (iii)

இவ்வாறே, வடிவியலில் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை சமமாக உள்ள இரண்டு பலகோணங்கள் வடிவொத்தவையாக இருக்கவேண்டுமெனில் அவற்றின் ஒத்த கோணங்கள் சமமாகவும், ஒத்த பக்கங்கள் ஒரேவிகிதத்தில் அல்லது விகிதசமத்தில் இருக்கவேண்டும்.

> ஒரு பலகோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றும் கோணங்கள் சமமாக இருந்தால் அதை ஒழுங்கான பலகோணம் என்கிறோம்.

ஒத்த பக்கங்களின் விகிதத்தை சாதாரணமாக அளவுதிட்டம் என்கிறோம். நம் அன்றாட வாழ்க்கையில், ஒரு கட்டிடத்தைக்கட்ட முதலில் அதன் அளவை தாளின்மேல் குறிப்பிட்ட அளவுதிட்டம் கொண்டு வரையப்படுகிறது. இதையே blue print என்பர்.

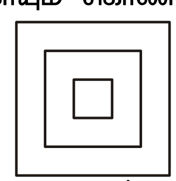
சிந்தித்து கலந்துரையாடு

அன்றாட வாழ்க்கையில் அளவுதிட்டத்தை உபயோகிக்கும் சில சந்தர்ப்பங்களை எழுது.

சமமான பக்கங்களை உடைய எல்லா ஒழுங்கான பல கோணங்களும் வடிவொத்தவையே. எடுத்துக்காட்டாக, எல்லா சதுரங்களும் வடிவொத்தவை. எல்லா சமபக்க முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை.

ஒரே ஆரத்தைக் கொண்ட வட்டங்கள் சர்வசமம். ஆனால் வெவ்வேறான ஆரங்களைக்கொண்ட வட்டங்கள் சர்வசமம் அல்ல. ஆனால் இந்த வட்டங்கள் ஒரே அமைப்பையும் வெவ்வேறு அளவுகளையும் கொண்டிருப்பதால் இவை வடிவொத்தவை ஆகும்.

சர்வசமபடங்கள் அனைத்தும் வடிவொத்தவை. ஆனால் வடிவொத்த படங்கள் அனைத்தும் சர்வசமம் அல்ல என நாம் கூறலாம்.



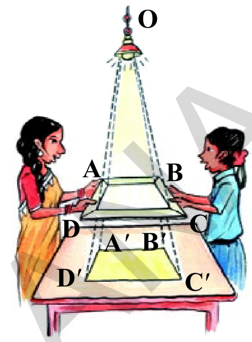
வடிவொத்த சதுரங்கள்

வடிவொத்த சமபக்க முக்கோணங்கள்

வடிவொத்த வட்டங்கள்

படங்களின் வடிவொப்புமையைப்பற்றி நாம் தெளிவாகக் புரிந்துக்கொள்ள இந்த செயல்பாட்டை செய்வோம்.

செயல்பாடு



உங்கள் வகுப்பறையில் மேற்கூரையில் பொருத்தப்பட்ட மின்விளக்கு எரியும்படி செய்து அதற்கு நேர்கீழாக மேசையைவை. ஒரு ஒளிபுகும்தாளிலிருந்து ஒரு பலகோணம் ABCD ஐ வெட்டி எடு அதை தரைக்கு இணையாகவும் மின்விளக்கு மற்றும் மேசைக்கு மத்தியிலும் படத்தில் காட்டியவாறு வை. மேசையின்மேல் ஒளிபுகும்தாளின் நிழலின் புறவரியை வரைந்து நாற்கரம் $A'B'C'D'$ என பெயரிடு.

இந்த நாற்கரம் $A'B'C'D'$ என்பது ABCDன் பெரிதுபடுத்தப்பட்ட அல்லது உருபெருக்கம் செய்யப்பட்டதாகும். அதாவது மின்விளக்கின் இடம் ‘O’எனக் கொண்டால் A' என்பது OA ன் மேல் அமையும், B' என்பது $\overrightarrow{OB}$ ன் மேலும், C' என்பது $\overrightarrow{OC}$ ன் மேலும், D' என்பது $\overrightarrow{OD}$ ன் மேலும் அமையும். நாற்கரங்கள் ABCD மேலும் $A'B'C'D'$ என்பவை ஒரே வடிவத்தையும் வெவ்வேறு அளவுகளையும் கொண்டுள்ளன.

A' என்பது உச்சி Aக்கு ஒத்ததாக உள்ளது. இதை $A' \leftrightarrow A$ என குறியீட்டால் குறிக்கிறோம். இவ்வாறே $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ மேலும் $D' \leftrightarrow D$.

கோணங்களையும் பக்கங்களையும் அளந்து பார்த்து கீழ்கண்டவற்றை சரிபார்க்கவும்.

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ மேலும்

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$.

இதிலிருந்து சமமான எண்ணிக்கையுள்ள பக்கங்களை உடைய இரண்டு பல கோணங்கள் வடிவொத்தவையாக இருக்கவேண்டுமெனில்

(i) அவற்றின் ஒத்தகோணங்கள் எல்லாம் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

(ii) அவற்றின் ஒத்தபக்கங்கள் ஒரே விகிதத்தில் (விகிதசமத்தில்) இருக்கவேண்டும் என்பதை உறுதிப்படுத்துகிறது.

ஒரு சதுரம், ஒரு செவ்கத்திற்கு வடிவொத்ததா? இரண்டு படங்களிலும் ஒத்த கோணங்கள் சமம். ஆனால் ஒத்தபக்கங்கள் ஒரே விகிதத்தில் இல்லை. எனவே அவை வடிவொத்தவை அல்ல. வடிவொப்புமைக்கு மேல்கண்ட இரண்டு நிபந்தனைகளில் ஏதேனும் ஒன்று மட்டும் போதுமானதல்ல. இரண்டு நிபந்தனைகளையும் திருப்திபடுத்த வேண்டும்.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

ஒரு சதுரமும் சாய்சதுரமும் வடிவொத்தவையா? உன் நண்பர்களுடன் கலந்துரையாடு, நிபந்தனைகள் ஏன் போதுமானதாக இல்லை என்பதை எழுது.

இதை செய்

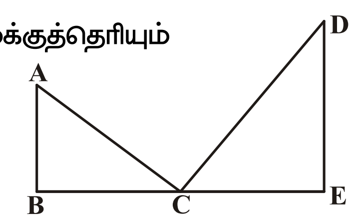
1. கோடிட்ட இடங்களை வடிவொத்தவை/வடிவொத்தவை அல்ல என்பதை நிரப்புக.
   - (i) எல்லா சதுரங்களும் ....
   - (ii) எல்லா சமபக்க முக்கோணங்களும் ....
   - (iii) எல்லா இருசமபக்க முக்கோணங்களும் ....
   - (iv) ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள பக்கங்களை உடைய இரண்டு பலகோணங்களின் ஒத்தகோணங்கள் சமம் மற்றும் ஒத்தபக்கங்கள் சமம் எனில் அவை ....
   - (v) அளவுகுறைக்கப்பட்ட மேலும் அதிகப்படுத்தப்பட்ட ஒரு பொருளின் நிழற்படங்கள் (photographs) ....
   - (vi) சாய்சதுரம் மேலும் சதுரம் ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று ....
2. கீழ்கண்ட கூற்றுகளில் எவை மெய்/மெய்யற்றது என எழுது.
   - (i) இரண்டு வடிவொத்த படங்கள் சர்வசமம்
   - (ii) இரண்டு சர்வசமபடங்கள் வடிவொத்தவை.
   - (iii) இரண்டு பலகோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் எனில் அவை வடிவெத்தவை
3. கீழ்கண்டவற்றிற்கு இரண்டு வெவ்வேறு உதாரணங்கள் தருக.
   - (i) ஒருஜோடி வடிவொத்த படங்கள் (ii) ஒருஜோடி வடிவொவ்வா படங்கள்

8.3 முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமை

அடுத்துள்ள படத்தில் நாம் இரண்டு முக்கோணங்களை வரைந்துள்ளோம். அவை வடிவொப்புமை பண்பை காட்டுகின்றன. இரண்டு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையாக இருக்கவேண்டுமெனில்.

(i) ஒத்த கோணங்கள் சமம் மேலும்

(ii) ஒத்த பக்கங்கள் ஒரே விகிதத்தில் இருக்கும் என நமக்குத்தெரியும்



ΔABC, ΔDECன் அறிமுகத்தில்

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle ACB = \angle DCE$

மேலும் $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{EC}{BC} = \dfrac{DC}{AC} = K$ (அளவு காரணி)

எனவே ΔABC என்பது ΔDECக்கு வடிவொத்தது

குறியீட்டு முறையில் $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ என எழுதுகிறோம்.

('~' எனும் குறியீடு "Is similar to" வடிவொத்தது என படிக்கிறோம்)

Kஎன்பது அளவு காரணியாதலால்

$K > 1$ எனில் உருப்பெருக்கம் செய்யப்பட்ட படங்கள்,

$K = 1$ எனில் சர்வசமபடங்கள்

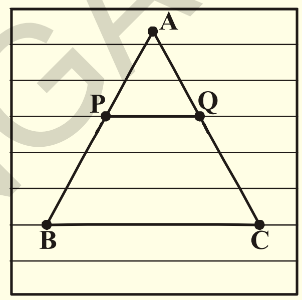
$K < 1$ எனில் சிறிதாக்கப்பட்ட படங்கள்

மேலும் ΔABC, ΔDECல் ஒத்தகோணங்கள் சமம். எனவே அவற்றை சமகோண முக்கோணங்கள் என்கிறோம். இரண்டு சமகோண முக்கோணங்களில் இரண்டு ஒத்தபக்கங்களின் விகிதம் சமமாகவே இருக்கும். இதை நிருபிக்க அடிப்படைவிகிதசமதேற்றத்தை எடுத்துக்கொள்கிறோம். இதையே தேல்ஸ் தேற்றம் என்றும் கூறுகிறோம்.

இந்த அடிப்படை விகிதசம தேற்றம் அல்லது தேல்ஸ் தேற்றத்தை புரிந்துக்கொள்ள கீழ்கண்ட செயல்பாட்டை செய்கிறோம்.

செயல்பாடு

ஏதேனும் ஒரு கோடிட்டதாளை எடுத்துக்கொள். அதில் ஒரு முக்கோணத்தை வரைக. முக்கோணத்தின் அடி ஒரு கோட்டின் மேல் இருக்குமாறு வரைக. இப்போது ΔABCஐ நிறைய கோடுகள் சந்திக்கின்றன. அதில் ஒரு கோட்டை எடுத்துக்கொண்டு அது முக்கோணத்தின் பக்கங்கள், AB, AC ஐத் தொடும் புள்ளிகளுக்கு P, Qஎன பெயரிடு.



$\frac{AP}{PB}, \frac{AQ}{QC}$ ன் விகிதத்தை காண். நீ என்ன கவனிக்கிறாய்?

அந்த விகிதங்கள் சமமாக உள்ளன. ஏன்? இது எப்பொழுதும் மெய்யா? மேலும் சிலகோடுகளை எடுத்துக்கொண்டு முயற்சிசெய். கட்டத்தாளில் உள்ள கோடுகள் இணையாக இருக்கும் என நமக்குத்தெரியும். எனவே ஒவ்வொரு முறையும் விகிதங்கள் சமமாகவே இருக்கும் எனவே ΔABCல், $PQ \parallel BC$ எனில் $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$.

இதையே அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின் முடிவு என்கிறோம்

8.3.1 அடிப்படைவிகிதசமதேற்றம் (தேல்ஸ்தேற்றம்)

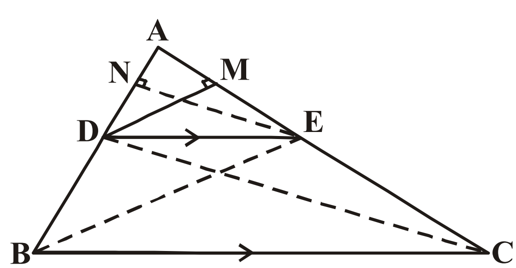
தேற்றம்-8.1 : ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோடு மற்ற இரண்டு பக்கங்களை வெவ்வேறு புள்ளிகளில் சந்தித்தால், அந்த இரண்டு பக்கங்களும் ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கப்படும்.

தரவு : ΔABCல், $DE \parallel BC$ என்பது AB, AC பக்கங்களை முறையே D மேலும் Eல் வெட்டுகிறது.

நிருபிக்க : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

அமைப்பு : B, Eஐயும் மேலும் C, Dஐயும் இணை

$DM \perp AC$, $EN \perp AB$ வரைக.



நிரூபணம் : ΔADEன் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

ΔBDEன் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times BD \times EN$

$$\text{எனவே } \frac{\Delta ADE\text{ன் பரப்பு}}{\Delta BDE\text{ன் பரப்பு}} = \frac{\frac{1}{2}\times AD\times EN}{\frac{1}{2}\times BD\times EN} = \frac{AD}{BD} \qquad ...(1)$$

$$\text{மேலும் } \Delta ADE\text{ன் பரப்பு} = \frac{1}{2}\times AE\times DM$$

$$\Delta CDE\text{ன் பரப்பு} = \frac{1}{2}\times EC\times DM$$

$$\frac{\Delta ADE\text{ன் பரப்பு}}{\Delta CDE\text{ன் பரப்பு}} = \frac{\frac{1}{2}\times AE\times DM}{\frac{1}{2}\times EC\times DM} = \frac{AE}{EC} \qquad ...(2)$$

ΔBDE மேலும் ΔCDE என்பவை DE என்னும் ஒரேஅடிப்பக்கத்தின் மீதும் இரண்டு இணை கோடுகள், BC, DEக்கு இடையிலும் இருப்பதை கவனி.

எனவே, ΔBDEன் பரப்பு $=$ ΔCDEன் பரப்பு ...(3)

(1), (2), (3), லிருந்து

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

எனவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

இந்த தேற்றத்தின் மறுதலையும் மெய்யாகுமா? இதை தெரிந்துக்கொள்ள கீழ்கண்ட செயல்பாட்டை செய்யலாம்.

செயல்பாடு

உங்கள் நோட்டுபுத்தகத்தில் XAY என்னும் கோணத்தை வரைக. AXகதிரின் மேல் B_1, B_2, B_3, B_4 மேலும் Bஎன்னும் புள்ளிகளை

$AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1$செ.மீ என இருக்குமாறு குறிக்கக.

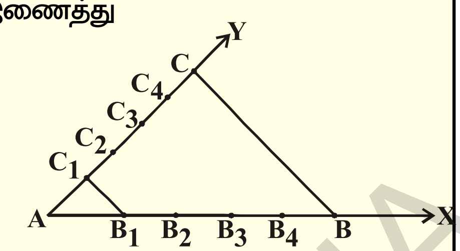
இவ்வாறே AY கதிரின் மேல் C_1, C_2, C_3, C_4 மற்றும் C புள்ளிகளை

$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2$ செ.மீ இருக்குமாறு குறிக்க.

B_1, C_1 மற்றும் B, C ஐ இணை

$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} = \frac{1}{4}$ மேலும் $B_1C_1 \parallel BC$ என்பதை கவனி.

இவ்வாறே B_2C_2, B_3C_3 , B_4C_4, ஆகியவற்றை இணைத்து



$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ மேலும் $B_2C_2 \parallel BC$

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ மேலும் $B_3C_3 \parallel BC$

$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ மேலும் $B_4C_4 \parallel BC$

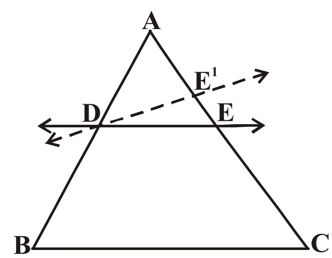
$C_1B_1 \parallel C_2B_2 \parallel C_3B_3 \parallel C_4\,B_4 \parallel CB$ என்பது சரியா?

இதிலிருந்து நாம் தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையைப் பெறலாம்.

தேற்றம்-8.2 : ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கும்கோடு, மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை.

தரவு : ΔABCல், $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ என இருக்குமாறு DE என்னும்கோடு வரையப்பட்டுள்ளது.

நிரூபிக்க : $DE \parallel BC$



நிரூபணம் : DE, BCக்கு இணை அல்ல என்று எடுத்துக்கொவோம். அப்போது BCக்கு இணையாக DE^1ஐ வரைக.

எனவே, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (ஏன்?)

$\therefore \quad \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (ஏன் ?)

மேலேயுள்ள சமன்பாட்டின் இருபுறமும் 1ஐக்கூட்ட, E மற்றும் E' என்பவை ஒன்றின் மேல் ஒன்று பொருந்தும் எனத்தெரிகிறது. (ஏன்?)

இதை செய்

1. ΔPQRல் PQ மேலும் PRன் மேல் உள்ள புள்ளிகள் முறையே E மேலும் F. கீழே கொடுக்கப்பட்டவற்றில் $EF \parallel QR$ என்பது ஆம்/இல்லை எனக்கூறு.

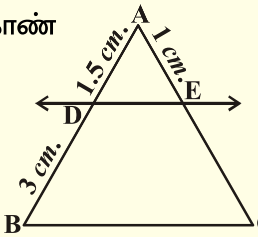
   (i) PE = 3.9 செ.மீ EQ = 3 செ.மீ PF = 3.6 செ.மீ FR = 2.4 செ.மீ

   (ii) PE = 4 செ.மீ, QE = 4.5 செ.மீ, PF = 8 செ.மீ RF = 9 செ.மீ.

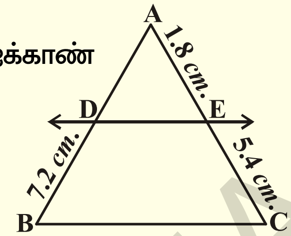
   (iii) PQ = 1.28 செ.மீ PR = 2.56 செ.மீ PE = 1.8 செ.மீ PF = 3.6 செ.மீ

2. கீழ்கண்ட படங்களில் $DE \parallel BC$.

(i) ECஐக்காண்

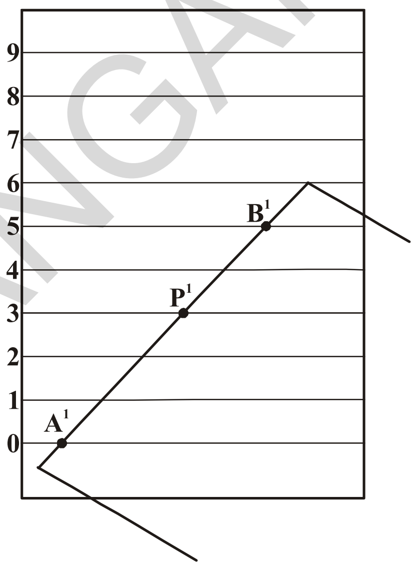


(ii) ADஐக்காண்



வரைமுறை : கோட்டுத்துண்டை பிரித்தல் (தேல்ஸ் தேற்றத்தை உபயோகித்து)

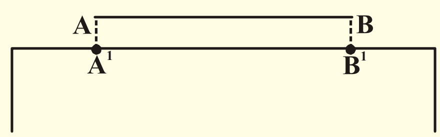
மாதுரி ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரைந்தாள். அவள் அதை 3:2 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்க நினைத்தாள். அவள் அந்த கோட்டை அளவுகோலின் உதவியால் அளந்து அதை தேவையான விகிதத்தில் பிரித்தாள். அப்போது அவளுடைய அக்கா வந்து மாதுரியை கோட்டுத்துண்டை அளக்காமல் கொடுக்கப்பட்ட விகிதத்தில் பிரிக்குமாறு ஆலோசனை கூறினாள். மாதுரி குழப்பத்துடன் அவளுடைய அக்காவை அவ்வாறு செய்ய உதவுமாறு கேட்டாள். அவளுடைய அக்கா செய்யும் முறையை விவரித்தாள். நீங்களும் இதை கீழ்கண்டசெயல்பாட்டின் மூலம் செய்யலாம்.



செயல்பாடு

கோடுபோட்ட ஒரு தாளை எடுத்துக்கொள். கோடுகளுக்கு கீழிருந்து 0(பூஜ்ஜியம்)வில் தொடங்கி வரிசையாக 1, 2, 3, ... என எண்ணிடு.

ஏதேனும் ஒரு தடிப்பான அட்டையை எடுத்துக்கொண்டு அதை கொடுக்கப்பட்ட AB கோட்டுத்துண்டின் மேல் வைத்து அதன் முனைப்புள்ளிகள் ABஐ அட்டையின் மேல் A^1, B^1 என குறித்துக்கொள்.

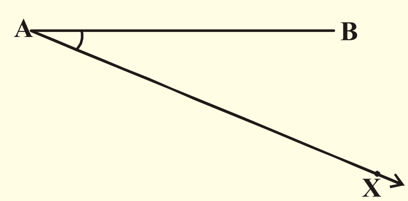


இப்போது A^1ஐ கோட்டுத்தாளின் 0(பூஜ்ஜியம்) என குறித்த கோட்டின் மேல்வை. அட்டையை தேவையானவாறுத்திருப்பி 5வது கோட்டின்மேல் B^1 வருமாறு வை. (3+2).

இப்போது அட்டை மூன்றாவது கோட்டைத் தொடும்புள்ளியை P^1எனக்குறி. இப்போது கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத்துண்டின் மேல் அட்டையை வைத்து P^1 புள்ளியுள்ள இடத்தில் 'P'என்பதைக்குறி. எனவே P என்பது AB கோட்டுத்துண்டை 3:2 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும்புள்ளி ஆகும்.

இப்போது இதை வரைமுறையின் மூலம் எவ்வாறு செய்யலாம் என்பதை கற்றுக்கொள்வோம்.

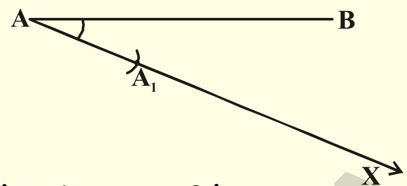
கொடுக்கப்படட கோட்டுத்துண்டு AB. இதை $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கவேண்டும். இங்கு m, n என்பவை மிகைஎண்கள். $m = 3$, $n = 2$ எனக்கொள்க.

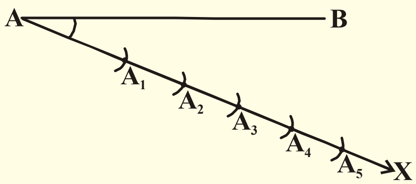


படிகள் :

1. AB கோட்டுத்துண்டுடன் குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்துமாறு AX என்னும் கோணக்கோட்டை வரைக.

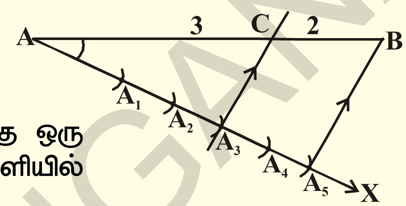
2. 'A' ஐ மையமாகவும் ஏதேனும் ஆரத்துடன் AXன் மேல் ஒருவில் வரைக. வில் வெட்டும் புள்ளி A_1 எனபெயரிடு.





3. A_1 ஐ மையமாகவும் ஆதே ஆரத்துடனும் மற்றொரு வில் வரைக. அது வெட்டும் புள்ளி A_2 ஐகுறி.

4. இவ்விதமாக 5 புள்ளிகளைக்குறி ($m + n = 3 + 2 = 5$) அந்த 5 புள்ளிகள் A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 மேலும் $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$

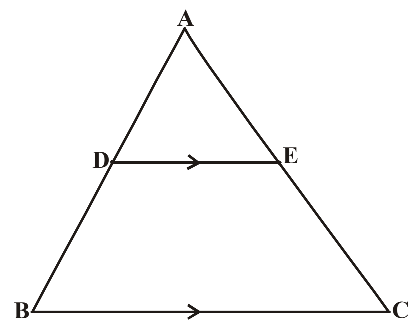


5. A_5Bஐ இணை. $A_3(m = 3)$ புள்ளி வழியே A_5Bக்கு ஒரு இணைகோடு வரைக. இது ABஐ Cஎன்னும் புள்ளியில் வெட்டுகிறது. இப்போது $AC : CB = 3 : 2$.

இப்போது தேல்ஸ் தேற்றம் மற்றும் அதன் மறுதலையை உபயோகித்து சில எடுத்துக்காட்டுகளை செய்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு-1. ΔABCல், $DE \parallel BC$ மேலும் $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$.

$AC = 5.6$. செ.மீ. எனில் AE ன் மதிப்பு என்ன?



தீர்வு : ΔABCல், $DE \parallel BC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ (தேல்ஸ் தேற்றப்படி)}$$

ஆனால் $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ எனவே $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{5}$

$AC = 5.6$ (தரவு) மேலும் $AE : EC = 3 : 5$.

$$\frac{AE}{AC - AE} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{AE}{5.6 - AE} = \frac{3}{5}$$

$5AE = (3 \times 5.6) - 3AE$ (குறுக்கு பெருக்கலின் மூலம்)

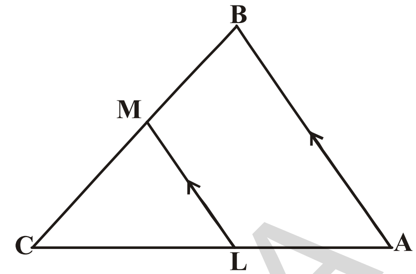
$8AE = 16.8$

$AE = \frac{16.8}{8} = 2.1$ செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு-2. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $LM \parallel AB$

$AL = x - 3,\ AC = 2x,\ BM = x - 2$

மேலும் $BC = 2x + 3$ எனில் x மதிப்பைக்காண்.



தீர்வு : ΔABCல், $LM \parallel AB$

$$\Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{BM}{MC} \text{ (அடிப்படை விகிதசமதேற்றத்தின்படி)}$$

$$\frac{x-3}{2x-(x-3)} = \frac{x-2}{(2x+3)-(x-2)}$$

$$\frac{x-3}{x+3} = \frac{x-2}{x+5}$$

$$(x-3)(x+5) = (x-2)(x+3) \quad \text{(குறுக்கு பெருக்கலின் மூலம்)}$$

$$x^2 + 2x - 15 = x^2 + x - 6$$

Þ $2x - x = -6 + 15$

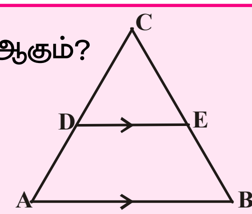
$$x = 9$$

இதை செய்

1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் xன் எந்த மதிப்புகளுக்கு $DE \parallel AB$ ஆகும்?

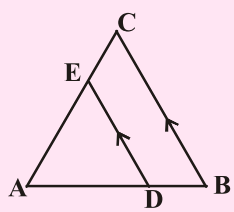
   $AD = 8x + 9,\ CD = x + 3$

   $BE = 3x + 4,\ CE = x.$



2. ΔABC, $DE \parallel BC$. $AD = x$, $DB = x - 2$, $AE = x + 2$, மேலும் $EC = x - 1$.

   எனில் x ன் மதிப்பைக் காண்.



எடுத்துக்காட்டு-3. ஒரு நாற்கரம் ABCDல் மூலைவிட்டங்கள் 'O'ல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. மேலும் $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ எனில் அது ஒரு சரிவகம் எனக்காட்டு.

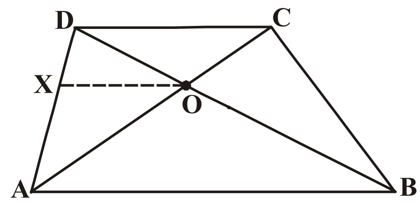
தீர்வு : **தரவு** : நாற்கரம் ABCDல், $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

நிரூபிக்க : ABCD ஒரு சரிவகம்

அமைப்பு : 'O'வழியே ABக்கு வரையப்பட்ட இணைகோடு DAஐ Xல் சந்திக்கிறது.

நிரூபணம் : ΔDABல், $XO \parallel AB$ (அமைப்பின்படி)

$$\Rightarrow \frac{DX}{XA} = \frac{DO}{OB} \quad \text{(அடிப்படை விகிதசமதேற்றம்)}$$



$\frac{AX}{XD} = \frac{BO}{OD}$ ..... (1)

மறுபடியும் $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ (தரவு)

$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{OD}$ ..... (2)

(1), (2)லிருந்து

$\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{CO}$

ΔADCல், $\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{OC}$ என்னும் படி XO என்னும் கோட்டுத்துண்டைவரைக

$\Rightarrow XO \parallel DC$ (தேல்ஸ் தேற்றத்தின்மறுதலை)

$\Rightarrow AB \parallel DC$

நாற்கரம் ABCDல், $AB \parallel DC$

$\Rightarrow$ ABCD ஒரு சரிவகம் எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு-4. சரிவகம் ABCDல் $AB \parallel DC$. இணையில்லாத பக்கங்கள் AD, BCன் மேல் உள்ள புள்ளிகள் முறையே E, F என்பவை $EF \parallel AB$ என்றிருக்குமாறு உள்ளன எனில், $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ எனக்காட்டு.

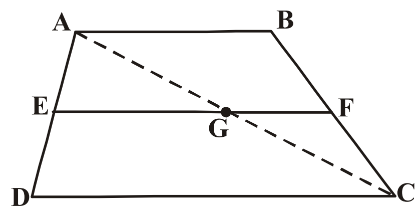
தீர்வு : A,Cஐ இணைக்கும் கோடு EFஐ Gல் வெட்டுகிறது

$AB \parallel DC$ மேலும் $EF \parallel AB$ (தரவு)

$\Rightarrow EF \parallel DC$ (ஒரே கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணை)

ΔADCல், $EG \parallel DC$

எனவே $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின்படி)...(1)



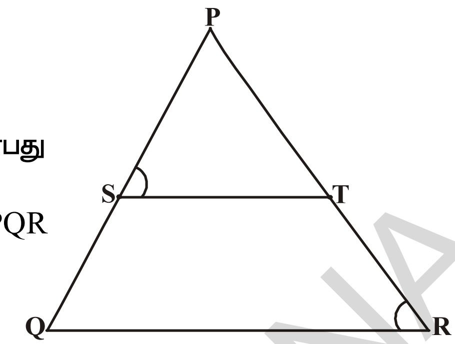
இவ்வாறே ΔCABல், $GF \parallel AB$

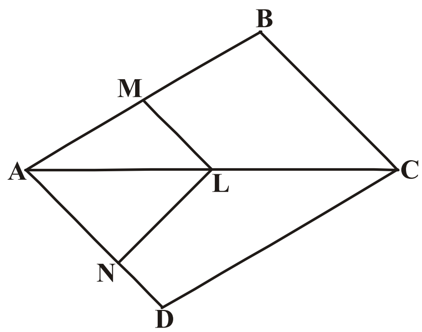
$\frac{CG}{GA} = \frac{CF}{FB}$ (அ.வி.தே) அதாவது $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ ...(2)

(1), (2)லிருந்து $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.

பயிற்சி - 8.1

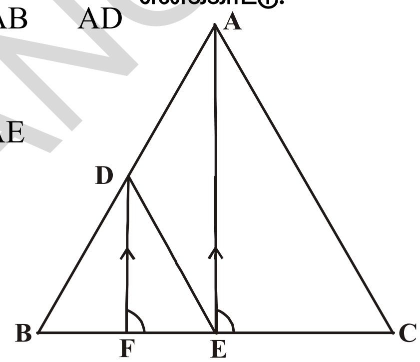
1. ΔPQRல் $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ என இருக்குமாறு ST என்பது ஒருகோடு. மேலும் $\angle PST = \angle PRQ$ எனில் ΔPQR ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் எனநிரூபி.





2. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், $LM \parallel CB, LN \parallel CD$ எனில் $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ எனக்காட்டு.

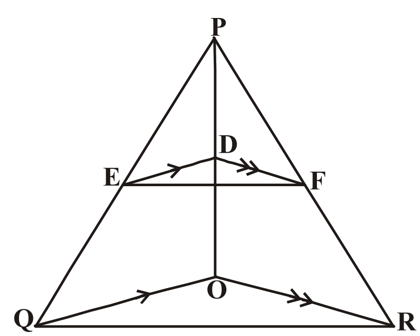
3. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், $DE \parallel AC$ மேலும் $DF \parallel AE$ எனில் $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ எனக்காட்டு.



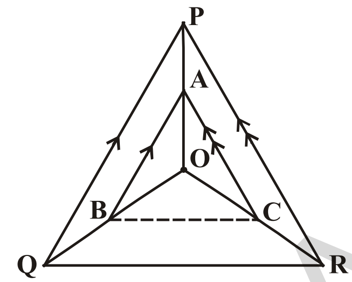
4. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒருபக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியே செல்லும் கோடு, மற்றொரு பக்கத்திற்கு இணையாக இருந்தால் அது மூன்றாவது பக்கத்தை இருசமக்கூறிடும் என நிரூபி (அடிப்படைவிகிதசம தேற்றத்தை உபயோகி).

5. ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை என நிரூபி.

6. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், $DE \parallel OQ, DF \parallel OR$. எனில் $EF \parallel QR$ எனக்காட்டு.



7. அடுத்துள்ள படத்தில், A, B, C என்பவை முறையே OP, OQ, OR ன் மேல் உள்ள புள்ளிகள். AB || PQ மேலும் AC||PR எனில் BC || QR எனக்காட்டு.



8. சரிவகம் ABCDல் AB||DC மேலும் அவற்றின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று 'O'வில் வெட்டிக்கொள்கின்றன, எனில் $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ எனக்காட்டு

9. 7.2செ.மீ நீளமுள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டை வரைந்து அதை 5:3 என்ற விகிதத்தில் பிரி. இரண்டு பாகங்களின் நீளங்களையும் அளந்து எழுது.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமை, மற்ற பலகோணங்களிலிருந்து எவ்வாறு வேறுபடுகிறது என்பதை உன் நண்பர்களுடன் கலந்துரையாடு.

8.4 முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமைக்கான விதிமுறைகள்

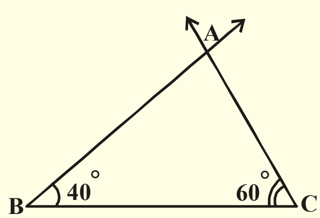
இரண்டு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையாக இருக்கவேண்டுமெனில் அவற்றின் ஒத்த கோணங்கள் சமமாக இருக்கவேண்டும். மேலும் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமத்தில் இருக்கவேண்டும் என்பது நமக்குத் தெரியும். இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமையை சரிபார்க்க நாம் ஒத்த கோணங்கள் சமமாக இருக்கின்றனவா எனவும் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமமாக இருக்கின்றனவா எனவும் சரிபார்க்க வேண்டும். இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமையை நிர்ணயிக்க சில விதிமுறைகளை ஏற்படுத்தவதற்கு முயற்சி செய்வோம். கீழே கொடுக்கப்பட்ட செயல்பாட்டை செய்வோம்.

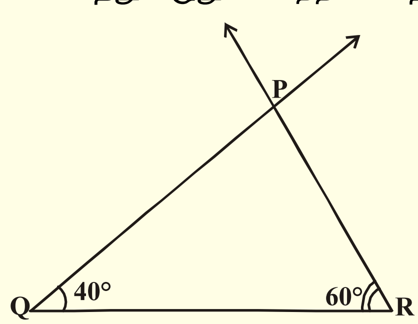
செயல்பாடு

ஒருபாகைமானி மற்றும் அளவுகோலின் உதவியுடன் சர்வசமமல்லாத இரண்டு முக்கோணங்களை ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் $40°$ மற்றும் $60°$ கோணங்கள் இருக்குமாறு வரைக. ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் மூன்றாவது கோணத்தை அளந்து எழுது. அது $80°$ ஆக இருக்கவேண்டும். (ஏன்?)

இப்போது முக்கோணங்களின் பக்கங்களை அளந்து எழுது. அவற்றின் உதவியுடன் ஒத்தபக்கங்களின் விகிதத்தை கணக்கிடு.

இவை வடிவொத்த முக்கோணங்களா?





இந்த செயல்பாடு கீழ்கண்ட வடிவொத்த முக்கோணங்களின் விதிமுறைகளுக்கு வழிவகுக்கிறது.

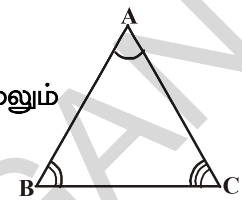
8.4.1 வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான கோ.கோ.கோ வடிவொப்புமை

தேற்றம்-8.3 : இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் எனில் ஒத்த கோணங்களுக்கு எதிரான பக்கங்கள் ஒரே விகிதத்தில் (விகிதசமத்தில்) இருக்கும். எனவே இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை.

தரவு : ΔABC, ΔDEFல்,

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ மேலும் $\angle C = \angle F$

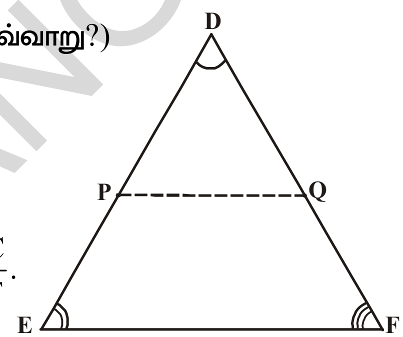
நிரூபிக்க : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$



அமைப்பு : $AB = DP$ மேலும் $AC = DQ$ என இருக்குமாறு DEமேலும் DEன் மேல் முறையே Pமேலும் Qஎன்னும் புள்ளிகளைக்குறி. P,Qஐ இணை.

நிரூபணம் : $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ஏன் ?)

இதிலிருந்து $\angle B = \angle P = \angle E$ மேலும் $PQ \parallel EF$ (எவ்வாறு?)



$\therefore \frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (ஏன் ?)

அதாவது $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ஏன் ?)

இவ்வாறே $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ எனவே $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

எனவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

மேற்கண்ட அமைப்பில் $AB = DE$ அல்லது $AB > DE$ எனில் நீ என்ன செய்வாய்?

குறிப்பு : ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்கு சமம் எனில், கோணங்களின் மொத்தம் பண்பின்படி, மூன்றாவது கோணங்களும் சமமாக இருக்கும்.

எனவே கோ.கோ.வடிவொப்புமை விதிமுறை என்பது ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்கு சமமானால் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை.

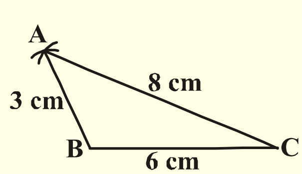
மேற்கண்ட கூற்றின் மறுதலை என்ன?

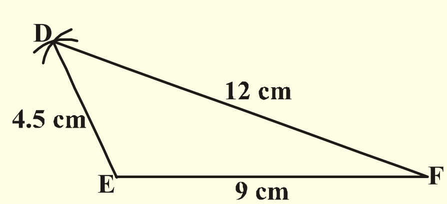
ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒத்த பக்கங்களுக்கு விகிதசமத்தில் இருந்தால் அவற்றின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் என்பது சரியா?

இதை ஒரு செயல்பாட்டின்மூலம் காணலாம்.

செயல்பாடு

$AB = 3$செ.மீ, $BC = 6$ செ.மீ, $CA = 8$ செ.மீ இருக்குமாறு ΔABCஐயும், $DE = 4.5$ செ.மீ, $EF = 9$ செ.மீ, $FD = 12$ செ.மீ இருக்குமாறு ΔDEFஐயும் வரைக.





இரண்டு முக்கோணங்களில் $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{2}{3}$.

இப்போது முக்கோணத்தின் கோணங்களை அளந்து எழுது. நீ என்ன கவனித்தாய்? ஒத்த கோணங்களைப்பற்றி உன்னால் என்ன சொல்லமுடியும்? அவை சமம். எனவே இந்த முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை. இதை மேலும் சில முக்கோணங்களின் மூலம் சரிபார்க்கலாம். மேல் கூறிய செயல்பாட்டிலிருந்து இரண்டு முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமையின் விதிமுறையை கீழ்கண்டவாறு கொடுக்கலாம்.

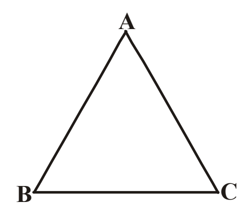
8.4.2. வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான ப.ப.ப. வடிவொப்புமை

தேற்றம்-8.4 : இரண்டு முக்கோணங்களில் ஒருமுக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒத்த பக்கங்களுக்கு விகிதசமத்தில் இருந்தால் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் மேலும் அவை இரண்டும் வடிவொத்தவை.

தரவு : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (<1) என இருக்குமாறு

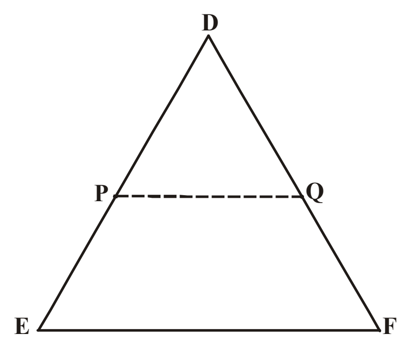
ΔABC மேலும் ΔDEF உள்ளன.

நிரூபிக்க : $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$



அமைப்பு : $AB = DP$ மேலும் $AC = DQ$ என இருக்குமாறு DE மற்றும் DFன் மேல் முறையே P மேலும் Q என்னும் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். P,Qஐ இணை.

நிரூபணம் : $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ மேலும் $PQ \parallel EF$ (ஏன் ?)



எனவே $\angle P = \angle E$ மேலும் $\angle Q = \angle F$ (ஏன் ?)

$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

எனவே $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (ஏன் ?)

எனவே $BC = PQ$ (ஏன் ?)

$\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ஏன் ?)

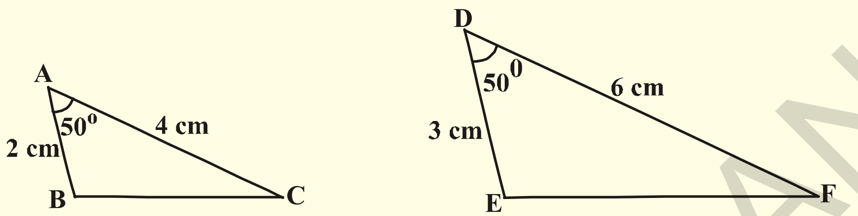
எனவே $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ (எவ்வாறு ?)

இரண்டு பலகோணங்களின் வடிவொப்புமைக்கு ஒரு நிபந்தனை மட்டும் போதாது என்பதை நாம் படித்தோம். ஆனால் முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமைக்கு இரண்டு நிபந்தனைகளும் பூர்த்தி செய்யவேண்டிய அவசியமில்லை. ஒரு நிபந்தனை மற்றொரு நிபந்தனையை குறிக்கிறது.

இப்போது ப.கோ.ப. வடிவொப்புமையை காண்போம். இதற்கு கீழ்கண்ட செயல்பாட்டை செய்வோம்.

செயல்பாடு

AB = 2 செ.மீ, $\angle A = 50^0$ AC = 4செ.மீ இருக்குமாறு ΔABCயையும், DE = 3செ.மீ, $\angle D = 50^0$, DF = 6செ.மீ இருக்குமாறு ΔDEFயையும் வரைக.



$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{2}{3}$ மேலும் $\angle A = \angle D = 50^0$.

இப்போது $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$, $\angle F$ மேலும் BC, EFஐ அளந்து எழுது.

$\angle B = \angle E$ மேலும் $\angle C = \angle F$ மேலும் $\frac{BC}{EF} = \frac{2}{3}$. என்பதை கவனி.

எனவே, இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை.

மேலும் சில வெவ்வேறு அளவுகளுடன் முக்கோணங்கள் வரைந்து செய்துபார். அவை கீழ்கண்ட முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமையை கொடுக்கிறது எனலாம்.

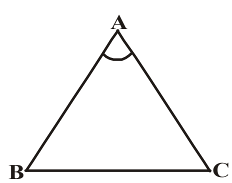
8.4.3 வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான ப.கோ.ப. வடிவொப்புமை

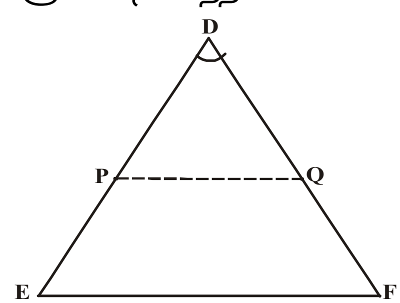
தேற்றம்-8.5 : ஒரு முக்கோணத்தின் ஒருகோணம், மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒருகோணத்திற்கு சமமானதாகவும், அந்த கோணத்தை தாங்கிய பக்கங்கள் முறையே விகிதசமத்திலும் இருந்தால் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை.

தரவு : ΔABC மற்றும் ΔDEFல்

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (<1) மேலும்

$\angle A = \angle D$





நிரூபிக்க : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

அமைப்பு : AB=DP மேலும் AC=DQ என இருக்குமாறு DE, DF பக்கங்களின் மேல் முறையே P, Q புள்ளிகளைக்குறி. P,Qஐ இணை.

நிரூபணம் : $PQ \parallel EF$ மேலும் $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (எவ்வாறு ?)

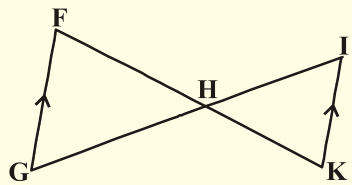
எனவே $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$, $\angle C = \angle Q$

$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ஏன் ?)

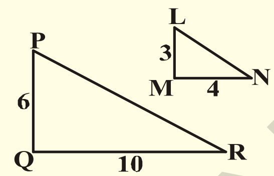
முயற்சி செய்

1. கீழ்கண்ட முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையா? வடிவொத்தவை எனில் வடிவொப்புமை விகிதமுறையை எழுது. வடிவொப்புமையை குறியீடுகளை உப்யோகித்து எழுது.

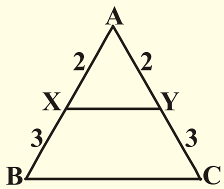
(i)



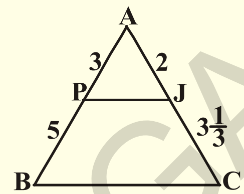
(ii)



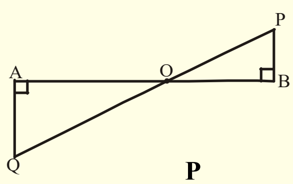
(iii)



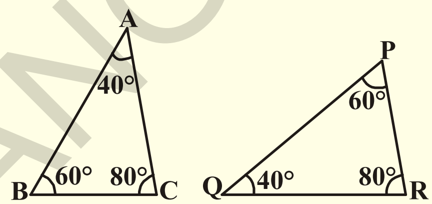
(iv)



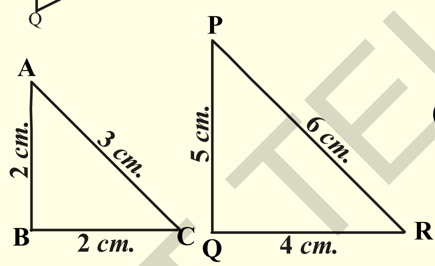
(v)



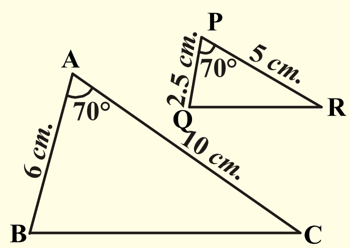
(vi)



(vii)

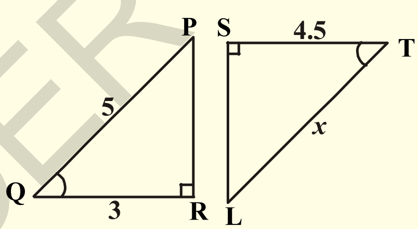


(viii)

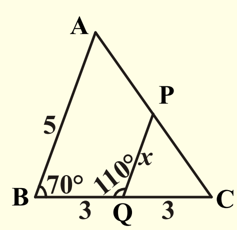


2. கீழ்கண்ட முக்கோணங்கள் ஏன் வடிவொத்தவை எனவிவரித்து xன் மதிப்பைக்காண்.

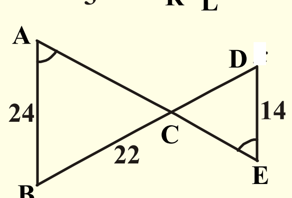
(i)



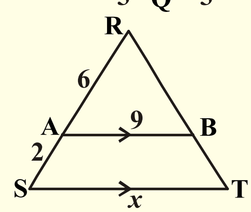
(ii)



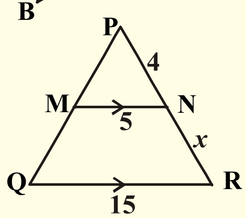
(iii)



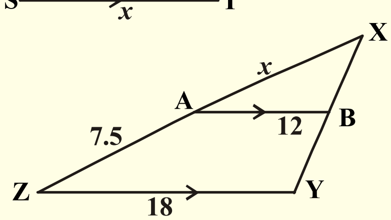
(iv)



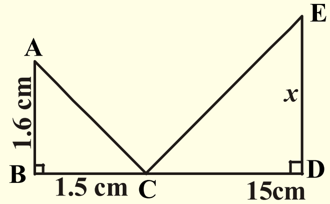
(v)



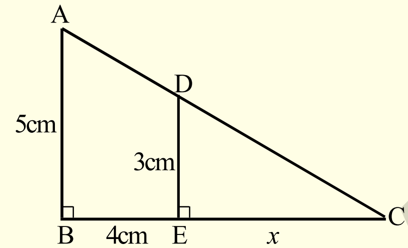
(vi)



(vii)



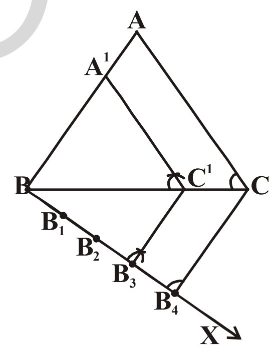
(viii)



வரைமுறை : கொடுக்கப்பட்ட அளவுதிட்டத்திற்கு கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் வடிவொத்த முக்கோணத்தை வரைக.

a) கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் ABCக்கு வடிவொத்ததாக இருப்பதும் ΔABCன் $\frac{3}{4}$ பாகம் ஒத்தபக்கங்களை உடைய முக்கோணம் வரைக.

(அளவுதிட்டம் $\frac{3}{4}$)



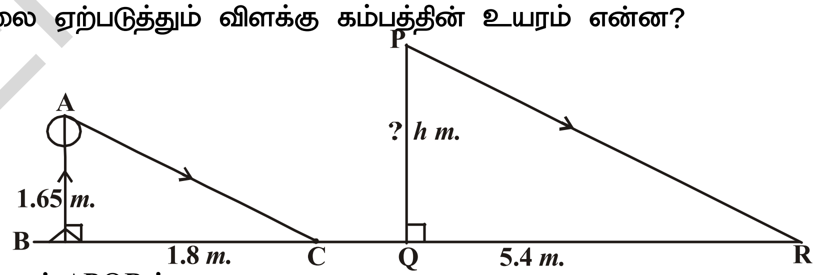
படிகள் : 1. A முனைக்கு எதிர்பக்கமாக BCயுடன் குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்தும் BX என்னும் கதிரை வரைக.

2. BXன் மேல் $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ என இருக்குமாறு B_1, B_2, B_3, B_4 என்னும் புள்ளிகளைக்குறி.

3. B_4Cஐ இணை. B_3 வழியே B_4க்கு இணையாக இருக்குமாறு ஒரு கோடு வரைக. அது BCஐ C'ல் வெட்டும்.

4. C' வழியே CAக்கு இணையாக வரைந்த கோடு BAஐ A'ல் வெட்டும். எனவே . $\Delta A'BC'$ என்பது தேவையான முக்கோணம். இந்த வடிவொப்புமையின் பயனை விளக்கும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-5. 1.65மீ உயரமுள்ள மனிதனின் நிழல் 1.8மீ. எனில் அதே நேரத்தில் 5.4மீ நிழலை ஏற்படுத்தும் விளக்கு கம்பத்தின் உயரம் என்ன?



தீர்வு : ΔABC மற்றும் ΔPQRல்

$\angle B = \angle Q = 90^0$.

$\angle C = \angle R$ (AC || PR, சூரியனின் ஒளிக்கதிர்கள் எல்லா சமயங்களிலும் இணை)

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (AA விதிமுறையின்படி)

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (வடிவொத்த முக்கோணங்களின் ஒத்தபக்கங்கள்)

$$\frac{1.65}{PQ} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$PQ = \frac{1.65 \times 5.4}{1.8} = 4.95m$$

விளக்கு கம்பத்தின் உயரம் 4.95மீ

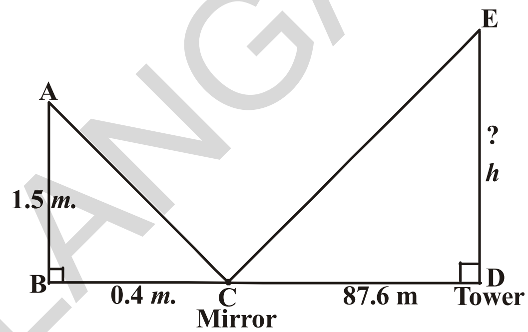
எடுத்துக்காட்டு-6. ஒரு கோபுரத்திலிருந்து 87.6மீ தூரத்தில் வைக்கப்பட்ட கண்ணாடியில் ஒருவர் கோபுரத்தின் உச்சியைப் பார்க்கிறார். கண்ணாடி நிலத்தின் மேல் வான்நோக்கி பார்க்கும்படி வைக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் அவர் கண்ணாடியிலிருந்து 0.4மீ தூரத்தில் உள்ளார். அவருடைய உயரம் 1.5மீ எனில் கோபுரத்தின் உயரத்தைக்காண்.

தீர்வு : $\Delta ABC, \Delta EDC$ல்

$\angle ABC = \angle EDC = 90°$

$\angle BCA = \angle DCE$ (படுகோணம், எதிரொளிப்புகோணம் சர்வ சமம்)

$\Delta ABC \sim \Delta EDC$ (கோ.கோ)



$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1.5}{h} = \frac{0.4}{87.6}$$

$$h = \frac{1.5 \times 87.6}{0.4} = 328.5m$$

எனவே கோபுரத்தின் உயரம் 328.5மீ

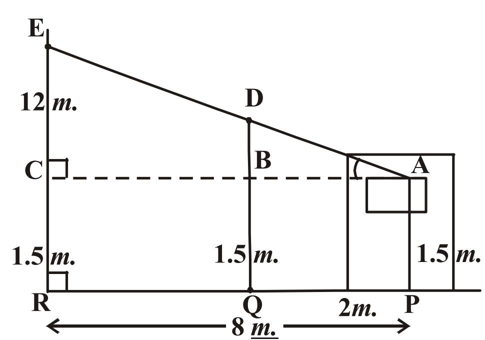
எடுத்துக்காட்டு–7. கோபால், தன்னுடைய அடுத்தவீட்டுக்காரர் அவருடைய மேல் மாடி சன்னலிலிருந்து தன் வீட்டில் உள்ளவற்றைப் பார்க்க முடிகிறது என வருந்திக்கொண்டிருக்கிறார். அதனால் மேல்மாடி சன்னலிலிருந்து தெரியாதபடி தன் வீட்டு சுற்றுச்சுவரின் உயரத்தை இன்னும் உயர்த்த முடிவுசெய்தார். சுற்றுச்சுவரின் உயரம் எவ்வளவு உயர்த்தவேண்டும்? அளவுகள் படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தீர்வு : In ΔABD & ΔACE

$\angle B = \angle C = 90°$

$\angle A = \angle A$ (பொது)

$\Delta ABD \sim \Delta ACE$ (கோ.கோ)

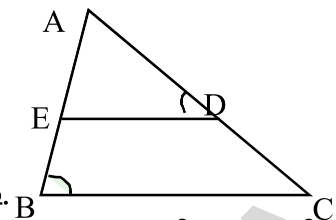


$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{BD}{12}$$

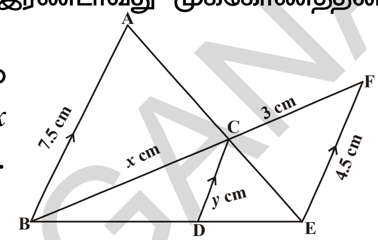
$$BD = \frac{2 \times 12}{8} = \frac{24}{8} = 3m$$

தேவையான சுவரின் உயரம் = 1.5மீ+3மீ=4.5மீ. 4.5மீ உயரம் சுவரை ஏற்றினால் அடுத்தவீட்டுக்காரரின் பார்வை விழாதபடி செய்யலாம்.

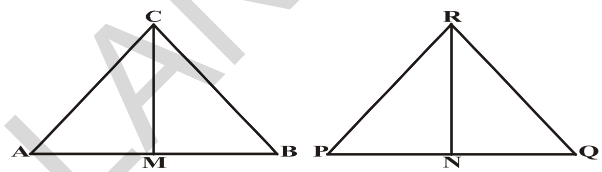
பயிற்சி - 8.2



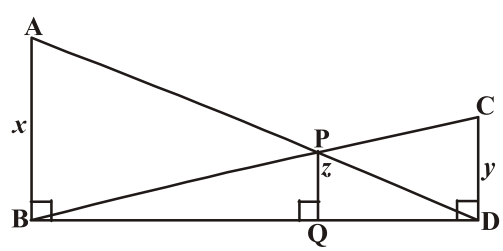
1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், $\angle ADE = \angle B$
   (i) $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ எனக் காட்டு.
   (ii) $AD = 3.8$ செ.மீ, $AE = 3.6$செ.மீ
   $BE = 2.1$ செ.மீ, $BC = 4.2$ செ.மீ எனில் DE ஐ கண்டுபிடி.
2. இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் சுற்றளவுகள் முறையே 30செ.மீ, 20செ.மீ. முதல் முக்கோணத்தின் ஒருபக்கம் 12செ.மீ எனில் இரண்டாவது முக்கோணத்தின் ஒத்தபக்கத்தின் அளவைக்கண்டுபிடி.
3. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $AB \parallel CD \parallel EF$. மேலும் $AB = 7.5$ செ.மீ,$DC = y$ செ.மீ,$EF = 4.5$ செ.மீ, $BC = x$ செ.மீ எனில் x மற்றும் y மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.



4. 90செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு சிறுமி விளக்குகம்பத்திலிருந்து 1.2மீ/வி வேகத்தில் நடந்துகொண்டு இருக்கிறாள். விளக்கு கம்பத்தின் உயரம் 3.6மீ எனில் 4விநாடிகள் கழித்து ஏற்படும் சிறுமியின் நிழலின் நீளத்தைக்காண்.
5. CM மேலும் RN என்பவை முறையே வடிவொத்த முக்கோணங்களான ΔABC மேலும் ΔPQRன் மையக்கோடுகள் எனில் கீழ்கண்டவற்றை நிரூபி.



   (i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (ii) $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ}$ (iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$
6. சரிவகம் ABCDல் $AB \parallel DC$ மூலைவிட்டங்கள் AC, BD என்பவை 'O'வில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. வடிவொத்த முக்கோணங்களின் கோட்பாடுகளை உபயோகித்து $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$ எனக்காட்டு.
7. அடுத்துள்ளபடத்தில், AB, CD, PQ என்பவை BDக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோடுகள். $AB = x$, $CD = y$, $PQ = Z$ எனில் $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ எனக்காட்டு.



8. 4மீ உயரமுள்ள ஒரு கொடிக்கம்பம் 6மீ நீளமான நிழலை ஏற்படுத்துகிறது. அதே சமயத்தில் அருகிலுள்ள ஒரு கட்டிடம் 24மீ நீளமுள்ள நிழலை ஏற்படுத்துகிறது எனில் அந்த கட்டிடத்தின் உயரம் என்ன?
9. ΔABC மற்றும் ΔFEG யில் AB மேலும் FEன் பக்கங்களின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் D மேலும் H. மேலும் $\angle ACB$, $\angle EGF$ன் கோண இருசமவெட்டிகள் முறையே CD மற்றும் GH. மேலும் $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ எனில் கீழ்கண்டவற்றை நிரூபி.
   (i) $\dfrac{CD}{GH} = \dfrac{AC}{FG}$ (ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$ (iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

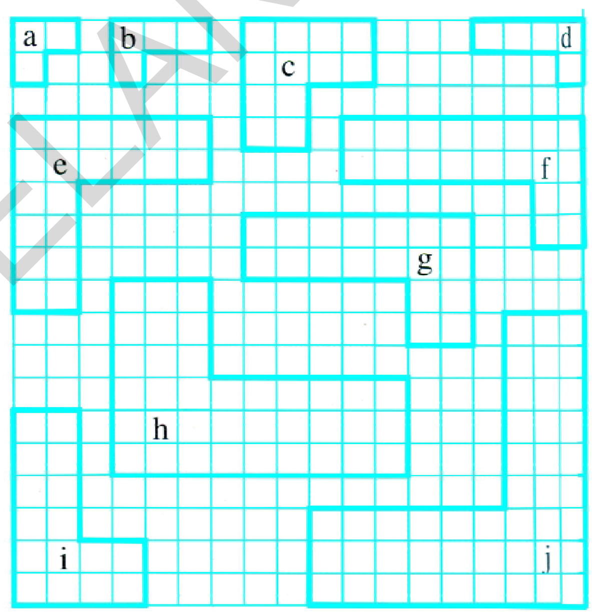
10. ΔABC மற்றும் ΔDEF என்னும் வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோடுகள் AX, DY எனில் $AX : DY = AB : DE$ என நிரூபி.

11. கொடுக்கப்பட்ட ΔABCக்கு வடிவொத்தாகவும், அதன் பக்கங்கள் $\frac{5}{3}$ மடங்கு வடிவொத்த பக்கங்களையுடைய முக்கோணத்தை வரைக.

12. 4செ.மீ, 5செ.மீ, 6செ.மீ அளவுகளையுடைய ஒரு முக்கோணம் வரைக. இதற்கு வடிவொத்ததாகவும் முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு $\frac{2}{3}$ மடங்கு வடிவொத்த பக்கங்களைஉடைய முக்கோணத்தை வரைக.

13. அடிபக்கம் 8செ.மீ மேலும் அதற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து உயரம் 4செ.மீ இருக்குமாறு ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் வரைக. இந்த முக்கோணத்திற்கு $1\frac{1}{2}$ மடங்கு ஒத்த பக்கங்களை உடையதும் கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்திற்கு வடிவொத்ததுமான மற்றொரு முக்கோணம் வரைக.

8.5 வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள்:



இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கு அவற்றின் ஒத்தபக்கங்களின் விகிதம் சமம். இந்த ஒத்தபக்கங்களின் விகிதத்திற்கும், அவற்றின் பரப்பளவுகளின் விகிதத்திற்கும் ஏதேனும் உறவு உள்ளது என நீ நினைக்கிறாயா? இதைப்புரிந்துக்கொள்ள கீழ்கண்ட செயல்பாட்டைச் செய்வோம்.

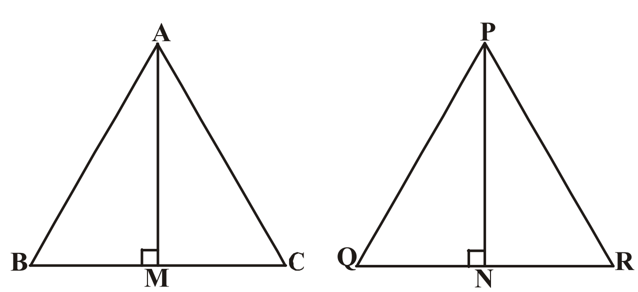
செயல்பாடு

கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் உள்ளவாறு வடிவொத்த பலகோணங்களின் அட்டவணை தயார்செய்க. அவற்றில் கீழ்கண்டவற்றை கண்டுபிடி.

(i) வடிவொத்த பக்கங்களின் விகிதம்
(ii) அவற்றின் பரப்பளவுகளின் விகிதம்.

அவற்றின் வடிவொத்த பக்கங்களின் வர்க்கங்ளுக்கு சமம் என நீ கவனித்திருப்பாய், இதை தேற்றத்தின் மூலம் நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம்-8.6 : இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்புகளின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்தபக்கங்களின் விகிதங்களின் வர்க்கங்களுக்கு சமம்.



தரவு : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

நிரூபிக்க : $\dfrac{\Delta ABC\text{ன் பரப்பு}}{\Delta PQR\text{ன் பரப்பு}} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{CA}{RP}\right)^2$.

அமைப்பு : $AM \perp BC$ மேலும் $PN \perp QR$ வரைக.

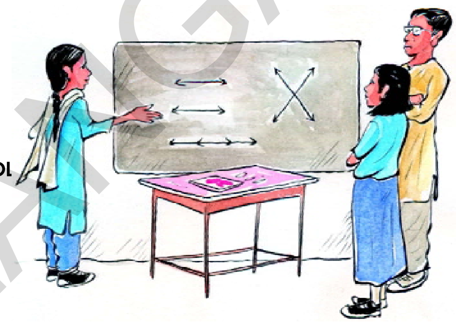
நிரூபணம் : $$\frac{\Delta ABC\text{ன் பரப்பு}}{\Delta PQR\text{ன் பரப்பு}} = \frac{\frac{1}{2}\times BC \times AM}{\frac{1}{2}\times QR\times PN} = \frac{BC\times AM}{QR\times PN} \qquad ...(1)$$

ΔABM & ΔPQN

$\angle B = \angle Q$ ($\because \Delta ABC \sim \Delta PQR$)

$\angle M = \angle N = 90^0$

$\therefore \Delta ABM \sim \Delta PQN$ (கோ.கோ.வடிவொமை



$$\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ} \qquad ...(2)$$

Also $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (தரவு)

$$\boxed{\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}} = \frac{AC}{PR} \qquad ...(3)$$

$$\therefore \frac{\Delta ABC\text{ன் பரப்பு}}{\Delta PQR\text{ன் பரப்பு}} = \frac{AB}{PQ}\times\frac{AB}{PQ}$$ (1) , (2) மற்றும் (3) லிருந்து

$$= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2.$$

(3)ஐ உபயோகித்து,

$\dfrac{\Delta ABC\text{ன் பரப்பு}}{\Delta PQR\text{ன் பரப்பு}} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{AC}{PR}\right)^2$ என்பதை பெறலாம்.

எனவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

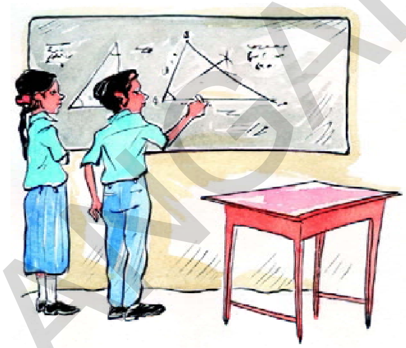
இப்போது சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-8. இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் சமம் எனில் அவை சர்வசமம் எனநிரூபி.

தீர்வு : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

எனவே $\dfrac{\Delta ABC\text{ன் பரப்பு}}{\Delta PQR\text{ன் பரப்பு}} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{AC}{PR}\right)^2$

ஆனால் $\dfrac{\Delta ABC\text{ன் பரப்பு}}{\Delta PQR\text{ன் பரப்பு}} = 1$ ($\because$ பரப்பளவுகள் சமம்)



$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2 = 1$$

எனவே $AB^2 = PQ^2$

$BC^2 = QR^2$

$AC^2 = PR^2$

இதிலிருந்து $AB = PQ$

$BC = QR$

$AC = PR$

$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (SSS சர்வசமத்தின்படி)

எடுத்துக்காட்டு-9. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ மேலும் அவற்றின் பரப்பளவுகள் முறையை 64செ.மீ^{2} மேலும் 121செ.மீ^{2}. $EF = 15.4$செ.மீ எனில் BCஐக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $\dfrac{\Delta ABC\text{ன் பரப்பு}}{\Delta PQR\text{ன் பரப்பு}} = \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2$

$$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

$$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4} \Rightarrow BC = \frac{8 \times 15.4}{11} = 11.2\text{cm}.$$

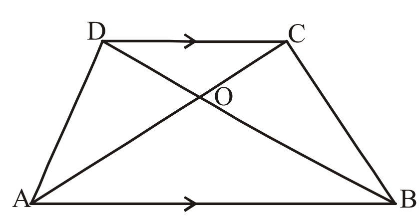
எடுத்துக்காட்டு-10. சரிவகம் ABCDல் $AB \parallel DC$. மேலும் அவற்றின் மூலைவிட்டங்கள் 'O' என்னும் புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. $AB = 2CD$ எனில் ΔAOB, ΔCODன் பரப்புகளின் விகிதத்தைகாண்.

தீர்வு : சரிவகம் ABCDல், $AB \parallel DC$ மேலும் $AB = 2CD$.

ΔAOB, ΔCOD

$\angle AOB = \angle COD$ (குத்தெதிர்கோணங்கள்)

$\angle OAB = \angle OCD$ (ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்)



$\Delta AOB \sim \Delta COD$ (கோ.கோ. கோட்பாடு)

$$\frac{\triangle ABC\text{ன் பரப்பு}}{\triangle PQR\text{ன் பரப்பு}} = \frac{AB^2}{DC^2}$$

$$= \frac{(2DC)^2}{(DC)^2} = \frac{4}{1}$$

$\therefore$ ΔAOBன் பரப்பு : ΔCODன் பரப்பு $= 4 : 1$.

பயிற்சி - 8.3

1. ΔABCல் BC, CA, AB பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகள் முறையே D, E, F எனில் ΔABC, ΔDEFன் பரப்பளவுகளின் விகிதத்தை கண்டுபிடி.

2. ΔABCல், $XY \parallel AC$ மேலும் XY என்பது அந்த முக்கோணத்தை இரண்டு சமமான பரப்பளவுகளைக் கொண்ட பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது. எனில் $\frac{AX}{XB}$ன் விகிதத்தைக் கண்டுபிடி.

3. இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் அவற்றிற்கு வடிவொத்த மையக்கோடுகளின் விகிதத்தின் வர்க்கத்திற்கு சமம் எனக்காட்டு.

4. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. $BC = 3$செ.மீ $EF = 4$செ.மீ ΔABCன் பரப்பு 54செ.மீ^{2} எனில் ΔDEFன் பரப்பளவைக்காண்.

5. ΔABCல் PQ எனும் கோடு ABபக்கத்தை Pயிலும், ACஐ Qவிலும் சந்திக்கிறது. மேலும் $AP = 1$செ.மீ, $BP = 3$செ.மீ, $AQ = 1.5$ செ.மீ மேலும் $CQ = 4.5$செ.மீ எனில் ΔAPQன் பரப்பளவு $= \frac{1}{16}\Delta ABC$ன் பரப்பு எனக்காட்டு.

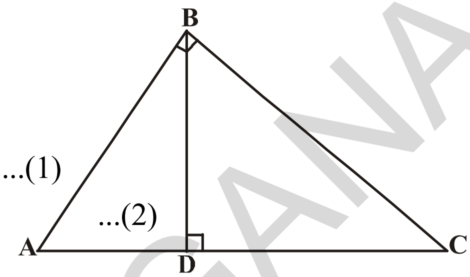
6. இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் முறையே 81செ.மீ^{2} மேலும் 49செ.மீ^{2}, பெரிய முக்கோணத்தில் வரையப்பட்ட உயரம் 4.5செ.மீ எனில் சிறிய முக்கோணத்தில் வரையப்பட்ட அதன் வடிவொத்த உயரத்தைக் காண்.

8.6 பிதாகரஸ் தேற்றம் (Pythagoras Theorem)

பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப்பற்றி உங்களுக்கு நன்றாகத் தெரியும். இதை சில செயல்பாடுகள் மூலம் சரிபார்த்திருக்கிறீர்கள். வடிவொத்த முக்கோணங்களின் விதிமுறைகளை உபயோகித்து இதை இப்போது நிரூபிக்கலாம். அதற்கு நாம் கீழ்கண்ட முடிவுகளை உபயோகித்துக் கொள்ளலாம்.

தேற்றம்-8.7 : ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் செங்கோணத்தை உடைய உச்சியிலிருந்து கர்ணத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோடு, அந்த செங்குத்து கோட்டின் இருபுறமும் ஏற்படும் முக்கோணங்கள், கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்திற்கு வடிவெத்தவை மேலும் அவை ஒன்றுக்கொன்றும் வடிவொத்தவை.

நிரூபணம் : ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம். B என்பது செங்கோணத்தைக் கொண்ட உச்சி BD என்பது Bயிலிருந்து கர்ணம் ACக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோடு.



$\Delta ADB, \Delta ABC$ல்

$\angle A = \angle A$

மேலும் $\angle ADB = \angle ABC$ (ஏன் ?)

எனவே $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (எவ்வாறு ?) ...(1)

இவ்வாறே, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (எவ்வாறு ?) ...(2)

எனவே (1), (2) லிருந்து செங்குத்துகோடு BDக்கு இருபக்கமும் உள்ள இரண்டு முக்கோணங்களும் ABCக்கு வடிவொத்தவை.

மேலும் $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$

எனவே $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

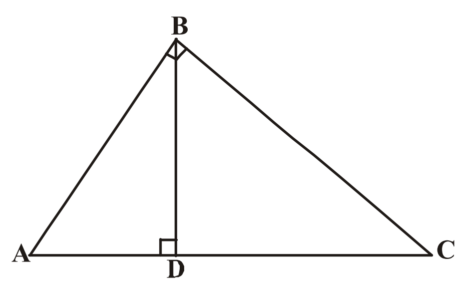
இது கீழ்கண்ட தேற்றத்திற்கு வழிவகுக்கிறது.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் மூன்று பக்கங்களின் அளவுகள் முழுக்களாக இருந்தால் அவற்றில் ஒன்று இரட்டைஎண் ஆகும். ஏன்? உன் நண்பர்களுடனும் ஆசிரியருடன் கலந்துரையாடு.

8.6.1 பிதாகரஸ் தேற்றம் (பௌதானய தேற்றம்) (BAUDHAYAN THEOREM)

தேற்றம்-8.8 : ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் வர்க்கம், மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் மொத்தத்திற்கு சமம்.



தரவு : செங்கோண முக்கோணம் ΔABCல்,

செங்கோணத்தைக் கொண்ட உச்சிB.

நிரூபிக்க : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

அமைப்பு : $BD \perp AC$ வரைக.

நிரூபணம் : $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \quad \text{(பக்கங்களின் விகிதசமத்தில் இருக்கும்)}$$

$$AD \cdot AC = AB^2 \quad ...(1)$$

மேலும், $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

$CD \cdot AC = BC^2$ ...(2)

(1), (2)ஐ கூட்ட,

$AD \cdot AC + CD \cdot AC = AB^2 + BC^2$

$AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

$AC \cdot AC = AB^2 + BC^2$

$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$$

மேலே கொடுக்கப்பட்ட தேற்றம் பழங்கால இந்திய கணித மேதை பௌதாயனன் (கி.மீ.800) என்பவரால் கீழே கொடுக்கப்பட்ட வடிவத்தில் உள்ளது.

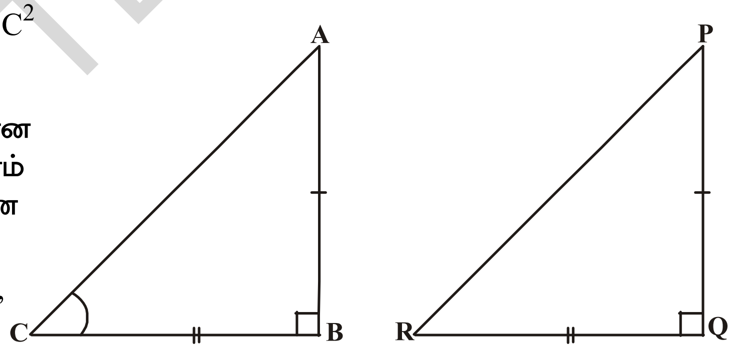
ஒரு செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டம் அதனால் ஏற்படும் பரப்பளவு அதன் இரண்டு பக்கங்கள் (அதாவது நீளம், அகலம்) ஆகியவற்றால் ஏற்படும் பரப்பளவுகளின் மொத்தத்திற்கும் சமம். இதையே நாம் பௌதாயன தேற்றம் என்று கூறுகிறோம்.

தேற்றம்-8.9 : ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கம், மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் மொத்தத்திற்கு சமமானால் முதல் பக்கத்திற்கு எதிரிலுள்ள கோணம் செங்கோணம் மேலும் அது ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

தரவு : ΔABCல் $AC^2 = AB^2 + BC^2$

நிரூபிக்க : $\angle B = 90^0$.

அமைப்பு : $PQ = AB$, $QR = BC$என இருக்குமாறு Qல் செங்கோணம் ஏற்படுமாறு ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கவும்.



நிரூபணம் : ΔPQRல், $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (பிதாகரஸ் தேற்றம், $\angle Q = 90^0$)

$PR^2 = AB^2 + BC^2$ (அமைப்பின்படி) ...(1)

ஆனால் $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (கொடுக்கப்பட்டது) ...(2)

$\therefore$ $AC = PR$ [(1), (2)லிருந்து]

இப்போது ΔABC, ΔPQRல்

$AB = PQ$ (அமைப்பின்படி)

$BC = QR$ (அமைப்பின்படி)

$AC = PR$ (நிரூபிக்கப்பட்டது)

$\therefore \ \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (ப.ப.ப. சர்வசமத்தின்படி)

$\therefore \ \angle B = \angle Q$ (வடிவொத்த முக்கோணங்களின் ஒத்த பாகங்கள்)

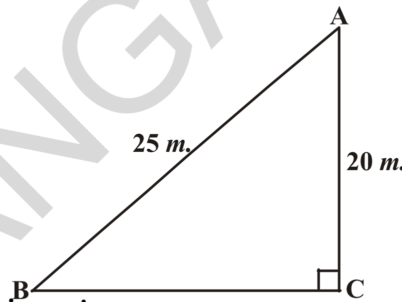
ஆனால் $\angle Q = 90°$ (அமைப்பின்படி)

$\therefore \ \angle B = 90°$.

எனவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு-11. 25மீ நீளமுள்ள ஒரு ஏணி சுவரின் மேல் 20மீ உயரத்தில் உள்ள ஒரு சன்னலை தொடுகிறது எனில் அந்த ஏணியின் அடி சுவரிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது?

தீர்வு : ΔABCல், $\angle C = 90°$



$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$ (பிதாகரஸ் தேற்றம்)

$25^2 = 20^2 + BC^2$

$BC^2 = 625 - 400 = 225$

$BC = \sqrt{225} = 15m$

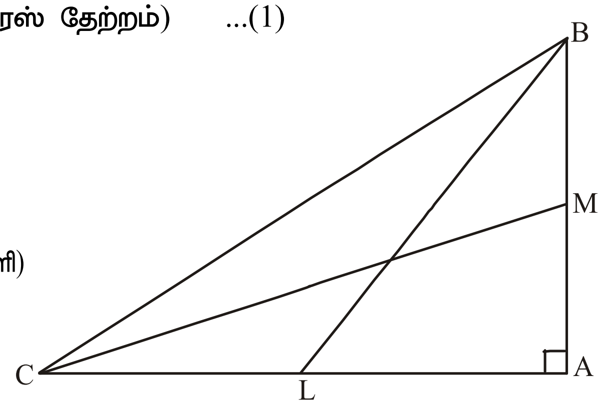
எனவே ஏணியின் அடி சுவரிலிருந்து 15மீ தூரத்தில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு-12. செங்கோண முக்கோணம் ABCல் உச்சி Aல் செங்கோணம் உள்ளது. BL மற்றும் CMஎன்பவை அவற்றின் மையக்கோடுகள் எனில் $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$ என நிரூபி.

தீர்வு : ΔABCல் $\angle A = 90°$.

BL, CM என்பவை மையக்கோடுகள்

ΔABC ல் $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (பிதாகரஸ் தேற்றம்) ...(1)



ΔABLல், $BL^2 = AL^2 + AB^2$

ஆனால் $BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$

($\because$ ஏனெனில் L என்பது ACன் மையப்புள்ளி)

$$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$$

$\therefore \ 4BL^2 = AC^2 + 4AB^2$ ...(2)

ΔCMAல், $CM^2 = AC^2 + AM^2$

$$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$ ($\because$ ABன் மையப்புள்ளி M)

$$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

$$4CM^2 = 4AC^2 + AB^2 \qquad ...(3)$$

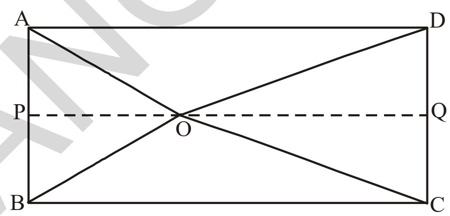
(2), (3)ஐக் கூட்ட,

$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

$$\therefore\ 4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2 \quad (1\text{லிருந்து}).$$

எடுத்துக்காட்டு-13. செவ்வகம் ABCDல் 'O' என்பது செவ்வகத்திற்குள் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$ என நிரூபி.

தீர்வு : 'O' வழியே P என்பது ABன் மேலும் Q என்பது DCன் மேலும் உள்ளவாறு $PQ \parallel BC$ஐ வரை.



இப்போது $PQ \parallel BC$

$\therefore\ PQ \perp AB$ & $PQ \perp DC$ $(\because \angle B = \angle C = 90°)$

எனவே, $\angle BPQ = 90°$ & $\angle CQP = 90°$

$\therefore$ BPQC, APQD என்பவை இரண்டு செவ்வகங்கள்.

ΔOPBயிலிருந்து. $OB^2 = BP^2 + OP^2 \quad ...(1)$

இவ்வாறே ΔOQD யிலிருந்து $OD^2 = OQ^2 + DQ^2 \quad ...(2)$

ΔOQC யிலிருந்து $OC^2 = OQ^2 + CQ^2 \quad ...(3)$

மேலும் ΔOAPலிருந்து, $OA^2 = AP^2 + OP^2 \quad ...(4)$

(1), (2)ஐக்கூட்ட

$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$

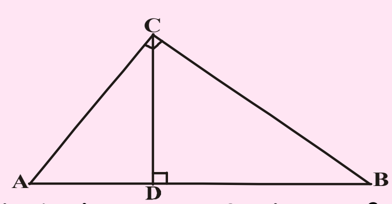
$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2 \qquad (\because BP = CQ,\ DQ = AP)$$

$$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$$

$$= OC^2 + OA^2 \ ((3), (4)\text{லிருந்து})$$

இதை செய்

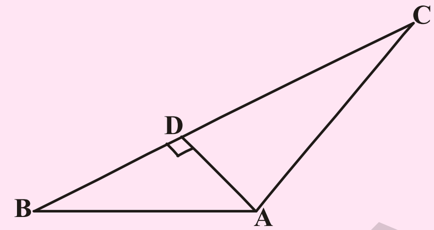
1. ΔACBல் $\angle C = 90^0$ மேலும் $CD \perp AB$, எனில்



$\dfrac{BC^2}{AC^2} = \dfrac{BD}{AD}$. என நிரூபி.

2. 15மீ நீளமுள்ள ஓர் ஏணி சாலையின் ஒரு பக்கத்தில் தரையிலிருந்து 9மீ உயரத்திலுள்ள சன்னலைத் தொடுமாறு வைக்கப்படுகிறது. ஏணியின் அடியை நகர்த்தாமல் சாலையின் மறுபக்கத்தில் 12மீ உயரத்திலுள்ள சன்னலைத் தொடுமாறு மாற்றிவைக்கப்படுகிறது. சாலையின் நீளத்தைக்கண்டுபிடி.

3. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $AD \perp BC$ எனில் $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ என நிரூபி.



எடுத்துக்காட்டு-14. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணம், அதன் சிறிய பக்கத்தின் இருமடங்கைவிட 6மீ அதிகம், மூன்றாவது பக்கம் கர்ணத்தைவிட 2மீ குறைவு எனில் அந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : மிகச்சிறிய பக்கம் xமீ என்க.

கர்ணம் $= (2x + 6)$மீ, மேலும் மூன்றாவது பக்கம் $= (2x + 4)$மீ.

பைதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி

$$(2x + 6)^2 = x^2 + (2x + 4)^2$$

$$4x^2 + 24x + 36 = x^2 + 4x^2 + 16x + 16$$

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$(x - 10)(x + 2) = 0$$

$$x = 10 \text{ or } x = -2$$

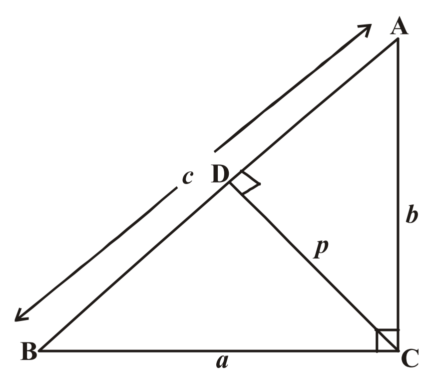
x என்பது முக்கோணத்தின் பக்கம் எனவே குறை எண்ணாக இருக்கமுடியாது.

$\therefore x = 10$

எனவே, முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 10மீ, 26மீ மற்றும் 24மீ.

எடுத்துக்காட்டு-15. செங்கோண முக்கோணம் ABCல், செங்கோணம் Cல் உள்ளது. $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ என்க. மேலும் P என்பது Cயிலிருந்து ABக்கு வரையப்பட்ட உயரத்தின் நீளம் எனில் (i) $pc = ab$ (ii) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ என நிரூபி.

தீர்வு : (i) $CD \perp AB$ மேலும் $CD = p$.



ΔABCன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times AB \times CD$

$$= \frac{1}{2} cp.$$

இவ்வாறே ΔABCன் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times BC \times AC$

$$= \frac{1}{2} ab$$

$$\frac{1}{2}cp = \frac{1}{2}ab$$

$$cp = ab \qquad ...(1)$$

(ii) ΔABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம் மேலும் $\angle C$ஒரு செங்கோணம்.

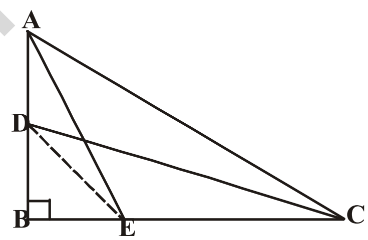
எனவே $AB^2 = BC^2 + AC^2$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

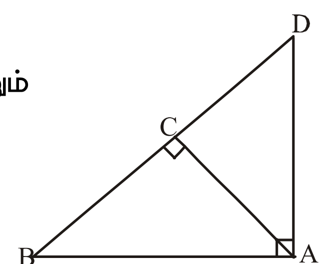
$$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

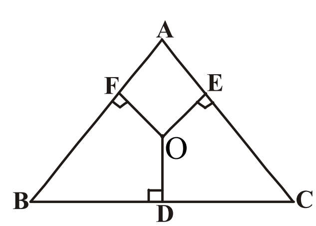
பயிற்சி - 8.4



1. ஒரு சாய்சதுரத்தில் பக்கங்களின் வர்கங்களின் மொத்தம், அதன் கர்ணங்களின் வர்கங்களின் மொத்தத்திற்கு சம் எனநிரூபி.
2. செங்கோண முக்கோணம் ABCல் செங்கோணத்தை உடைய உச்சி B. D மேலும் E என்னும் புள்ளிகள் முறையே AB, BCமேல் உள்ளன என்க. $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$ எனநிரூபி.
3. ஒருசமபக்க முக்கோணத்தில் ஏதேனும் ஒருபக்கத்தின் வர்கத்தின் 3மடங்கு அதன் உயரத்தின் வர்கத்தின் 4மடங்கிற்கு சமம் என நிரூபி.
4. PQR என்னும் முக்கோணத்தில் செங்கோணம் Pல் உள்ளது. $PM \perp QR$ என இருக்குமாறு QRன் மேல் Mஎன்னும் புள்ளி உள்ளது. எனில் $PM^2 = QM \cdot MR$ எனக்காட்டு.
5. முக்கோணம் ABDல் செங்கோணம் Aல் உள்ளது மேலும் $AC \perp BD$ எனில் (i) $AB^2 = BC.BD$.
   (ii) $AC^2 = BC.DC$
   (iii) $AD^2 = BD.CD$ என நிரூபி.



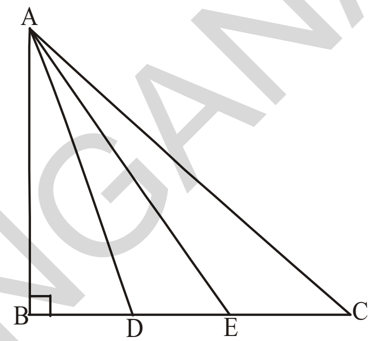
6. ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் ABCல் செங்கோணம் Cல் உள்ளது எனில் $AB^2 = 2AC^2$ எனக்காட்டு.
7. முக்கோணம் ABC ல் உட்புறமாக உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி 'O' $OD \perp BC, OE \perp AC, OF \perp AB$,
   (i) $OA^2+OB^2+OC^2-OD^2-OE^2-OF^2 = AF^2+BD^2+CE^2$
   (ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$.



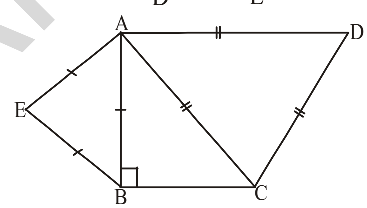
8. 18மீ உயரமுள்ள ஒரு கம்பத்திற்கு 24மீ நீளமுள்ள கம்பியின் ஒரு முனை கட்டப்பட்டுள்ளது. கம்பியின் மற்றொரு முனை துளைஅடித்து தரையில் கட்டப்பட வேண்டும். அந்த முனை கம்பத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரம் சென்றால் அந்த கம்பி இறுக்கமாக இருக்கும்?

9. தரையின் மேல் 6மீ, 11மீ உயரமுள்ள இரண்டு கம்பங்கள் உள்ளன. அந்த கம்பங்களின் அடிகளுக்கு இடைப்பட்டதூரம் 12மீ எனில் அந்த இரண்டு கம்பங்களின் உச்சிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

10. சமபக்கமுக்கோணம் ABC, $BC = \frac{1}{3}BC$ என இருக்குமாறு Dஎன்பது BCன்மேல் உள்ள ஒருபுள்ளி எனில், $9AD^2 = 7AB^2$என நிரூபி.



11. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் முக்கோணம் ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம். மேலும் Bல் செங்கோணம் உள்ளது. D, Eஎன்னும் புள்ளிகள் BCஐ மூன்றுசமபாகங்களாகப் பிரிக்கிறது எனில் $8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$எனநிரூபி.



12. ஓர்இருசமபக்க முக்கோணம் ABCல், Bல் செங்கோணம் உள்ளது. AC, ABன் மேல் சமபக்க முக்கோணங்கள் ACD, ABEஆகியவை வரையப்பட்டுள்ளன. ΔABE, ΔACDன் பரப்பளவுகளின் விகிதத்தைக்கண்டுபிடி.

13. ஒருசெங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் மேல் சமபக்க முக்கோணங்கள் வரையப்பட்டன. கர்ணத்தின் மேல் வரையப்பட்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு, மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் மேல் வரையப்பட்ட முக்கோணங்களின் பரப்புகளின் மொத்தத்திற்கு சமம் எனக்காட்டு.

14. ஒரு சதுரத்தின் பக்கத்தின் மேல் வரையப்பட்ட சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு, அந்த சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் மேல் வரையப்பட்ட சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவில் பாதி எனக்காட்டு.

8.7 தேற்றங்களின் கூற்றுகளின் வெவ்வேறு வழவங்கள்

1. கூற்றின் எதிர்மறை :

கொடுக்கப்பட்ட கூற்றிற்கு “அல்ல” என்பதைச் சேர்ப்பதால் புதியகூற்று உருவாகிறது. இதையே கூற்றின் எதிர்மறை எனப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக “ΔABC ஒரு சமபக்கமுக்கோணம்” என்னும் கூற்றை எடுத்துக்கொள்வோம். இதை “p”என குறித்து அதை இவ்வாறு எழுதலாம்.

p : ΔABCஒரு சமபக்க முக்கோணம். அதன் எதிர்மறை “ΔABCஒரு சமபக்க முக்கோணம் அல்ல” p ன் எதிர்மறை கூற்று $\sim p$என்னும் கூற்று, p என்னும் கூற்றிற்கு எதிர்மறையாக உள்ளது. கூற்றுகளின் எதிர்மறையை எழுதும்போது மிகவும் கவனமாக எழுதவேண்டும். எவ்வித குழப்பமும் இருக்கக்கூடாது.

p: எல்லாவிகிதமுறா எண்களும் மெய்யெண்கள். இதனுடைய எதிர்மறையை கீழ்கண்ட விதங்களில் எழுதலாம்.

i) $\sim p$: எல்லாவிகிதமுறா எண்களும் மெய்யெண்கள் அல்ல.

ii) $\sim p$: விகிதமுறா எண்கள் அல்லாதவை மெய்யெண்கள்.

இதில் எந்த எதிர்மறை சரியானது? பின்வரும் நிபந்தனையை எடுத்துக்கொள்வோம். p ஒரு கூற்று எனில் $\sim p$என்பது அதன் எதிர்மறை. pஎன்பது மெய்யானது எனில் $\sim p$ என்பது மெய்யற்றது. $\sim p$ என்பது மெய்யெனில் p என்பது மெய்யற்றது.

எடுத்துக்காட்டாக s : $2 + 2 = 4$ என்பது மெய்

$\sim s$: $2 + 2 \neq 4$ என்பது மெய்யல்ல

2. ஒரு கூற்றின் மறுதலை : (Converse)

ஒரு வாக்கியம் மெய் அல்லது மெய்யற்றது எனில் அதை சாதாரண கூற்று என்கிறோம். இரண்டு சாதாரண கூற்றுகளை சேர்த்தால் நமக்கு கலவை கூற்று கிடைக்கிறது. இரண்டு சாதாரண கூற்றுகளை எனில் அப்போது என்னும் இணைப்புச் சொல்லால் இணைத்தால் அது ஒருவழிசுட்டு அல்லது நிபந்தனைகூற்று எனப்படுகிறது.

இரண்டு கூற்றுகள் p, q எனில் அப்போது என்னும் சொல்லால் இணைத்தால் p ஒருவழிசுட்டு q என்றாகிறது. இதை $p \Rightarrow q$எனக் குறிக்கிறோம். p,qஐ மாற்றினால் $q \Rightarrow p$ என்றாகிறது. இதுவே மறுதலை எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு : $p \Rightarrow q$: ΔABCல், AB = AC எனில், அப்போது $\angle C = \angle B$

மறுதலை $q \Rightarrow p$: ΔABC,ல் $\angle C = \angle B$ எனில், அப்போது AB = AC

3. முரண்பாட்டின் மூலம் நிரூபித்தல் :

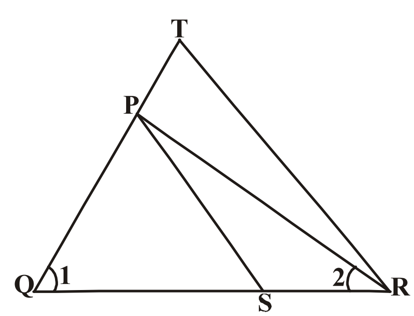
முரண்பாட்டில் நிரூபிக்க, நாம் கூற்றின் எதிர்மாறியை மெய்யென்று எடுத்துக்கொண்டு நிரூபிக்கிறோம். இந்த முறையில் ஏதேனும் ஓர் இடத்தில் அது முரண்பாடாகிறது. நாம் தவறாக எடுத்துக்கொண்டதால் இந்த முரண்பாடு ஏற்படுகிறது. எனவே கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுமெய் என முடிவெடுக்கிறோம்.

விருப்ப பயிற்சி (தேர்வுக்குரிய வினாக்கள் அல்ல)

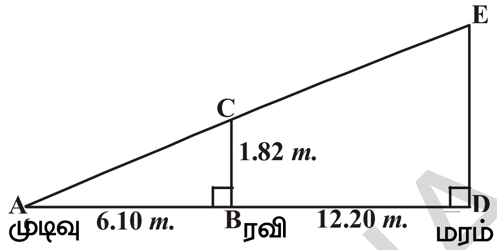
1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில்

$$\frac{QT}{PR} = \frac{QR}{QS} \text{ மேலும் } \angle 1 = \angle 2$$

$\Delta PQS \sim \Delta TQR$ என நிரூபி.



2. ரவியின் உயரம் 1.82மீ. அவன் வீட்டு தோட்டத்தில் ஒரு மரத்தின் உயரத்தை தெரிந்துகொள்ள நினைத்தான். மரத்தின் அடியிலிருந்து 12.20மீ தூரம் மரத்தின் நிழலின் வழியே அவன் நிழலும், மரத்தின் நிழலும் ஒன்றன் மேல் ஒன்று விழுகிறது. இப்போது அவன் மரத்தின் நிழலிலிருந்து 6.10மீ தூரத்தில் நின்றுகொண்டிருந்தால் அந்த மரத்தின் உயரம் என்ன?

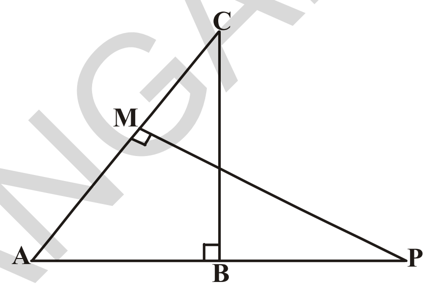


3. இணைகரம் ABCDல் ABன் மேல் ஏதேனும் ஒருபுள்ளி P உள்ளது. மூலைவிட்டம் AC என்பது DPஐ Qல் வெட்டுகிறது எனில், $CQ \times PQ = QA \times QD$ என நிரூபி.

4. ΔABC மேலும் ΔAMP ஆகியவை இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்கள் இவற்றில் செங்கோணங்கள் முறையே B மேலும் Mல் உள்ளன எனில்

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\dfrac{CA}{PA} = \dfrac{BC}{MP}$ என நிரூபி.



5. ஒரு விமானம், விமான நிலையத்திலிருந்து மணிக்கு 1000கி.மீ வேகத்தில் வடக்குநோக்கி பிரயாணம் செய்கிறது. அதே சமயத்தில் மற்றொரு விமானம் அங்கிருந்து மணிக்கு 1200கி.மீ வேகத்தில் மேற்காகச் செல்கிறது. $1\frac{1}{2}$ மணிநேரம் கழித்து இரண்டு விமானங்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் என்ன?

6. செங்கோண முக்கோணம் ABCல் செங்கோணம் Cல் உள்ளது. P மேலும் Qஎன்பவை முறையே AC மேலும் CBன் மேலுள்ள புள்ளிகள். மேலும் இவை அந்த பக்கங்களை 2:1 விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனில்.

(i) $9AQ^2 = 9AC^2 + 4BC^2$

(ii) $9BP^2 = 9BC^2 + 4AC^2$

(iii) $9(AQ^2 + BP^2) = 13AB^2$ என நிரூபி.

செயல்திட்டம்

கூற்றை நிரூபி.

- ஒரு மரம்/கோபுரம்/கோயிலின் உயரத்தை வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பண்புகளை பயன்படுத்தி காண்க. வடிவொத்த முக்கோணங்கள் பாட அறிமுகத்தில் விவாதிக்கப்பட்ட வழிமுறையை பயன்படுத்து.

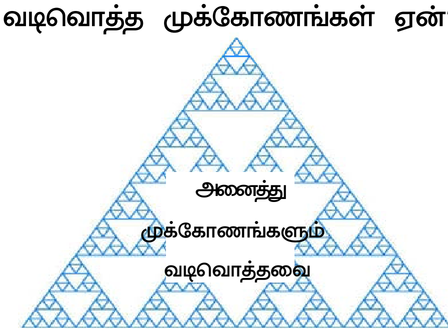
நாம் கற்றவை

1. இரண்டு படங்கள் ஒரே வடிவத்துடன் இருந்து ஒரே அளவைக் கொண்டிராத படங்கள் வடிவொத்தபடங்கள்.
2. எல்லா சர்வசம படங்களும் வடிவொத்தவை ஆனால் அதன் மறுதலை மெய்யல்ல.

3. ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள பக்கங்களைக் கொண்ட இரண்டு பலகோணங்கள் வடிவொத்தவையாக இருக்கவேண்டுமானால்.
   (i) அவற்றின் ஒத்தகோணங்கள் சமம்
   (ii) ஒத்த பக்கங்கள் ஒரே விகிதத்தில் இருக்க வேண்டும் (விகிதசமம்), பலகோணங்கள் வடிவொத்தவையாக இருக்க மேற்காணும் இரண்டில் ஒன்று மட்டும் போதுமானது என கருதக்கூடாது.
4. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒருபக்கத்திற்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோடு மற்ற இரண்டு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் இருக்கும்படி பிரிக்கிறது.
5. ஒரு முக்கோணத்தில் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களை ஒரேவிகிதத்தில் பிரிக்கும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும்.
6. இரண்டு முக்கோணங்களின் கோணங்கள் சமம் எனில் அவற்றின் ஒத்தபக்கங்களின் விகிதங்கள் சமம்.
7. ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்கு சமம் எனில் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை.
8. இரண்டு முக்கோணங்களில் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு விகிதசமத்தில் இருந்தால் அவற்றின் ஒத்கோணங்கள் சமம். மேலும் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை (ப.ப.ப. வடிவொப்புமை)
9. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒருகோணம், மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்திற்கு சமமாகவும், அந்த கோணத்தை தாங்கிய பக்கங்கள் விகிதசமத்தில் இருந்தால் அந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை (ப.கோ.ப. வடிவொப்புமை)
10. இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் ஒத்தபக்கங்களின் வர்கங்களின் விகிதத்திற்குசமம்.
11. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் செங்கோணத்தை உடைய உச்சியிலிருந்து கர்ணத்திற்கு செங்குத்துக்கோடு வரைந்தால், அந்த செங்குத்து கோட்டிற்கு இருபுறமும் ஏற்பட்ட முக்கோணங்கள், கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்திற்கு வடிவொத்தவை. மேலும் அவை ஒன்றுக்கொன்று வடிவொத்தவை.
12. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் வர்கம் மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் மொத்தத்திற்குச்சமம்.
13. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் மொத்தத்திற்கு சமமானால் முதல் பக்கத்திற்கு எதிரேயுள்ள கோணம் செங்கோணம் மற்றும் அது ஒரு செங்கோணமுக்கோணம்.

மூளைக்கு வேலை : (Puzzle)

ஒரு முக்கோணத்தை வரைக. அந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்தால் 4 முக்கோணங்கள் ஏற்படும். மறுபடியும் அவற்றின் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்தால் வடிவொத்த முக்கோணங்கள ஏற்படும். இதை அவ்வாறே செய்துகொண்டேபோனால் ஏற்படும் எல்லா முக்கோணங்களும் வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ஏன்? உங்கள் நண்பர்களுடன் கலந்துரையாடு.



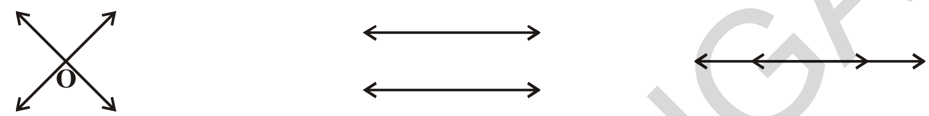
அத்தியாயம்

9 வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் மற்றும் வெட்டும் கோடுகள்

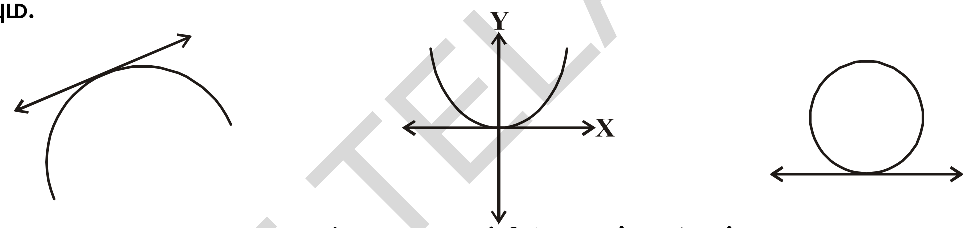
(TANGENTS AND SECANTS TO A CIRCLE)

9.1 அறிமுகம்

ஒரு தளத்தில் இரண்டு கோடுகள் ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளும் அல்லது எங்கும் வெட்டிக்கொள்ளாது என்று நாம் பார்த்திருக்கிறோம். சில சமயங்களில் அவை ஒன்றின் மேல் ஒன்று பொருந்தும் கோடுகளாகவும் உள்ளன.



இவ்வாறே ஒரு தளத்தில் ஒரு கோடும் ஒரு வளைவும் கொடுக்கப்பட்டால் எவ்வாறு இருக்கலாம்? ஒரு வளைவு என்பது பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் பார்த்தது போல் பரவளைவாக இருக்கலாம் அல்லது ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து சமமான தூரத்தில் உள்ள புள்ளிகளின் தொகுப்பான மூடிய வளைவு வட்டமாக இருக்கலாம் என்பது உனக்குத் தெரியும்.



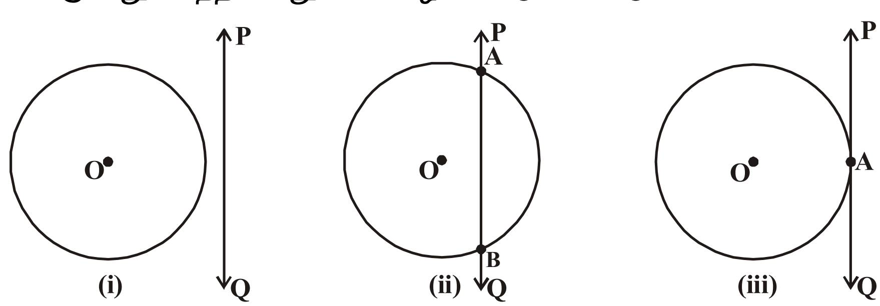
வட்டவடிவமான பொருட்கள் ஒரு தளத்தின் மேல் சுற்றும் போது ஒரு பாதையை ஏற்படுத்துவதை நீ பார்த்திருக்கலாம். உதாரணமாக மிதிவண்டியில் செல்வது, தண்டவாளத்தின் மேல் செல்லும் இரயில் சக்கரங்கள் முதலியவை. அவை செல்லும் பாதை வட்டம் மேலும் ஒரு கோடாக உள்ளது. இவற்றிற்கிடையே ஏதேனும் உறவு உள்ளதா?

ஒரு தளத்தில் ஒரு வட்டமும் ஒரு கோடும் கொடுக்கப்பட்டால் என்ன நிகழும் என பார்ப்போம்.

9.1.1 ஒரு கோடும் ஒரு வட்டமும்

உனக்கு ஒரு தாளின் மேல் வரையப்பட்ட வட்டம் மேலும் ஒரு கோடு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சாலமன் 3 சாத்தியகூறுகள் மட்டுமே இருக்க முடியும் என்று வலியுறுத்திக் கூறுகிறான்.

'O' ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டம், மற்றும் PQ எனும் கோட்டினை எடுத்துக் கொள்வோம். மூன்று சாத்தியகூறுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



படம்(i)ல் PQ கோட்டிற்கும் வட்டத்திற்கும் பொதுவான புள்ளி ஏதும் இல்லை. அந்த சந்தர்ப்பத்தில் PQ என்பது வட்டத்திற்கு ஒரு வெட்டாத கோடாகும்.

படம்(ii)ல் PQ என்பது வட்டத்தை A மேலும் Bஎன்னும் இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. அது இரண்டு பொதுப்புள்ளிகள் கொண்ட வட்டத்தின் நாண் ABஐ ஏற்படுத்துகின்றது. இந்த வகையில் PQ என்பது வட்டத்தின் வெட்டும் கோடு ஆகும்.

படம்(iii)ல் A என்ற ஒரேபுள்ளி வட்டத்திற்கும், கோட்டிற்கும் பொதுவாக உள்ளன. இந்த கோடு வட்டத்தின் தொடுகோடு எனப்படும்.

வட்டத்தை பொறுத்த வரையில் கோட்டிற்கு வேறு எந்த நிலையும் இருக்க முடியாது என்பதை நாம் காணலாம்.

உனக்குத் தெரியுமா?

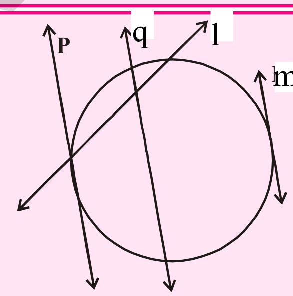
'tangent' (தொடுகோடு) என்னும் வார்த்தை 'tangere'என்னும் (தொடுதல்) இலத்தீன் வார்த்தையிலிருந்து உருவானதாகும். இது டேனிஷ் கணிதமேதை Thomas Fineke (தாமஸ் பின்கி) என்பரால் 1583ல் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது.

இதை செய்

i. ஏதேனும் ஒரு ஆரத்தைக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. வெவ்வேறு புள்ளிகளில் நான்கு தொடுகோடுகளை வரைக. இந்த வட்டத்திற்கு எத்தனை தொடுகோடுகளை வரையலாம்?

ii. வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு எத்தனை தொடுகோடுகள் வரையலாம்?

iii. வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் எவை?



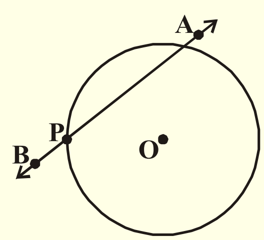
9.2 வட்டத்தின் தொடுகோடுகள்

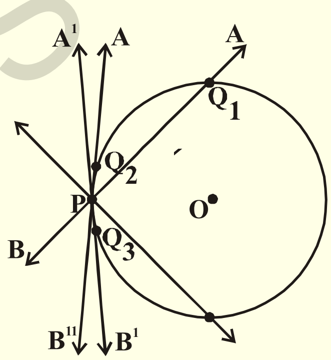
வட்டத்தின் மேல் அமைந்துள்ள எந்த புள்ளியின் வழியாகவும் தொடுகோடுகள் வரையலாம் என்பதை நாம் காணலாம். வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி வழியே எத்தனை தொடுகோடுகள் வரையலாம் என்று உன்னால் கூற முடியுமா?

இதைத் தெரிந்துக்கொள்ள கீழேயுள்ள செயல்பாட்டைப் பார்க்கலாம்.

செயல்பாடு

ஒரு வட்டவடிவகம்பியை எடுத்துக்கொள். AB எனும் நேர்கம்பியை இந்த அமைப்பு Pல் பொறுத்து சுழலும்படி படத்தில் பொருத்தியவாறு Pல் பொறுத்து . வட்ட வடிவ கம்பி வட்டத்தையும், நேர்கம்பி நேர்க்கோட்டையும், P என்பது அவை இரண்டும் வெட்டும் புள்ளியையும் குறிக்கிறது எனலாம்.





இந்த அமைப்பை மேசையின் மேல் வைத்து ABஐ Pல் பொறுத்து. வெவ்வேறு நிலைகளைக் காட்டும்படி மெதுவாக சுழற்று (படத்தைப்பார்). நேர்கம்பியானது வட்டத்தை Pஐத் தவிர மற்றொரு புள்ளியிலும் அதாவது Q_1, Q_2, அல்லது Q_3 என்னும் புள்ளிகளிலும் வெட்டுகிறது.

நேர்கம்பி வட்டத்தை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. அவற்றில் ஒன்று P. ABன் $A'B'$ நிலையில் மட்டும் ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொடுகிறது. இதுவே வட்டத்திற்கு Pன் வழியே வரையப்பட்ட தொடுகோடு ஆகும். ABன் மற்ற எல்லா நிலைகளிலும் AB என்பது Pல் வட்டத்திற்கு வெட்டும் கோடு ஆகும். எனவே Pன் வழியே வட்டத்திற்கு ஒரே ஒரு தொடுகோடு மட்டுமே வரையமுடியும்.

AB கம்பி வட்டத்தை வெட்டும்படி செய்யும் இரண்டு புள்ளிகளும் வட்டத்தின் வெட்டும் புள்ளிகள் ஆகும். வட்டத்தின் வெட்டும் கோட்டின் இரண்டு புள்ளிகளும் ஒன்றாக பொருந்தும்போது தொடுகோடு என்னும் நிலை ஏற்படுகிறது.

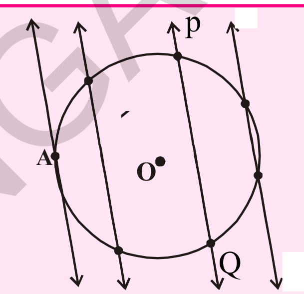
இதை செய்

படத்தில் காட்டியதைப்போல் ஒரு தாளில் ஒரு வட்டம் மற்றும் PQ என்னும் வெட்டும் கோடு வரைக. PQக்கு இணையாக அதன் இருபுறமும் சில கோடுகளை வரைக.

வட்டமையத்தின் அருகே செல்லச் செல்ல நாணின் நீளம் எவ்வாறு மாறுகிறது?

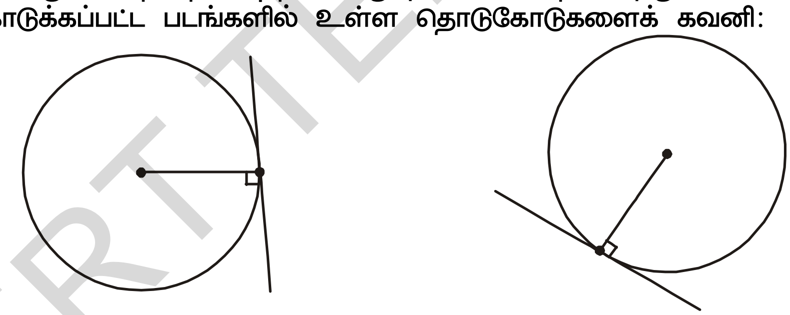
வட்டத்தின் பெரிய நாண் எது?

ஒன்றுக்கொன்று இணையாக உள்ள தொடுகோடுகள், வட்டத்திற்கு எத்தனை வரையமுடியும்?



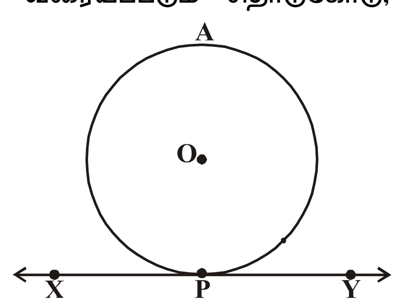
வட்டத்திற்கும் தொடுகோட்டிற்கும் உள்ள பொதுபுள்ளி தொடுபுள்ளி எனப்படும். தொடுகோடு என்பது வட்டத்தை அந்த பொதுபுள்ளியில் தொடுகிறது.

கீழே கொடுக்கப்பட்ட படங்களில் உள்ள தொடுகோடுகளைக் கவனி:



வட்டத்திற்கு ஒரு புள்ளியின் வழியே எத்தனை தொடுகோடுகளை வரையலாம்? மொத்தமாக ஒரு வட்டத்திற்கு எத்தனை தொடுகளை வரையமுடியும்? வட்டத்தின் தொடுபுள்ளிகளைக்கவனி. தொடுபுள்ளிகள் வழியே வட்டத்தின் ஆரங்களை வரைக. தொடுகோட்டிற்கும் ஆரத்திற்கும் இடையிலுள்ள கோணத்திற்கும் ஏதாவது விசேஷமான வேறுபாட்டை காணமுடிகிறதா? அவை தொடுகோட்டிற்கு செங்குத்தாக உள்ளன. இதை நாம் எவ்வாறு நிரூபிக்க முடியும் என்பதைப் பார்க்கலாம்.

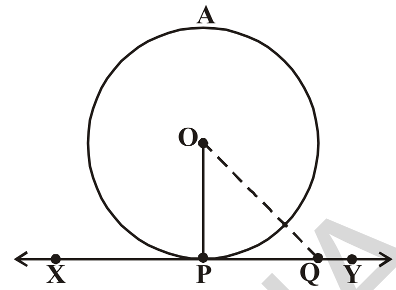
தேற்றம்-9.1 : வட்டத்திற்கு ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு, தொடுபுள்ளி வழியே செல்லும் ஆரத்திற்குச் செங்குத்தாகும்.



கொடுக்கப்பட்டவை : 'O' ஐ மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு XY என்பது Pவழியே வரையப்பட்ட தொடுகோடு ஆகும்.

நிரூபிக்க : OP என்பது XYக்கு செங்குத்து. (i.e $OP \perp XY$)

நிரூபணம் : இங்கு நாம் கொடுக்கப்பட்ட கூற்று மெய்யல்ல எனக் கொண்டு தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.



OP என்பது XYக்கு செங்குத்தல்ல எனக் கொள்க. அப்போது XYன் மேல் Qஎன்னும் மற்றொரு புள்ளியை எடுத்துக்கொள். OQ ஐ இணை.

Q என்னும் புள்ளி வட்டத்திற்கு வெளியே அமையும் (ஏன்?). Q என்பது வட்டத்திற்கு உட்புறம் இருந்தால் XY என்பது வெட்டும் கோடாக இருக்கும். ஆனால் தொடுகோடாக இருக்காது.

எனவே OQ என்பது ஆரம் OPஐ விட நீளமாக இருக்கும்.

அதாவது OQ > OP.

இது XYன் மேல் உள்ள அனைத்து புள்ளிகளுக்கும் பொருந்தும். எனவே OP என்பது O விலிருந்து வரையப்பட்ட எல்லா கோடுகளை விட குறைவான நீளத்தை உடையது.

எனவே OP என்பது XYக்கு செங்குதல்ல என்னும் கூற்று மெய்யற்றதாகும். எனவே OP என்பது XYக்கு செங்குத்து. ஆகவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

குறிப்பு : தொடு கோட்டின் தொடுபுள்ளி வழியே வரையப்படும் கோட்டை(ஆரத்தை கொண்ட) தொடுபுள்ளியில் வட்டத்தின் செங்கோடு (normal) எனப்படும்.

முயற்சி செய்

இந்த தேற்றத்தின் மறுதலையை எவ்வாறு நிரூபிப்பாய்?

“ஒரு வட்டத்தின் ஆரத்தின் முனைப்புள்ளி வழியே ஆரத்திற்கு செங்குத்தாக வரையப்படும் கோடு வட்டத்தின் தொடுகோடாகும்”.

மேலுள்ள தேற்றத்தை பயன்படுத்தி மேலும் சில தேற்றங்களை நிரூபிக்கலாம்.

(i) வட்டப்பரிதியின் மேல் உள்ள P என்னும் புள்ளியின் வழியே ஒரே ஒரு செங்குத்துக்கோட்டை வரையலாம். எனவே P என்னும் புள்ளி வழியே ஒரே ஒரு தொடுகோட்டை மட்டுமே வரையமுடியும்.

(ii) XYக்கு Pவழியே ஒரே ஒரு செங்குத்து கோடு மட்டுமே வரைய முடியுமாதலால் தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளியில் வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு வட்டமையத்தின் வழியே செல்லும் என்று தெரிந்துக்கொள்ளலாம்.

இதைப்பற்றி சிந்தித்து உங்கள் நண்பர்கள் மற்றும் ஆசிரியருடன் கலந்துரையாடு.

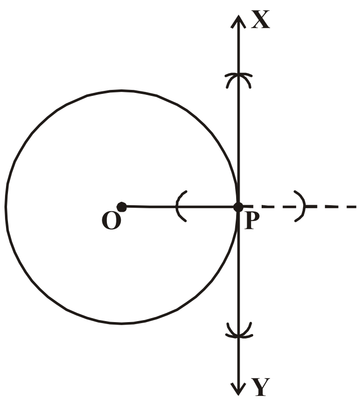
9.2.1 வட்டத்திற்கு தொடுகோடு வரைதல்

வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோடு எவ்வாறு வரையலாம்? தொடுகோடு, தொடுபுள்ளியில் வரையப்படும் ஆரத்திற்கு செங்குத்து என்பதை பயன்படுத்துகிறோம். தொடுபுள்ளி வழியே தொடுகோடு வரைய வேண்டுமெனில் அந்த புள்ளி வழியே ஆரத்திற்கு செங்குத்து கோடு வரைய வேண்டும். இந்த ஆரத்தை வரைய வேண்டுமானால் வட்டத்தின் மையம் தெரியவேண்டும். நாம் வரைதலின் படிகளைப் பார்ப்போம்.

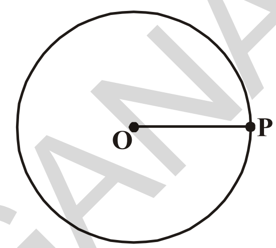
வரைமுறை : வட்டத்தின் மையம் கொடுக்கப்பட்ட போது வட்டத்திற்கு அதன் பரிதியின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி வழியே தொடுகோடு வரைக.

வட்டத்தின் மையம் ‘O’ மேலும் வட்டப்பரிதியின் மேல் P எனும் புள்ளி நமக்குத் தெரியும். இப்போது P வழியே தொடுகோடு வரைய வேண்டும்.

வரைத×ல் படிகள் :



1. ‘O’ஐ மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. பரிதியின் மேல் ‘P’ எனும் புள்ளியைக்குறி. OPஐ இணைக்கவும்.



2. Pன் வழியே ஒரு செங்குத்துக் கோட்டை வரைந்து அதற்கு படத்தில் காட்டியதைப் போல் XY என பெயரிடு.

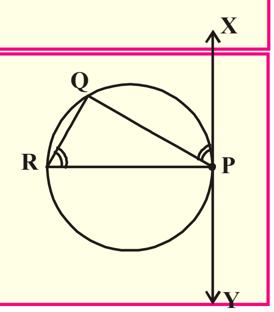
3. XYஎன்பது P வழியே வரையப்பட்ட தொடுகோடு ஆகும்.

Pவழியே மற்றொரு தொடுகோடு வரையமுடியுமா? காரணம் தருக.

முயற்சி செய்

வட்டமையம் தெரியாத போது வட்டத்திற்கு தொடுகோடு எவ்வாறு வரையலாம்?

குறிப்பு : $\angle QPX$ மேலும் $\angle PRQ$ என்னும் சமமான கோணங்களை வரைக. வரைமுறையை விவரி.



9.2.2 தொடுகோட்டின் நீளத்தைக் காணல்

வட்டத்திற்கு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி வழியே வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளத்தை காணமுடியுமா? வட்டத்திற்கு ஏதேனும் ஒரு புள்ளி வழியே வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமமாக இருக்குமா? நாம் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு : வட்டத்தின் மையம் ‘O’ ஆரம் 6செ.மீ, Pயிலிருந்து தூரம் OP = 10செ.மீ உள்ள வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

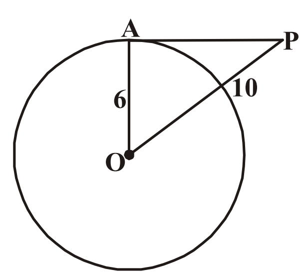
தீர்வு : தொடுகோடு என்பது தொடுபுள்ளி வழியே செல்லும் ஆரத்திற்கு செங்குத்து (தேற்றம் 9.1) இங்கு PA என்பது தொடுகோட்டுத்துண்டு மேலும் OA என்பது வட்டத்தின் ஆரம்.

$\therefore\ OA \perp PA \Rightarrow \angle OAP = 90°$

ΔOAPல், $OP^2 = OA^2 + PA^2$ (பிதாகரஸ் தேற்றம்)

$$10^2 = 6^2 + PA^2$$
$$100 = 36 + PA^2$$
$$PA^2 = 100 - 36$$
$$= 64$$

$\therefore\ PA = \sqrt{64} = 8$ செ.மீ.



பயிற்சி - 9.1

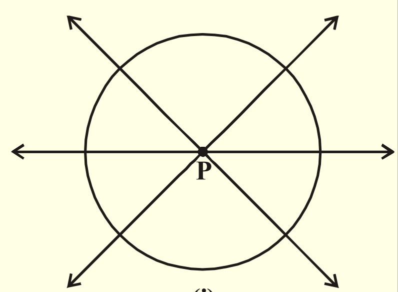
1. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக :
   (i) வட்டத்தின் தொடுகோடு வட்டத்தை .... புள்ளி (புள்ளிகளில்) வெட்டும்.
   (ii) வட்டத்தை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டும் கோடு .... எனப்படும்.
   (iii) ஒரு வட்டத்திற்கு .... இணை தொடுகோடுகள் இருக்கும்.
   (iv) வட்டத்திற்கும், தொடுகோட்டிற்கும் பொதுவான புள்ளி .... எனப்படும்.
   (v) ஒரு வட்டத்திற்கு .... தொடுகோடுகள் வரையலாம்.
   (v) ஒரு வட்டத்திற்கு ஒன்றுக்கொன்று இணையாக .... தொடுகோடுகள் வரையலாம்.
2. வட்டமையம் O, ஆரம் 5செ.மீ உடைய ஒரு வட்டத்தில் Pல் வரையப்படும் தொடு கோடு PQ. இது வட்டமையம் O வழியே OQ = 13 செ.மீ என்றவாறு செல்லும் கோட்டை Qல் சந்திக்கிறது. PQன் நீளத்தைக் காண்க.
3. ஒரு வட்டத்தை வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு இணையாக இரண்டு இணைகோடுகள் வரைக. அதில் ஒன்று தொடுகோடு மற்றொன்று வெட்டும் கோடாக இருக்கட்டும்.
4. 9செ.மீ ஆரமுடைய ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 15செ.மீ தூரத்தில் உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் என்ன?
5. ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் வழியே வரையப்படும் தொடுகோடுகள் இணை என நிரூபி.

9.3 வட்டத்திற்கு ஏதேனும் ஒரு புள்ளிவழியே வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் எண்ணிக்கை

வட்டத்தின் ஒரு புள்ளி வழியே வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண கீழ்காணும் செயல்பாட்டை செய்வோம்.

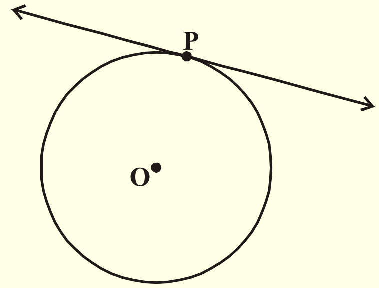
செயல்பாடு

(i) ஒரு தாளின் மேல் ஒரு வட்டத்தை வரைக. வட்டத்திற்கு உட்புறமாக P எனும் புள்ளியை எடுத்துக்கொள். இந்த புள்ளியின் வழியே வட்டத்திற்கு தொடுகோடு வரைய முடியுமா? இந்த புள்ளியின் வழியே வரையப்படும் கோடுகள் அனைத்தும் வட்டத்தை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. எனவே இவை அனைத்தும் வட்டத்தின் வெட்டும் கோடுகள் ஆகும். எனவே, வட்டத்திற்குள் உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரையமுடியாது. (அடுத்துள்ள படம் (i)ஐ ப் பார்)



(i)

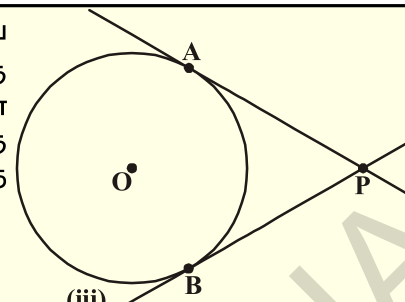
(ii) அடுத்ததாக, வட்டத்தின் மேல் P எனும் புள்ளியை எடுத்துக்கொள். இந்த புள்ளியின் வழியே தொடுகோடு வரைக. இந்த புள்ளியின் வழியே ஒரே ஒரு தொடுகோடு மட்டுமே வரையமுடியும் என்பதைக் காணலாம். (அடுத்துள்ள படம் (ii) ஐப்பார்)



(ii)

(iii) இப்போது, வட்டத்திற்கு வெளியே P எனும் புள்ளியை எடுத்துக்கொள். இந்த புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரைய முயற்சி செய். என்ன காண்கிறாய்? இந்த புள்ளியின் வழியே வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையலாம் என்பதை பார்க்கலாம். (அடுத்துள்ள படம் (iii) ஐப் பார்)

இப்போது இந்த உண்மைகளை எழுதுவோம்.



(iii)

நிலை (i) : வட்டத்திற்குள் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோடு வரையமுடியாது.

நிலை(ii) : வட்டப் பிரிதியின் மேல் உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு ஒரே ஒரு தொடுகோடு மட்டுமே வரையமுடியும்.

நிலை(iii) : வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் மட்டுமே வரையமுடியும். இதில் PA மற்றும் PB தொடுகோடுகளின் தொடுபுள்ளிகள் முறையே A மற்றும் B ஆகும்.

வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள 'P' புள்ளியிலிருந்து தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளி 'A' வரை உள்ள கோட்டுத்துண்டு வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் நீளமாகும்.

படம் (iii)லிருந்து PA, PB என்பவை Pயிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளங்கள் ஆகும். PA மேலும் PBக்கு இடையேயுள்ள உறவு என்ன?

தேற்றம்-9.2 : ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம்.

தரவு : (Oஐ மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள P என்னும் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் PA மேலும் PB. (படத்தைப்பார்))

நிரூபிக்க : PA = PB

நிரூபணம் : OA, OB, OP ஆகியவற்றை இணை

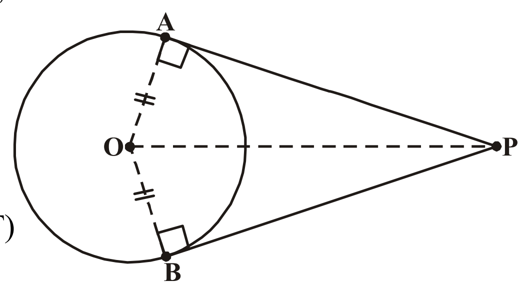
$\angle OAP = \angle OBP = 90^0$ (ஆரத்திற்கும், தொடுகோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் தேற்றம் 9.1ன்படி)

ΔOAP மற்றும் ΔOBP என்ற

இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களில்,

OA = OB (வட்டத்தின் ஆரங்கள்)

OP = OP (பொது)



எனவே, (செங். கர்ணம். பக்கம்.)வடிவொப்புமைப்படி

$\Delta OAP \cong \Delta OBP$

எனவே PA = PB (CPCT)

இவ்வாறாக தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

முயற்சி செய்

மேலேயுள்ள தேற்றத்திற்கு பிதாகரஸ் தேற்றத்தை உபயோகித்து நிரூபி.

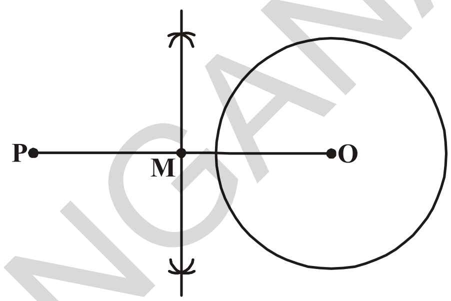
9.3.1. வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரைதல்

வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையலாம் என்பதைப் பார்த்தோம். இந்த தொடுகோடுகளை எவ்வாறு வரைவது என்பதை பார்ப்போம்.

வரைமுறை : வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரைதல்.

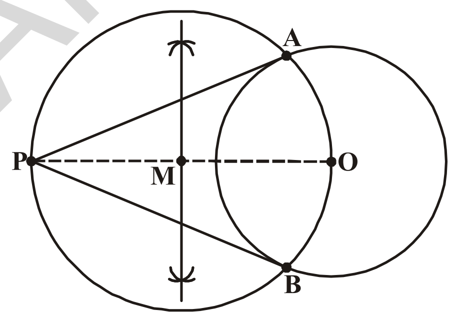
தரவு : வட்டமையம் 'O' மற்றும் வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள Pஎனும் புள்ளி தரப்பட்டுள்ளது. Pயிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையவேண்டும்.

வரைமுறையின் படிகள் :



படி(i) : POஐ இணைத்து அதற்கு செங்குத்து இருசமவெட்டி வரைக. M என்பது POவின் மையப்புள்ளி என்க.

படி (ii) : M ஐ மையமாகவும், PM அல்லது MO ஆரமாகவும் உடைய வட்டம் வரைக. அது கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை A, B எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

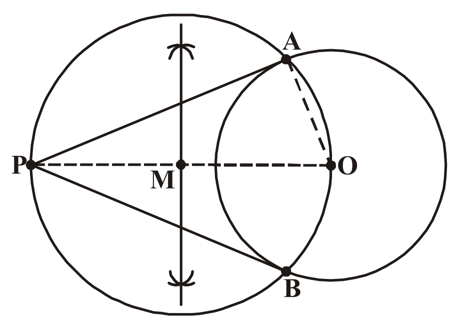


படி (iii) : PA, PBஐ இணை. PA, PB என்பவை தேவையான தொடுகோடுகள் ஆகும்.

நிரூபணம் : இப்போது இந்த வரைமுறையை நிரூபிப்போம்.

OAஐ இணை. $\angle PAO$ என்பது அரைவட்டத்தில் உள்ள கோணம். எனவே $\angle PAO = 90°$.

$PA \perp OA$ எனக் கூறலாமா?



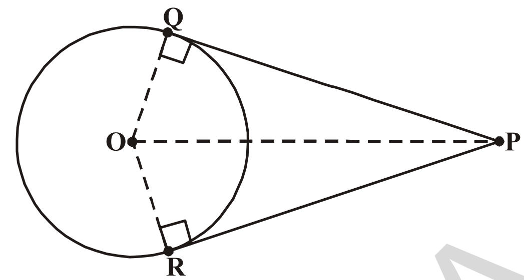
OA என்பது வட்டத்தின் ஆரம். PAஎன்பது வட்டத்திற்கு தொடுகோடு. (9.1 தேற்றத்தின் மறுதலை) இவ்வாறே P B என்பதும் வட்டத்திற்கு தொடுகோடு ஆகும்.

எனவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது. தொடுகோடுகள், வெட்டும் கோடுகளைப்பற்றிய சில கூற்றுக்களைக் காண்போம்.

கூற்று -1 : வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் இருசமவெட்டியின் மேல் வட்டத்தின் மையம் அமையும். இதை எவ்வாறு நிரூபிக்கலாம் என நினைக்கிறாய்?

நிரூபணம் : O ஐ மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள P எனும் புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட இரண்டு தொடுகோடுகள் PQ, PR என்க.

OQ மற்றும் ORஐ இணை. ΔOQP மேலும் ΔORP என்பவை சர்வசமம். ஏனெனில்



$\angle OQP = \angle ORP = 90^o$ (தேற்றம் 9.1)

$OQ = OR$ (ஆரங்கள்)

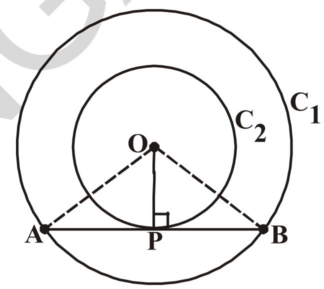
OP பொது.

எனவே $\angle OPQ = \angle OPR$ (CPCT)

OP என்பது $\angle QPR$ ன் கோண இருசமவெட்டி ஆகும். எனவே, வட்டத்தின் மையம் இரண்டு தொடுகோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோண இருசமவெட்டியில் அமைகிறது.

கூற்று -2: இரண்டு பொதுமைய வட்டங்களில், பெரியவட்டத்தின் நாண், சிறிய வட்டத்தின் தொடுபுள்ளியில் இருசமபாகமாக பிரிக்கப்படுகிறது.

இது எவ்வாறு ஏற்படுகிறது எனப்பார்க்கலாம்.



நிரூபணம் : O ஐ மையமாகக்கொண்ட இரு பொதுமைய வட்டங்கள் C_1 மேலும் C_2 கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. AB என்பது பெரியவட்டம் C_1ன் நாண். இது சிறியவட்டம் C_2ஐ P எனும் புள்ளியில் தொடுகிறது. (படத்தைப்பார்) $AP = PB$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

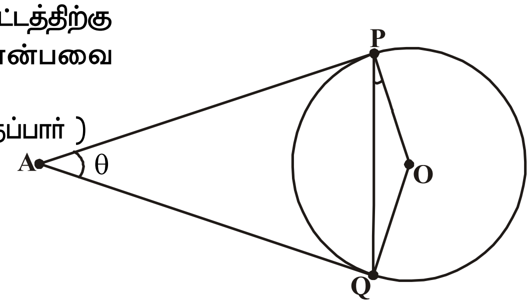
OPஐ இணை.

இப்போது AB என்பது வட்டம் C_2ன் தொடுகோடு மேலும் தொடுபுள்ளி P. OP என்பது C_2 ன் ஆரம்.

எனவே, தேற்றம் 9.1ன்படி $OP \perp AB$

இப்போது, ΔOAP மேலும் ΔOBP என்பவை சர்வசமம் (ஏன்?) இதிலிருந்து $AP = PB$ என நிரூபிக்கலாம். எனவே OP என்பது ABன் செங்குத்து இருசமவெட்டி. ஏனெனில் நாணின் செங்குத்து இருசமவெட்டி வட்டமையம் வழியே செல்லும்.

கூற்று -3: AP, AQ என்பவை Oஐ மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளி Aயிலிருந்து வரையப்பட்ட இரண்டு தொடுகோடுகள். எனில் $\angle PAQ = 2\angle OPQ = 2\angle OQP$. உன்னால் இதைக் காண முடியுமா?



நிரூபணம் : வட்டத்தின் மையம் O. A என்பது வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளி மேலும் AP, AQ என்பவை வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள். மேலும் P,Q என்பவை தொடுபுள்ளிகள்(படத்தைப்பார்)

$\angle PAQ = 2\angle OPQ$

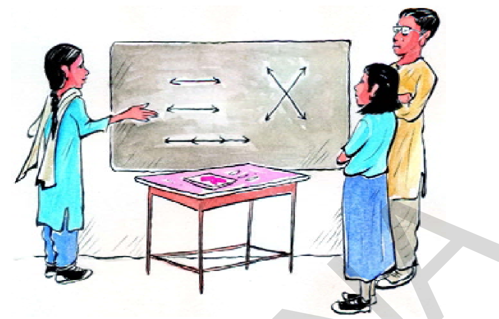
$\angle PAQ = \theta$ என்க.

தேற்றம் 9.2ன் படி $AP = AQ$.

எனவே, ΔAPQ என்பது இருசமபக்க முக்கோணம்.

எனவே, $\angle APQ + \angle AQP + \angle PAQ = 180°$ (மூன்று கோணங்களின் மொத்தம்)

ஆகவே, $\angle APQ = \angle AQP = \frac{1}{2}(180° - \theta)$



$$= 90° - \frac{1}{2}\theta$$

மேலும் தேற்றம் 9.1ன் படி

$\angle OPA = 90°$

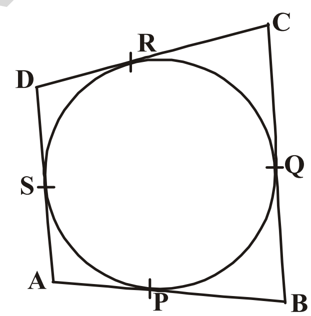
எனவே, $\angle OPQ = \angle OPA - \angle APQ$

$$= 90° - \left[90 - \frac{1}{2}\theta\right] = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PAQ$$

எனவே, $\angle OPQ = \frac{1}{2}\angle PAQ$.

$\therefore \quad \angle PAQ = 2\angle OPQ$. இவ்வாறே $\angle PAQ = 2\angle OQP$

கூற்று-4: ஒரு வட்டம், ஒரு நாற்கரம் ABCDன் நான்கு பக்கங்களை P,Q,R,S எனும் புள்ளிகள் தொடுகிறது எனில் AB+CD = BC + DA.



இதை எவ்வாறு நிரூபிக்கலாம் என நினைக்கிறாய்? AB, CD, BC, DA என்பவை வட்டத்தின் தொடுகோடுகளாகும். இவை முறையே P,Q,R,S எனும் புள்ளிகளில் தொடுவதால், வட்டம் நாற்கரத்தின் உட்புறம் இருக்கவேண்டும் (படத்தைப்பார்)

இப்போது எவ்வாறு நிரூபிக்கலாம்?

நிரூபணம் : வட்டம், நாற்கரம் ABCD ன் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA களை முறையே P,Q,R மேலும் S என்னும் புள்ளிகளில் தொடுகிறது. (படத்தைப்பார்)

தேற்றம் 9.2ன்படி, வட்டத்தின் வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமம்.

எனவே $AP = AS$

$BP = BQ$

$DR = DS$

மேலும் $CR = CQ$

இவற்றை கூட்ட,

$$AP + BP + DR + CR = AS + BQ + DS + CQ$$

அல்லது $(AP + PB) + (CR + DR) = (BQ + QC) + (DS + SA)$

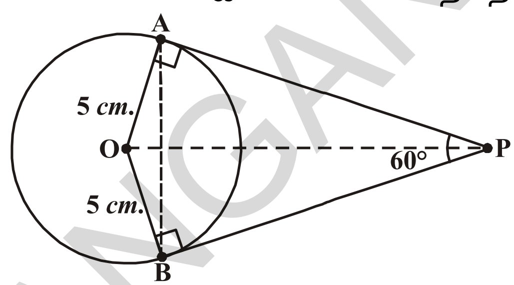
அல்லது $AB + CD = BC + DA.$

இப்பொழுது நாம் கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலைக்கு தகுந்தவாறு பகுப்பாய்வு செய்து வரைமுறையை எவ்வாறு செய்யலாம் என்பதை கீழ்கண்ட எடுத்துக்காட்டு மூலம் தெரிந்துகொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-1 : 5செ.மீ ஆரமுடைய ஒரு வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 60° உள்ளவாறு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரைக.

தீர்வு : வட்டம் வரைந்து அதற்கு இரண்டு தொடுகோடுகளை வரைவதைப் பற்றி நாம் ஆலோசிப்போம். நமக்கு வட்டத்தின் ஆரம் மேலும் தொடுகோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் மட்டுமே தெரியும். வட்டத்திற்கு எவ்வளவு தொலைவிலிருந்து தொடுகோடுகள் வரைய வேண்டும் எனவும் தொடுகோட்டின் நீளம் என்ன என்பதும் தெரியாது. நமக்கு தொடுகோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் மட்டுமே தெரியும். இதை பயன்படுத்தி வட்டத்திற்கு வெளியே எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ள புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடுகளை வரையவேண்டும் என்பதைத் தெரிந்துக்கொள்ள வேண்டும்.

இதைத் தொடங்க, 5செ.மீ ஆரமும், வட்டமையம் ‘O’ ஐ உடைய வட்டத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். PA, PB என்பவை வட்டத்திற்கு வெளியே Pயிலிருந்து வரையவேண்டிய இரண்டு தொடுகோடுகள் மேலும் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணம் 60° எனக் கொள்வோம்.



இதில் $\angle APB = 60^\circ$. OP ஐ இணை.

OP என்பது $\angle APB$ ன் கோண இருசமவெட்டி என நமக்குத் தெரியும்.

எனவே $\angle OPA = \angle OPB = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

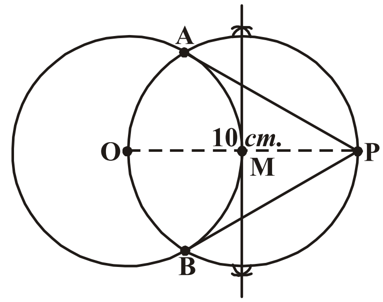
$(\because \Delta OAP \cong \Delta OBP)$

ΔOAPல்,

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{OA}{OP}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{OP} \quad \text{(முக்கோணவியல் விகிதத்தின்படி)}$$

$$OP = 10 \text{ செ.மீ.}$$



இப்போது வட்டமையம் ‘O’. ஆரம் 5செ.மீ உடைய வட்டம் வரைக. வட்ட மையத்திலிருந்து 10செ.மீ தூரத்தில் P என்னும் புள்ளியைக்குறி. OPஐ இணை.9.2ல் கொடுக்கப்பட்ட வரைமுறையின் படி வரைமுறையை நிறைவு செய். எனவே PA, PB என்பன கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்திற்கு வரைந்த ஒரு ஜோடி தொடுகோடுகள் ஆகும்.

முயற்சி செய்

$\angle BOA = 120^\circ$ இருக்குமாறு OA, OB எனும் இரண்டு ஆரங்களை வரைக, $\angle BOA$ ன் கோண இருசமவெட்டியை வரைக. A,B எனும் புள்ளிகளில் OA, OBக்கு செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக. இந்த கோடுகள் $\angle BOA$ன் இருசமவெட்டியை வெளிப்புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இவை நமக்குத் தேவையான தொடுகோடுகள் ஆகும். வரைமுறை செய்து நியாயப்படுத்துக.

பயிற்சி - 9.2

1. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து அதன் காரணத்தை எழுதி நியாயப்படுத்து.

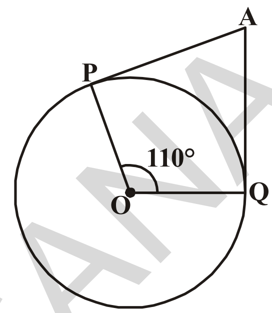
(i) ஒரு வட்டத்தின் தொடுகோட்டிற்கும், தொடுபுள்ளி வழியே ஆரத்திற்கும் இடையேயுள்ள கோணம்

(a) 60° (b) 30° (c) 45° (d) 90°

(ii) Q என்னும் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் 24செ.மீ. வட்டமையத்திலிருந்து Q 25செ.மீ தூரத்தில் உள்ளது எனில் வட்டத்தின் ஆரம்

(a) 7செ.மீ (b) 12 செ.மீ (c) 15செ.மீ (d) 24.5செ.மீ

(iii) அடுத்துள்ள படத்தில் 'O'ஐ மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு AP, AQ என்பவை இரண்டு தொடுகோடுகள் மேலும் $\angle POQ = 110°$, எனில் $\angle PAQ =$



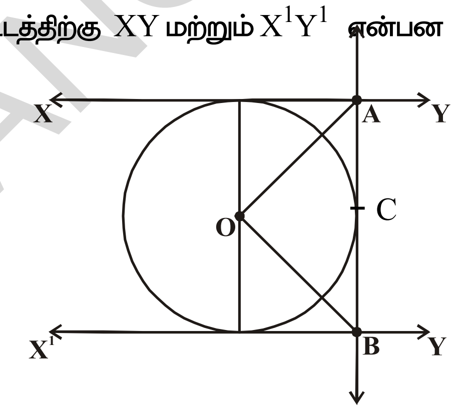
(a) 60° (b) 70°

(c) 80° (d) 90°

(iv) 'O' ஐ மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளி Pயிலிருந்து PA மேலும் PB என்னும் இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணம் 80° எனில் $\angle POA =$

(a) 50° (b) 60° (c) 70° (d) 80°

(v) படத்தில் காட்டியவாறு Oஐ மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு XY மற்றும் X^1Y^1 என்பன இரண்டு இணையான தொடுகோடுகள். தொடுபுள்ளி C வழியே செல்லும் மற்றொரு தொடுகோடு AB, XYஐ Aயிலும் X^1Y^1 ஐ B லும் வெட்டுகிறது. $\angle AOB =$

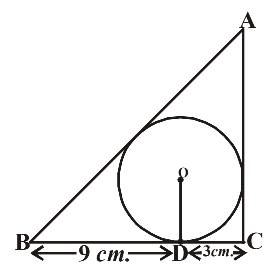


(a) 80° (b)100° (c) 90° (d) 60°

2. 5செ.மீ, 3 செ.மீ ஆரங்களைக் கொண்ட இரண்டு பொதுமைய வட்டங்கள் வரையப்படுகின்றன. சிறிய வட்டத்தைப் தொடும் பெரிய வட்டத்தின் நாணின் நீளத்தைக் காண்.

3. ஒரு வட்டத்தின் பரிதியின்மேல் அமையும் இணைகரம் ஒரு சாய்சதுரம் என நிரூபி.

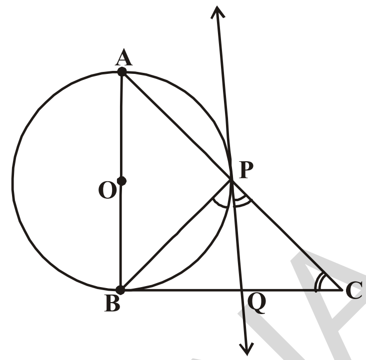
4. அடுத்தள்ள படத்தில், 3செ.மீ ஆரத்தையுடைய வட்டம் ΔABCக்கு உட்புறமாக அமைந்துள்ளது. BC எனும் தொடுகோட்டை 'D' எனும் தொடுபுள்ளி BD=9செ.மீ, DC =3செ.மீ என இருக்குமாறு பிரிக்கிறது. எனில் AB, ACன் பக்கங்களின் நீளங்களைக் கண்டுபிடி.



5. 6செ.மீ ஆரத்தையுடைய வட்டம் வரைக. வட்டமையத்திலிருந்து 10செ.மீ தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு ஒரு ஜோடி தொடுகோடுகள் வரைந்து அவற்றின் நீளங்களை அளந்து எழுது. பிதாகரஸ் தேற்றத்தினை உபயோகித்து உன் அளவுகளை சரிபார்.

6. 4செ.மீ ஆரத்தை உடைய வட்டத்திற்கு 6செ.மீ ஆரத்தையுடைய பொதுமைய வட்டத்தின் மேல் அமைந்த புள்ளியிலிருந்து தொடுகோட்டை வரைக. அதன் நீளத்தை அளக்கவும். அதை கணக்கீடு செய்து சரிபார்க்கவும்.

7. வளையலை பயன்படுத்தி ஒரு வட்டம் வரைக. அதற்கு வெளியே ஒரு புள்ளியை எடுத்துக்கொள். இந்த புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரைந்து அவற்றின் நீளங்களை அளந்து எழுது. உன் முடிவை எழுது.



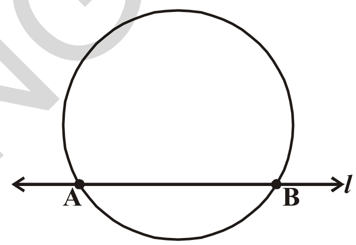
8. ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ABCல் ABஐ விட்டமாக உடைய ஒரு வட்டம், கர்ணம் ACஐ Pல் வெட்டுகிறது. Pவழியே வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடு BCபக்கத்தை இருசமக்கூறிடும் என நிரூபி.

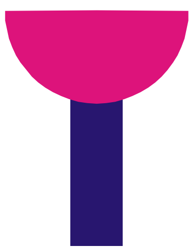
9. O ஐ மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள 'R' எனும் புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடு வரைக. இந்த புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு எத்தனை தொடுகோடுகள் வரையமுடியும்?

குறிப்பு: இந்த இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து தொடுபுள்ளி சமமான தூரத்தில் உள்ளது.

9.4 வட்டத்தின் வெட்டும் கோட்டினால் ஏற்படும் வட்டத்துண்டு

நாம் ஒரு கோடு மற்றும் ஒரு வட்டத்தைப் பற்றிப் பார்த்தோம். ஒரு வட்டத்தை ஒரு கோடு ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொடும்போது அது ஒரு தொடுகோடு. ஒரு கோடு ஒரு வட்டத்தை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டும் போது வெட்டும் கோடு ஆகிறது. இந்த இரண்டு புள்ளிகளால் ஏற்படும் கோட்டுத்துண்டு நாண் எனப்படுகிறது. இங்கு 'l' என்பது வெட்டும் கோடு. AB என்பது நாண்.

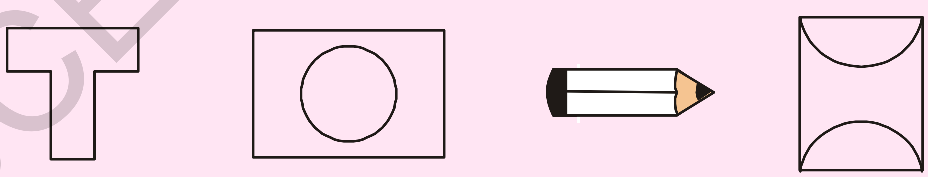




சங்கர் சிவப்பு மற்றும் நீலநிற காகிதங்களை ஒட்டி படங்களை தயார் செய்கிறான். அவன் கைகழுவும் தொட்டி (wash basin) அமைப்பில் ஒரு படம் தயாரித்தான். படத்தை தயாரிக்க எவ்வளவு கலர் காகிதம் தேவைப்படும்? இந்த படம் இரண்டு பாகங்களாகக் காணப்படுகிறது. ஒன்று செவ்வகம், மற்றொன்றின் வடிவம் என்ன? அது வட்டத்தின் பகுதியான வட்டத்துண்டு. செவ்வகத்தின் பரப்பைக்காண நமக்குத் தெரியும். வட்டத்துண்டின் பரப்பை எவ்வாறு காணலாம்? கீழ்கண்ட கலந்துரையாடலின் மூலம் பரப்பைக் காண முயற்சி செய்வோம்.

இதை செய்

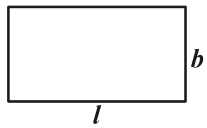
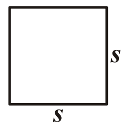
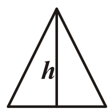
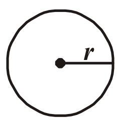
சங்கர் கீழ்கண்ட படங்களுடன் கைகழுவும் தொட்டியும் செய்தான்



இந்த படங்களை எவ்விதமாக பிரித்தால் அவற்றின் பரப்பளவுகளை எளிதாகக் காணமுடியும்.

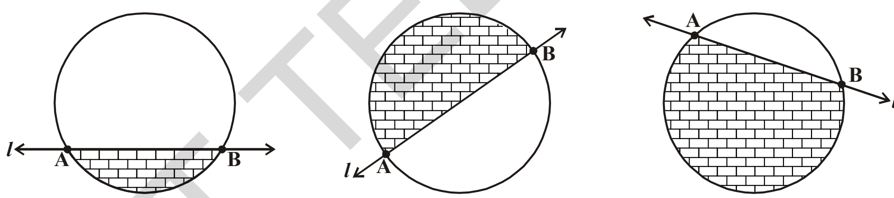
இந்த விதமான மற்றும் சில படங்களை தயாரித்து அவற்றை வெவ்வேறு பாகங்களாகப் பிரிக்கும் வடிவங்களை சிந்தித்துபார்.

நாம் சில ஜியோமிதி (Geometric) படங்களின் பரப்பளவுகளை எவ்வாறு காணலாம் என்பதை கீழ்கண்ட அட்டவணை மூலம் ஞாபகப்படுத்திக்கொள்வோம்.

வ.எண்.	படம்	அளவுகள்	பரப்பளவு
1.		நீளம் $= l$ அகலம் $= b$	$A = lb$
2.		பக்கம் = s உயரம் $= h$	$A = s^2$
3.		அடி $= b$	$A = \frac{1}{2} bh$
4.		ஆரம் $= r$	$A = \pi r^2$

9.4.1. ஒரு வட்டத்துண்டின் பரப்பளவைக் காணுதல்

ஒரு வட்டத்துண்டின் பரப்பை மதிப்பீடு செய்ய ஸ்வேதா கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்திற்கு வட்டத்துண்டுகளை வெட்டும் கோடுகளை வரைவதன்மூலம் செய்தாள்.

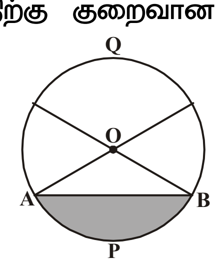


(i) (ii) (iii)

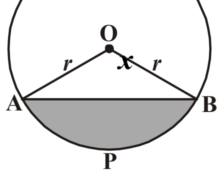
வட்டத்துண்டு என்பது வட்டவில் மற்றும் நாணினால் அடைவுப்பெற்ற பகுதி என்பது உனக்குத்தெரியும். படம் (i) ( ) பகுதியின் பரப்பளவு ஒரு சிறிய வட்டத்துண்டு, (ii)ல் அரைவட்டத்துண்டு (iii) ல் பெரிய வட்டத்துண்டு என்பதை நாம் காணலாம்.

இதனுடைய பரப்பளவை எவ்வாறு காண்பது? இதன் செயல்பாட்டினை செய்.

ஒரு வட்டவடிவமான தாளை எடுத்துக்கொண்டு அதை விட்டத்திற்கு குறைவான நாணை காட்டும்படியாக படத்தில் காட்டியவாறு மடி. இந்த சிறிய பகுதியை என்னவென்கிறோம்? இது ஒரு சிறிய வட்டத்துண்டு (APB). நிழலிடாதபகுதியை என்னவென்று அழைக்கிறோம். கச்சிதமாக இது ஒரு பெரிய வட்டத்துண்டு (AQB) ஆகும்.



நீங்கள் வட்டகோணப்பகுதி மற்றும் வட்டத்துண்டைப் பற்றி முன்வகுப்புகளில் கற்றுக்கொண்டீர்கள். அடுத்துள்ள படத்தில் உள்ளவாறு நிழலிடாத பகுதி மற்றும் நிழலிட்ட பகுதி (சிறிய வட்டத்துண்டுயும் சேர்த்து வட்டகோணப்பகுதி ஆகிறது. வட்டகோணப்பகுதி என்பது ஒரு முக்கோணம் மற்றும் ஒரு வட்டத்துண்டின் சேர்ப்பு ஆகும்.



வட்டமையம் 'O', ஆரம் 'r' ஐக் கொண்ட OAPBஐ ஒரு வட்டக் கோணப்பகுதி என்க (படத்தைப்பார்). $\angle AOB$ ன் கோண அளவை 'x'என்க.

Q

வட்டத்தின் மையத்தில் $360°$ கோணம் ஏற்படும் போது அந்த வட்டத்தின் பரப்பளவு πr^2 என உனக்குத் தெரியும்.

ஆகவே, வட்டமையத்தில் $1°$ கோணம் ஏற்படும் வட்டகோணப் பகுதியின் பரப்பளவு $\frac{1°}{360°} \times \pi r^2$.

இவ்வாறே, வட்டமையத்தில் கோணம் $x°$ எனில் வட்டகோணப் பகுதியின் பரப்பளவு $\frac{x°}{360°} \times \pi r^2$.

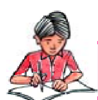
இப்போது, 'O' வட்டமையம். 'r' ஆரத்தைக் கொண்ட வட்டத்துண்டு APBன் பரப்பை நாம் கவனித்தால்,

வட்டத்துண்டு APB ன் பரப்பளவு = OAPB வட்டகோணப்பகுதியின் பரப்பளவு - ΔOAB ன் பரப்பளவு

$$= \frac{x°}{360°} \times \pi r^2 - \Delta OAB\text{ன் பரப்பளவு}$$

முயற்சி செய்

சிறியவட்டத்துண்டின் பரப்பளவை உபயோகித்து பெரிய வட்டத்துண்டின் பரப்பளவை எவ்வாறு காண்பாய்?

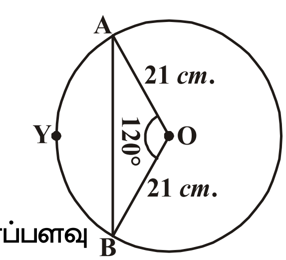


இதை செய்

1. வட்டத்தின் ஆரம் 7செ.மீ மற்றும் கீழே உள்ள வட்டகோணப்பகுதியின் கோண அளவுகளுக்கு வட்டகோணப்பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்.
   i. $60°$ ii. $30°$ iii. $72°$ iv. $90°$ v. $120°$
2. ஒரு கடிகாரத்தின் நிமிடமுள்ளின் நீளம் 14செ.மீ. அது 10 நிமிடங்களில் ஏற்படுத்தும் பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

இப்போது வட்டத்துண்டின் பரப்பளவைக்காண ஒரு உதாரணத்தைப்பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-1. அடுத்துள்ள படத்தில் வட்டத்தின் ஆரம் 21செ.மீ மற்றும் $\angle AOB = 120^0$ எனில் வட்டத்துண்டு AYB ன் பரப்பளவைக் காண்க



($\pi = \frac{22}{7}$ மேலும் $\sqrt{3} = 1.732$ எனக்கொள்க)

தீர்வு : வட்டத்துண்டு AYBன் பரப்பளவு

= வட்டகோணப்பகுதி OAYBன் பரப்பு – ΔOABன் பரப்பளவு

வட்டகோணப்பகுதி OAYB ன் பரப்பு $= \frac{120^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ செ.மீ^{2}

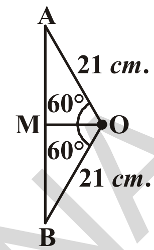
$= 462$ செ.மீ^{2} ...(1)

ΔOABன் பரப்பைக் காண படத்தில் காட்டியதைப்போல் $OM \perp AB$ஐ வரைக.

OA = OB, எனவே செ.க.ப. சர்வசமத்தின் படி $\Delta AMO \cong \Delta BMO$

எனவே, ABன் மையப்புள்ளி M. மேலும் $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2}\times 120^0 = 60^0$

இப்போது, $OM = x$ செ.மீ எனில்



ΔOMA, $\frac{OM}{OA} = \cos 60^0$.

அல்லது $\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$ $\left(\because \cos 60^0 = \frac{1}{2}\right)$

அல்லது $x = \frac{21}{2}$

எனவே, $OM = \frac{21}{2}$ செ.மீ

மேலும் $\frac{AM}{OA} = \sin 60°$

$\frac{AM}{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\because \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

எனவே, $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ செ.மீ.

$AB = 2AM = \frac{2\times 21\sqrt{3}}{2}$ செ.மீ. $= 21\sqrt{3}$ செ.மீ

இதிலிருந்து $\Delta OAB = \frac{1}{2}\times AB\times OM$

$= \frac{1}{2}\times 21\sqrt{3}\times\frac{21}{2}$ செ.மீ^{2}.

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}$ செ.மீ^{2}. ...(2)

எனவே AYB வட்டத்துண்டின் பரப்பளவு $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$ செ.மீ^{2}.

($\because$ (1), (2) லிருந்து]

$= \frac{21}{4}\left(88 - 21\sqrt{3}\right)$ செ.மீ^{2}

$= 271.047$ செ.மீ^{2}

எடுத்துக்காட்டு-2. அடுத்துள்ள படத்தில் Oஐ மையமாக உடைய வட்டத்தில் PQ=24செ.மீ, PR = 7செ.மீ மற்றும் விட்டம் QRஎன கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில் நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

தீர்வு : நிழலிட்டபகுதியின் பரப்பு = வட்டகோண பகுதி OQPRன் பரப்பு - ΔPQRன் பரப்பு

QR என்பது விட்டம். எனவே $\angle QPR = 90°$ (அரைவட்டத்தில் கோணம்)

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

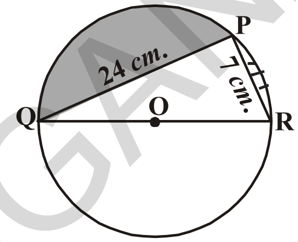
ΔQPRல், $QR^2 = PQ^2 + PR^2$

$= 24^2 + 7^2$

$= 576 + 49$

$= 625$

$QR = \sqrt{625} = 25$ செ.மீ.



வட்டத்தின் ஆரம் $= \frac{1}{2}$ QR

$= \frac{1}{2}(25) = \frac{25}{2}$ செ.மீ.

இப்போது அரை வட்டம் OQPRன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2}$

$= 245.53$ செ.மீ.^{2} ..... (1)

செங்கோண முக்கோணம் QPRன் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times PR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 24$

$= 84$ செ.மீ.^{2} ..... (2)

(1), (2) லிருந்து,

நிழலிட்டபகுதியின் பரப்பு $= 245.53 - 84$

$= 161.53$ செ.மீ.^{2}

எடுத்துக்காட்டு-3. அடுத்துள்ள படத்தில் காட்டியதைப்போல் வட்டவடிவ மேசையின் மேல்பகுதியின் ஆறு சமமான வேலைப்பாடுகள் உள்ளன. மேசையின் மேல்பகுதியின் வட்டத்தின் ஆரம் 14செ.மீ இந்த டிசைன்களுக்கு வர்ணம் பூச ச.செ.மீக்கு `5வீதம் ஆகும் செலவைக் கண்டுபிடி. ($\sqrt{3} = 1.732$என்க)

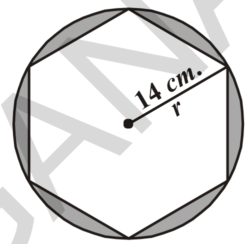
தீர்வு : வட்டத்திற்குள் வரையப்பட்ட ஓர் ஒழுங்கான அறுங்கோணத்தின் பக்கம் வட்டத்தின் ஆரத்திற்கு சமம் என நமக்குத்தெரியும்.

$\therefore$ ஒழுங்கான அறுங்கோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கம் = 14செ.மீ எனவே,

ஆறுவேலைப்பாடுகளின் பரப்பு = வட்டத்தின் பரப்பு – ஒழுங்கான அறுங்கோணத்தின்பரப்பு

வட்டத்தின் பரப்பு $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616 \text{ செ.மீ}^2 \; ..... (1)$$



ஒழுங்கான அறுங்கோணத்தின் பரப்பு $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14$$

$$= 509.2 \text{ செ.மீ}^2 \quad ..... (2)$$

எனவே, ஆறுவேலைப்பாடுகளின் பரப்பு $= 616 - 509.21$ ((1), (2)விருந்து)

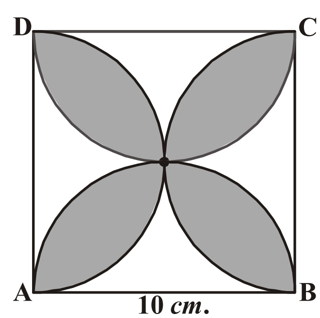
$$= 106.79 \text{ செ.மீ}^2.$$

செ.மீ.^{2} க்கு ₹5 வீதம் வர்ணம் பூசசெலவு $=$ ₹106.79×5

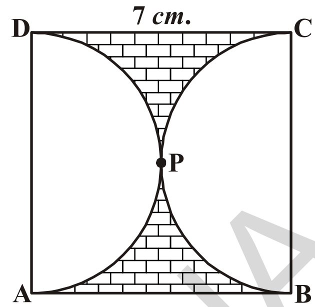
$=$ ₹533.95

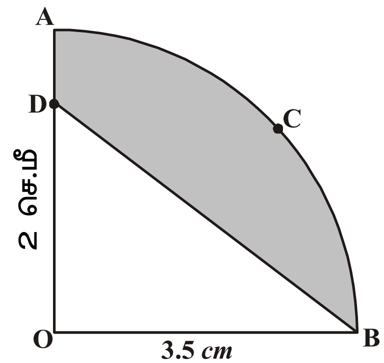
பயிற்சி - 9.3

1. 10செ.மீ ஆரத்தை உடைய வட்டத்தின் நாண் வட்டமையத்தில் செங்கோணத்தை ஏற்படுத்தினால் கீழ்கண்ட வட்டத்துண்டுகளின் பரப்பளவைக்காண். ($\pi = 3.14$எனக்கொள்க)
   i. சிறிய வட்டத்துண்டு ii. பெரிய வட்டத்துண்டு
2. 12 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் நாண் வட்டமையத்தில் $120°$ கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. அதற்கு ஒத்த சிறிய வட்டத்துண்டின் பரப்பளவைக் காண். ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.732$ எனக்கொள்க)
3. ஒரு கார் ஒன்றின்மேல் ஒன்று சாயாத இரண்டு துடைப்பான்களைக்(wipers) கொண்டுள்ளது. ஒவ்வொரு துடைப்பானும் 25செ.மீ நீளமுடைய இறக்கையைக் கொண்டுள்ளது. இது ஒவ்வொன்றும் $115°$கோணப்பகுதியைத் துடைக்கிறது. இரண்டு துடைப்பான்களும் ஒரே நேரத்தில் வேலை செய்யும் போது துடைக்கப்படும் பகுதியின் பரப்பைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)
4. அடுத்துள்ள படத்தில் ABCD சதுரத்தின் பக்கம் 10செ.மீ மேலும் சதுரத்தின் ஒவ்வொரு பக்கத்தை விட்டமாகக் கொண்ட அரைவட்டங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன. நிழலிட்டப்பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க. ($\pi = 3.14$என்க)

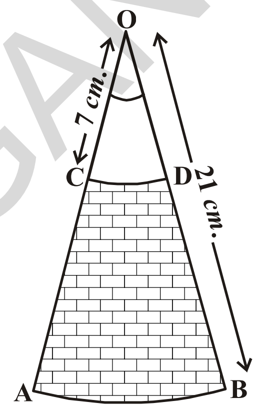


5. அடுத்துள்ளபடத்தில் ABCDஒரு சதுரம். அதன் பக்கம் 7செ.மீ APD, BPC என்பவை அரைவட்டங்கள். எனில் நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் காண். ($\pi = \frac{22}{7}$)

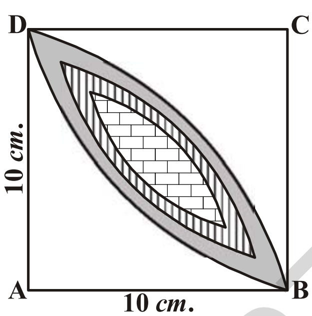




6. அடுத்துள்ள படத்தில் OACB என்பது Oஐ மையமாகவும், 3.5செ.மீ ஆரத்தையுடைய வட்டத்தின் கால்பகுதி ஆகும். OD = 2 செ.மீ எனில் நிழலிட்டபகுதியின் பரப்பைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க.)



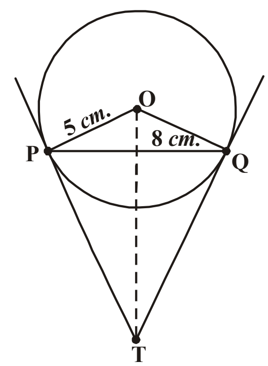
7. Oஐ மையமாக உடைய 21செ.மீ மேலும் 7செ.மீ ஆரங்களாக உடைய பொதுமைய வட்டங்களின் வில்கள் முறையே AB மற்றும் CDஆகும். $\angle AOB = 30^\circ$ எனில் நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$)



8. அடுத்துள்ளபடத்தில் 10செ.மீ ஆரத்தையுடைய வட்டத்தில் இரண்டு வட்டகோணபகுதிகளின் கால்பகுதிகளுக்கு பொதுவான பகுதி நிழலிடப்பட்டுள்ளது. நிழலிட்டபகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க. ($\pi = 3.14$)

விருப்பப் பயிற்சி **(இந்த பயிற்சி தேர்வுக்காக கொடுக்கப்பட்டது அல்ல)**

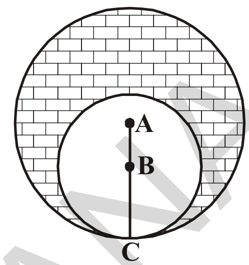
1. ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட இரண்டு தொடு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம், இரண்டு தொடுபுள்ளிகளை மையத்துடன் இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டுகள் ஏற்படுத்தும் கோணத்திற்கு மிகை நிரப்பி என நிரூபிக்க.
2. 5செ.மீ ஆரத்தை உடைய வட்டத்தில் PQ நாணின் நீளம் 8செ.மீ. P, Qல் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் Tல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. (படத்தைப்பார்) TPன் நீளத்தைக்காண்.

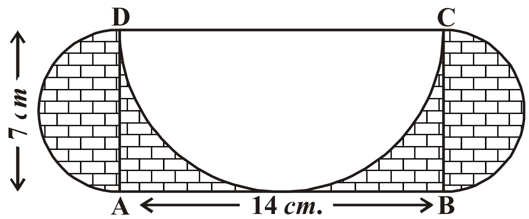


3. ஒரு நாற்கரத்தில் வரையப்பட்ட வட்டம், அதன் நான்கு பக்கங்களை தொடுமாறு உட்புறம் வரையப்பட்டிருந்தால், நாற்கரத்தின் எதிர்பக்கங்கள் வட்டமையத்தில் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிக் கோணங்கள் என நிரூபி.
4. 8செ.மீ நீளமுள்ள AB கோட்டுத்துண்டை வரைக. Aஐ மையமாகக் கொண்டு 4செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம், Bஐ மையமாகக் கொண்டு 3செ.மீ ஆரமுள்ள மற்றொரு வட்டம் வரைக. ஒவ்வொரு வட்டமையத்திலிருந்து மற்றொரு வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகளை வரைக.

5. ABC என்னும் செங்கோண முக்கோணத்தில் AB = 6செ.மீ, BC = 8 செ.மீ $\angle B = 90^0$. Bயிலிருந்து ACக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து உயரம் BD. B, C, D வழியே ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது. இந்த வட்டத்திற்கு Aவிலிருந்து தொடுகோடுகள் வரைக.

6. A, B ஐ மையங்களாக உடைய இரண்டு வட்டங்கள் Cயில் தொட்டுக்கொள்கின்றன. (அடுத்துள்ள படத்தைப்பார்) இங்கு AC = 8 செ.மீ. AB = 3 செ.மீ எனில் நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி.





7. AB = 14செ.மீ மேலும் BC = 7 செ.மீ அளவுகளையுடைய செவ்வகம் ABCD வரையப்பட்டுள்ளது. DC, BC மேலும் ADஐ விட்டங்களாக உடைய மூன்று அரைவட்டங்கள் படத்தில் காட்டியதைப்போல் வரையப்பட்டுள்ளது. நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி.

நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் கீழ்கண்டகருத்துகளைக் கற்றுள்ளோம்.

1. வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடு மற்றும் வெட்டும் கோட்டின் வரையறைகள் வட்டத்தின் நாணைப்பற்றிய கருத்து.

2. வெவ்வேறு வகையான முக்கோணங்களைப் பற்றிய கருத்துகள், முக்கியமாக செங்கோண முக்கோணங்கள் மற்றும் இருசமபக்க முக்கோணங்கள்.

3. கீழ்கண்ட தேற்றங்களைக் கற்றுள்ளோம்.

   a) ஒரு வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடு, தொடுபுள்ளி வழியே வரையப்பட்ட ஆரத்திற்கு செங்குத்து.

   b) ஒரு வட்டத்தின் வெளிப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளங்கள் சமம்.

4. கீழ்கண்ட வரைமுறைகளைக் கற்றுள்ளோம்.

   a) வட்டமையம், வட்டத்தின் பரிதியின் மேல் உள்ள புள்ளியும் கொடுக்கப்பட்டபோது வட்டத்திற்கு தொடுகோடு வரைதல்.

   b) ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு ஒரு ஜோடி தொடுகோடுகள் வரைதல்.

5. வட்டங்கள், தொடுகோடுகளுக்கு சம்பந்தப்பட்ட சில கூற்றுகளை நிரூபிக்கும் முறையை தெரிந்துக்கொண்டோம். இந்த முறையில் முன்பே படித்த சில கருத்துகளைக் கருத்தில் கொண்டு அவற்றை தர்க்கரீதியாக நிரூபித்தல்.

6. வட்டத்துண்டின் பரப்பளவு = வட்டகோணப்பகுதியின் பரப்பு - முக்கோணத்தின் பரப்பு.

அத்தியாயம்

10 அளவியல்

(Mensuration)

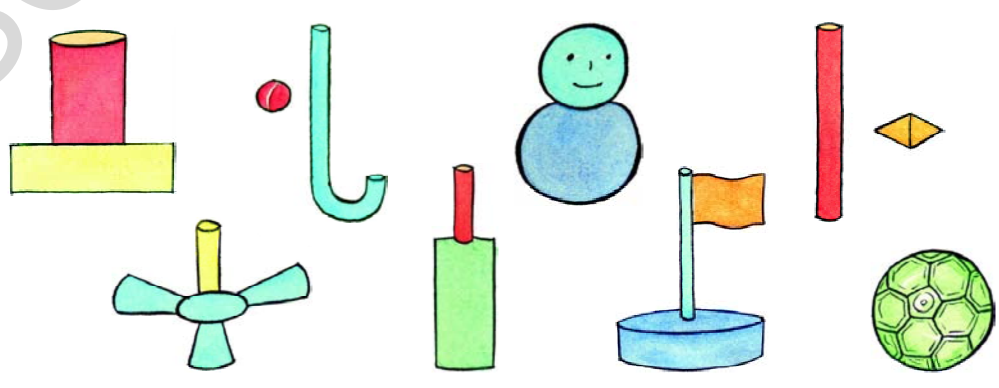
10.1 அறிமுகம்

VIII மற்றும் IX ஆம் வகுப்புகளில் நாம் பரப்பளவு, புறப்பரப்பளவு மற்றும் திண்ம வடிவங்களின் கனஅளவு ஆகியவற்றைப் பற்றி படித்தோம். அவை என்ன என்பதை பல பயிற்சிகள் செய்து புரிந்துக்கொண்டோம். நாம் இவற்றை நம் அன்றாட வாழ்க்கை சூழ்நிலைக்கு ஏற்ப பயன்படுத்தி, நமது தேவைகேற்ப கண்டறிந்து அதை அளப்பதற்கும், மதிப்பீடு செய்வதற்கும் பயன்படுத்தினோம். உதாரணத்திற்கு ஒரு அறைக்கு வெள்ளை அடிப்பதற்கான வர்ணத்தின் அளவு புறப்பரப்பின் அளவை கொண்டு கண்டு கொள்வோமே தவிர கனஅளவை கொண்டு அல்ல. தானியங்களின் அளவைக் கொண்ட பெட்டிகளின் அளவை அதன் கனஅளவைக் கொண்டு கண்டுபிடிப்போம், பரப்பளவைக் கொண்டு அல்ல.

முயற்சி செய்

1. கீழுள்ள சூழ்நிலைகளைக் கொண்டு, ஒவ்வொன்றிற்கும் கனஅளவு (அ) பரப்பளவு தேவையா என கண்டுபிடி. ஏன்?
   i. ஒரு பாட்டிலில் உள்ள நீரின் அளவு ii. கூடாரம் அமைக்க தேவையான துணி
   iii. லாரியில் உள்ள பைகளின் எண்ணிக்கை iv. ஒரு உருளையில் அடைக்கப்பட்ட வாயு
   v. ஒரு தீப்பெட்டியில் நிரப்ப தேவைபடும் தீக்குச்சிகளின் எண்ணிக்கை
2. நீ உன் நண்பனிடம் அவர்களுக்குத் தேவையானவற்றை கேட்டு இன்னும் 5 அதிகமான எடுத்துக்காட்டுகளை எழுதுக.

நம்மைச்சுற்றி நாம் பலவகையான வடிவங்களை (இரண்டு (அ) அதற்கும் அதிகமான கலவைகளுடன்) பார்த்தோம். தூண்களின் மேல் நிற்கும் வீடுகள், கனசெவ்வகத்தின் மேல் வைக்கப்பட்ட உருளை வடிவ நீர்த்தொட்டிகள், ஒரு கிரிக்கெட் மட்டை உருளை வடிவ கைப்பிடியும், தட்டை வடிவ உடல் அமைப்புக் கொண்டுள்ளது. உன்னை சுற்றியுள்ள பல வகையான பொருள்களை யோசி. கீழே சில பொருட்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

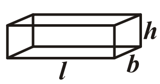
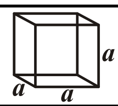
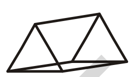
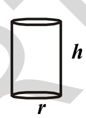
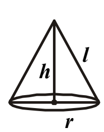
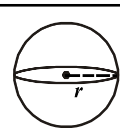
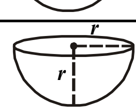


இங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொருள்களில் அதாவது கால்பந்து புறப்பரப்பளவும் மற்றும் கனஅளவும் கொண்டுள்ளது என்பதை அறிவோம். வேறு சில பொருட்கள் திண்ம வடிவங்களின் கலவையைக் கொண்டுள்ளது என்பதையும் பார்க்கலாம். எனவே நாம் அதன் புறப்பரப்பளவையும் மற்றும் கனஅளவையும் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். திண்ம வடிவங்களின் பரப்பளவுகள் மற்றும் கனஅளவுகளின் பட்டியல் பின்னர் கொடுக்கப்படும்.

முயற்சி செய்

1. முன்னே உள்ள படத்தில் உள்ள படங்களை நாம் அறிந்த திண்ம வடிவ படங்களாக பிரிக்கவும்.
2. உன்னைச் சுற்றியுள்ள வடிவங்களின் கலவையுடன் 5 அதிகமான பொருட்களை யோசி. அந்த கலவையினால் உண்டாகும் வடிவங்களின் பெயர்களை கூறுக.

நாம் பல வகையான திண்ம வடிவங்களின் புறபரப்பு அளவு மற்றும் கனஅளவை நினைவுக்கூர்வோம்.

வ. எண்	திண்ம வடிவங்களின் பெயர்கள்	(படம்)	பக்கதள/வளைதள பரப்பளவு	மொத்த தள பரப்பளவு	கனஅளவு	பெயரிடல்
1.	கனச் செவ்வகம்		$2h(l+b)$	$2(lb+bh+hl)$	lbh	l:நீளம் b:அகலம் h:உயரம்
2.	கனச் சதுரம்		$4a^2$	$6a^2$	a^3	a:கனச் சதுரத்தின்பக்கம்
3.	நேர் பட்டகம்		அடியின்சுற்றளவு $\times$ உயரம்	பக்கதளபரப்பளவு $+2$(முடிவு பரப்பின் பரப்பளவு)	அடியின் பரப்பளவு $\times$ உயரம்	-
4.	ஒழுங்கான வட்ட உருளை		$2\pi rh$	$2\pi r(r+h)$	πr^2h	r:அடியின் ஆரம் h: உயரம்
5.	நேர் பிரமீட்		$\frac{1}{2}$ (அடியின் சுற்றளவு) $\times$ சாய்வு உயரம்	பக்கதள பரப்பளவு + அடியின்பரப்பளவு	அடியின்பரப்பளவில் $\frac{1}{3}$ பாகம் $\times$ உயரம்	-
6.	நேர்வட்ட கூம்பு		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$	r:அடியின் ஆரம் h:உயரம் l:சாய்வு உயரம்
7.	கோளம்		$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	r:ஆரம்
8.	அரை கோளம்		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$	r: ஆரம்

பட்டியலில் உள்ள வடிவங்களுக்கான புறதளப்பரப்பு மற்றும் மொத்த தளப்பரப்பு சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-1. கூம்பு வடிவ கூடாரத்தின் ஆரம் 7மீ மற்றும் அதன் உயரம் 10மீ. கூடாரத்தை அமைக்க 2மீ அகலமுள்ள துணி எவ்வளவு தேவைப்படும்? $\left[\pi = \frac{22}{7}\right.$

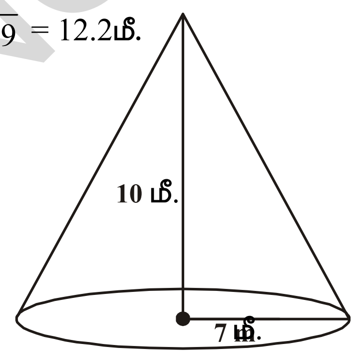
தீர்வு : கூம்பு வடிவ கூடாரத்தின் ஆரம் $(r) = 7$ மீ

உயரம்$(h) = 10$ மீ.

எனவே, கூம்பின் சாய்வு உயரம் $l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{49 + 100}$

$= \sqrt{149} = 12.2$மீ.



இங்கு கூம்பின் புறபரப்பு $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 12.2\ m^2$

$= 268.4$ மீ^{2}.

துணியின் பரப்பளவு $= 268.4$மீ^{2}.

துணியின் அகலம் = 2மீ.

உபயோகப்படுத்தப்பட்ட துணியின் நீளம் $= \frac{\text{பரப்பளவு}}{\text{அகலம்}} = \frac{268.4}{2} = 134.2$ மீ.

எடுத்துக்காட்டு-2. ஒரு எண்ணெய் டப்பா, உருளை வடிவத்தில் கீழ் உள்ள பரிமாணத்தில் உள்ளது. விட்டம் 2மீ, உயரம் 7மீ. டப்பாக்கு வர்ணம் தீட்ட வர்ணம் தீட்டுபவர் ஒரு மீ^{2}க்கு ரூ.3 கட்டணம் வசூல் செய்கிறார். எனில் 10 உருளைகளை வர்ணம் தீட்ட வர்ணம் தீட்டுபவர் எவ்வளவு கட்டணம் வசூலிப்பார்?

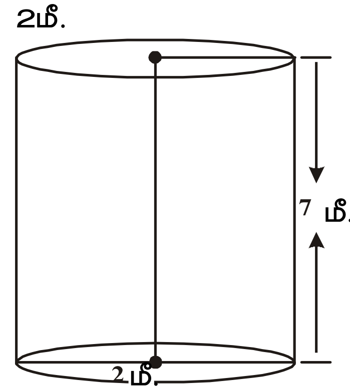
தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணெய் உருளையின் விட்டம் = 2மீ.

உருளையின் ஆரம் $= \frac{d}{2} = \frac{2}{2} = 1$ மீ.

உருளையின் மொத்த பரப்பளவு $= 2 \times \pi r(r + h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 1(1 + 7)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 8$



$$= \frac{352}{7} \text{ மீ}^2. = 50.28 \text{ மீ}^2$$

எனவே, உருளையின் மொத்த பரப்பளவு $= 50.28$ மீ^{2}

வர்ணம் தீட்ட 1மீ^{2} க்கு ஆகும் கட்டணம் $=$ ₹3.

10 உருளைக்கு வர்ணம் தீட்ட ஆகும் மொத்த செலவு $= 50.28 \times 3 \times 10$

$=$ ₹1508.40

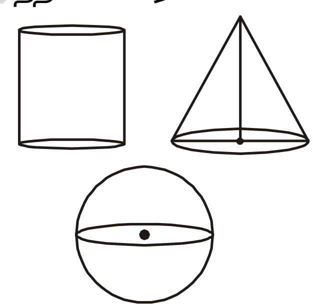
எடுத்துக்காட்டு-3. ஒரு கோளம், ஒரு உருளை மற்றும் ஒரு கூம்பு ஒரே அளவான ஆரத்தையும் உயரத்தையும் கொண்டுள்ளது. அவற்றின் வளைதள பரப்பின் விகிதங்களை கண்டுபிடி?

தீர்வு : 'r' என்பது கோளம், கூம்பு மற்றும் உருளைக்கான பொது ஆரம் எனக்கொள்க.

கோளத்தின் உயரம் = அதன் விட்டம் $= 2r$.

எனில், கூம்பின் உயரம் = உருளையின் உயரம் = கோளத்தின் உயரம்

$= 2r$.



l என்பது கூம்பின் சாய்வு உயரம் எனில் $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$= \sqrt{r^2 + (2r)^2} = \sqrt{5}r$$

$\because S_1 =$ கோளத்தின் வலதலபரப்பு $= 4\pi r^2$

$S_2 =$ உருளையின் வலதலபரப்பு, $2\pi rh = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

$S_3 =$ கூம்பின் வலதலபரப்பு $= \pi rl = \pi r \times \sqrt{5}\, r = \sqrt{5}\, \pi r^2$

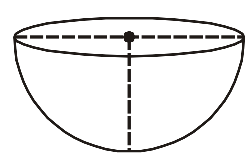
வலதலபரப்பின் விகிதங்கள்

$$\therefore\ S_1 : S_2 : S_3 = 4\pi r^2 : 4\pi r^2 : \sqrt{5}\, \pi r^2$$

$$= 4 : 4 : \sqrt{5}$$

எடுத்துக்காட்டு-4. ஒரு தொழிற்சாலை 1000 மெல்லிய இரும்பு தகடுகளால் ஆன அரைகோள கிண்ணங்களைத் தயாரிக்க நினைத்தது. அரைக்கோள கிண்ணத்தின் ஆரம் 21செ.மீ. எனில் மேற்கூறிய அரைகோள கிண்ணங்களைத் தயார் செய்யத் தேவையான இரும்புத் தகட்டின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி?

தீர்வு : அரைகோள கிண்ணத்தின் ஆரம் $(r) = 21$ செ.மீ



அரைகோள கிண்ணத்தின் புறப்பரப்பளவு $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= 2772 \text{ செ.மீ}^2.$$

எனவே, அரைகோள கிண்ணத்தின் புறப்பரப்பளவு $= 2772$ செ.மீ^{2}.

ஆகவே, ஒரு கிண்ணத்திற்குத் தேவையான இரும்புத் தகட்டின் பரப்பளவு $= 2772$ செ.மீ^{2}

1000 கிண்ணத்திற்குத் தேவையான இரும்புத் தகட்டின் மொத்த பரப்பளவு$= 2772 \times 1000$

$= 2772000$ செ.மீ^{2}

$= 277.2$ மீ^{2}

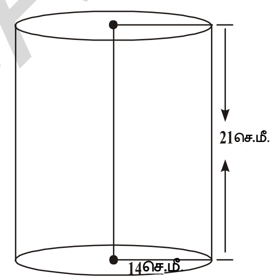
எடுத்துக்காட்டு-5. 14செ.மீ ஆரமும், 21செ.மீ உயரமும் கொண்ட ஒரு நேர் வட்ட உருளையின்

(i) அடியின் பரப்பளவு (அ) ஒவ்வொரு அடியின் பரப்பளவு (ii) வளைதளபரப்பு

(iii) மொத்த தளப்பரப்பு (iv) நேர்வட்ட உருளையின் கனஅளவு காண்க.

தீர்வு : உருளையின் ஆரம் (r) = 14செ.மீ

உருளையின் உயரம் (h) = 21செ.மீ



இங்கு (i) ஒவ்வொரு அடியின் பரப்பளவு $\pi r^2 = \frac{22}{7}(14)^2 = 616$ செ.மீ^{2}

(ii) வளைதள பரப்பளவு $= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 21 = 1848$செ.மீ^{2}.

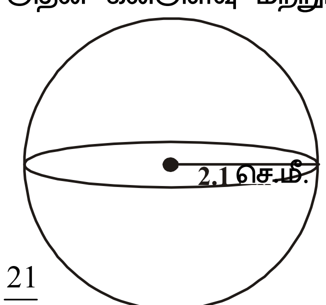
(iii) மொத்த தளபரப்பளவு $=$ $2 \times$அடியின் பரப்பளவு + வளைதளபரப்பளவு

$= 2 \times 616 + 1848 = 3080$ செ.மீ^{2}.

(iv) உருளையின் கனஅளவு $= \pi r^2 h =$ அடியின் பரப்பு$\times$உயரம்

$= 616 \times 21 = 12936$ செ.மீ^{3}.

எடுத்துக்காட்டு-6. ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 2.1செ.மீ எனில் அதன் கனஅளவு மற்றும் புறபரப்பளவை கண்டுபிடி. ($\pi = \frac{22}{7}$)



தீர்வு : கோளத்தின் ஆரம் $(r) = 2.1$ செ.மீ

கோளத்தின் புறப்பரப்பளவு $= 4\pi r^2$

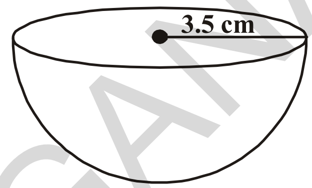
$$= 4 \times \frac{22}{7} \times (2.1)^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10}$$

$$= \frac{1386}{25} = 55.44 \text{ செ.மீ}^2.$$

கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.1 = 38.808 \text{ செ.மீ}^3.$$

எடுத்துக்காட்டு-7. ஆரம் 3.5செ.மீ அளவைக் கொண்ட அரை கோளத்தின் கனஅளவு மற்றும் மொத்ததள பரப்பளவைக் கண்டுபிடி. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



தீர்வு : கோளத்தின் ஆரம் $(r) = 3.5$ செ.மீ $= \frac{7}{2}$ செ.மீ

அரை கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{2}{3}\pi r^3$ ச.அ

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{539}{6} = 89.83 \text{ செமீ}^3$$

மொத்த தளபரப்பளவு $= 3\pi r^2$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{231}{2} = 115.5 \text{ செ.மீ}^2$$

பயிற்சி - 10.1

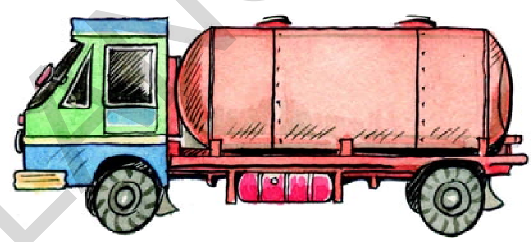
1. ஒரு கோமாளியின் தொப்பி நேர்வட்டக் கூம்பு வடிவில் 7செ.மீ ஆரமும் 24செ.மீ உயரமும் கொண்டுள்ளது. இதுபோல் 10 தொப்பிகளைத் தயார் செய்ய தேவைப்படும் தாளின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி.
2. ஒரு விளையாட்டு கம்பெனி நெட்டி பந்து (shuttle cocks)களுக்கு தேவையான 100 காகித உருளைகள் ஆர்டர் கொடுக்கிறது. உருளைக்கு தேவையான பரிமாண அளவு 35செ.மீ நீளம்/உயரம் மற்றும் அதன் ஆரம் 7செ.மீ. இதேபோல் 100 உருளைகள் செய்ய தேவைப்படும் மெல்லிய தாளின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி.
3. 6செ.மீ ஆரமும் மற்றும் 7செ.மீ உயரமும் கொண்ட ஒரு நேர் வட்ட கூம்பின் கனஅளவைக் கண்டுபிடி.
4. ஒரு கூம்பின் வளைதள பரப்பளவு, உருளையின் வளைதளபரப்பளவுக்கு சமம். ஆரம் ஒன்றாக இருந்தால், உருளையின் உயரத்திற்கும் கூம்பின் உயரத்திற்கும் உள்ள விகிதத்தைக் கண்டுபிடி.
5. ஒரு சுயஉதவிக்குழு 3செ.மீ ஆரம் மற்றும் 4செ.மீ உயரம் அளவுகொண்ட கோமாளித் தொப்பிகள் (கூம்பு வடிவு) தயார் செய்ய நினைக்கிறது. இருப்பில் உள்ள வண்ணத் தாள்கள் 1000ச.செ.மீ எனில் எத்தனை தொப்பிகள் அந்த தாள்களைக் கொண்டு தயார் செய்யலாம்?
6. ஒரு உருளை மற்றும் கூம்பு ஒரே ஆரம் கொண்ட அடியும் மற்றும் உயரங்கள் சமமாக உள்ளது. அவற்றின் கனஅளவு 3:1 என்ற விகிதத்தில் உள்ளது என நிரூபி.
7. ஒரு திண்ம இரும்புக் கம்பி உருளை வடிவில் உள்ளது. அதன் உயரம் 11செ.மீ மற்றும் அடி விட்டம் 7செ.மீ எனில் 50 கம்பிகளின் மொத்த கனஅளவைக் கண்டுபிடி.

8. ஒரு நெற்குவியலானது 12மீ விட்டம் மற்றும் 8மீ உயரம் கொண்ட கூம்பு வடிவில் உள்ளது. அதன் கனஅளவு என்ன? அந்த நெற்குவியலை மூட எவ்வளவு கித்தான் துணி தேவைப்படும்? ($\pi = 3.14$)

9. ஒரு கூம்பின் வளைதளபரப்பு 4070ச.செ.மீ மற்றும் அதன் விட்டம் 70செ.மீ. அதன் சாய்வு உயரம் என்ன?

10.2 திண்ம பொருள்களின் கலவையின் புறப்பரப்பளவு

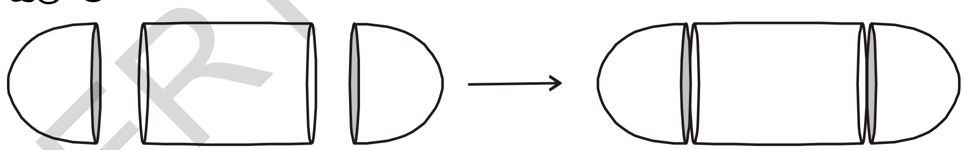
சில திண்ம வடிவங்களின் கலவைகளைக் கொண்ட திண்மங்களாகிய கோள, உருளை மற்றும் கூம்பின் திண்மங்களை பார்த்துள்ளோம். நாம் அன்றாட வாழ்கையில் சில மரப்பொருட்கள், வீட்டு பொருட்கள், மாத்திரைக் குப்பிகள், பாட்டில்கள், எண்ணெய் டேங்கர்கள்.. ஆகியவற்றைக் காண்கிறோம். நம் அன்றாட வாழ்கையில் ஐஸ்-கீரிம் உண்கிறோம். அதில் எத்தனை திண்ம வடிவங்கள் உள்ளது என சொல்ல முடியுமா? அது வழக்கமாக கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளத்தால் ஆனது.

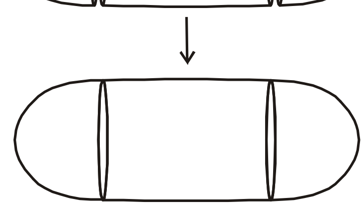


நாம் மற்றொரு எடுத்துக்காட்டாக எண்ணெய் டேங்கர்/நீர் டேங்கரை பார்ப்போம். அது தனி உருவ பொருளா? அது உருளை மற்றும் அதன் 2 முனைகள் இரண்டு அரைக்கோளத்தால் ஆனது என ஊகிக்கலாம்.

ஒரு சில காரணத்திற்காக நீங்கள் அதன் புறப்பரப்பையும் (அ) அதன் கன அளவையும் கண்டுபிடிக்க நினைத்தால் எப்படி செய்வீர்கள்? நாம் ஏற்கனவே படித்த திண்ம வடிவங்களோடு இதை வகைப்படுத்த முடியாது.

நாம் எண்ணெய் டேங்கர்கள் ஒரு உருளை மற்றும் அதன் இரு முனைகள் இரண்டு அரைக்கோளத்தால் ஒட்டிகொண்டுள்ளது என்பதை பார்த்தோம். அது கீழ் உள்ள படம் போல் இருக்கும்.

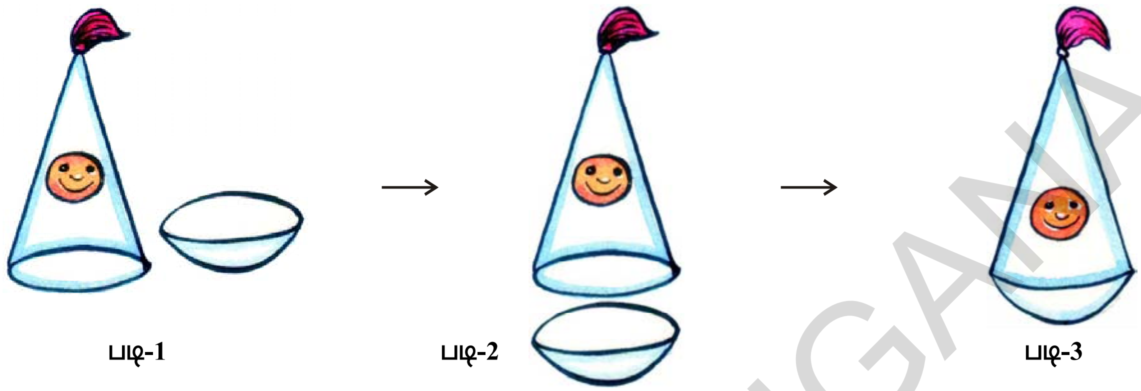




புதியதாக உண்டான பொருளின் புறப்பரப்பை கருத்தில் கொண்டால் நாம் இரண்டு அரைகோளத்தின் வளைதளபரப்பும் மற்றும் உருளையின் வளைதளபரப்பும் காண முடியும். புதிய திண்ம பொருளின் TSA = ஒரு அரைகோளத்தின் CSA + உருளையின் CSA + மற்றொரு அரைகோளத்தின் CSA

இங்கு TSA மற்றும் CSA என்பவை முறையே மொத்த தளபரப்பு மற்றும் வளைதளப் பரப்பு ஆகும். நாம் மற்றொரு எடுத்துக்காட்டை பார்ப்போம். தேவிகா ஒரு அரைக்கோளம் மற்றும் கூம்பு ஒன்றாக சேர்த்து ஒரு பொம்மை தயாரிக்க நினைத்தாள். நாம் அதற்கான படிகளைப் பார்ப்போம்.

முதலில் அவள் கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளத்தின் தட்டையான பகுதிகளை ஒன்று சேர்க்க கொண்டுவந்தாள். அந்த பொம்மையின் மிருதுவான பரப்பிற்கான அவள் கூம்பின் அடியின் ஆரமும் மற்றும் அரைக்கோளத்தின் ஆரமும் சமமாக இருக்குமாறு எடுத்துக்கொண்டாள். எனவே கீழே படிகள் காண்பிக்கபட்டுள்ளது.



படி-1 படி-2 படி-3

முடிவில் அழகான உருண்டையான அடி உடைய ஒரு பொம்மை கிடைத்தது. அந்த பொம்மை புறபரப்பிற்கு வர்ணம் அடிக்க அவருக்குத் தேவைப்படும் வர்ணத்தின் அளவு எவ்வளவு? அதை அவள் எப்படி அறிவாள்? அதற்கு அவளுக்கு பொம்மையின் புறபரப்பு அறிய அரைக்கோளத்தின் வளைதளப்பரப்பும் மற்றும் கூம்பின் வளைதளபரப்பும் தேவை.

எனவே நாம் இப்படி சொல்லலாம்.

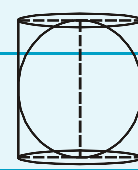
பொம்மையின் TSA = அரைக்கோளத்தின் CSA + கூம்பின் CSA

முயற்சி செய்

- உன் அன்றாட வாழ்வில் நீ சந்திக்கும் தெரிந்த திண்ம வடிவங்களைக் கொண்டு பல பொருட்களை செய் (இரண்டு (அ) அதற்கு மேல் கலவையுடன்)

[**குறிப்பு** : களிமண், பந்து, குழாய்கள், காகிதக் கூம்புகள், கனசதுரம், கனசெவ்வக பெட்டிகள்]

சிந்தித்து கலந்துரையாடு



ஒரு உருளை வடிவத்திற்குள் ஒரு கோளம் அமைந்துள்ளது. கோளத்தின் புறபரப்பு உருளை புறபரப்பிற்கு சமமா? ஆம் எனில் எப்படி?

எடுத்துக்காட்டு-8. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் அடி மற்றும் உயரம் முறையே 15செ.மீ மற்றும் 20செ.மீ. அது கர்ணத்தின் மீது சுழலுமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதனால் உண்டாகும் இரட்டைக் கூம்பின் கனஅளவு மற்றும் புறப்பரப்பைக் கண்டுபிடி. (π=3.14).

தீர்வு : ABC என்பது ஒரு செங்கோண முக்கோணம் எனில்

AB = 15செ.மீ, AC = 20 செ.மீ

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி

ΔABC யில் நமக்கு

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 15^2 + 20^2$

$BC^2 = 225 + 400 = 625$

$BC = \sqrt{625} = 25$ செ.மீ

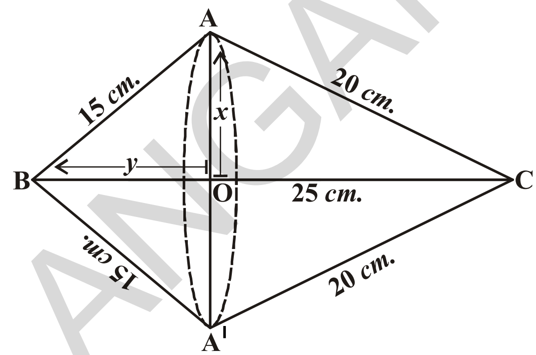
$OA = x$, மற்றும் $OB = y$ என கொள்க.

ABO மற்றும் ABC என்ற முக்கோணத்தில்

$\angle BOA = \angle BAC$ மற்றும் $\angle ABO = \angle ABC$

எனவே, கோ–கோ– விதியின் படி

$\Delta BOA \sim \Delta BAC$



$$\therefore \frac{BO}{BA} = \frac{OA}{AC} = \frac{BA}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{x}{20} = \frac{15}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{x}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{3}{5}, \quad \frac{x}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{5} \times 15, \quad x = \frac{3}{5} \times 20$$

$$\Rightarrow y = 9, \quad x = 12.$$

நமக்கு $OA = 12$ செ.மீ, மற்றும் $OB = 9$செ.மீ, $OC = BC - OB = 25 - 9 = 16$ செ.மீ

ABC ஆனது கர்ணத்தின் வழியே சுற்றிவிடப்பட்டால் படத்தில் உள்ளபடி நமக்கு இரட்டை கூம்பு கிடைக்கும்.

இரட்டை கூம்பின் கனஅளவு = CAA' கூம்பின் கனஅளவு + BAA' கூம்பின் கனஅளவு

$$= \frac{1}{3}\pi(OA)^2 \times OC + \frac{1}{3}\pi(OA)^2 \times OB$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times 12^2 \times 16 + \frac{1}{3}\pi \times 12^2 \times 9$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times 144(16+9)$$

$$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 144 \times 25 \text{ செ.மீ}^3$$

$$= 3768 \text{ செ.மீ}^3$$

குறிப்பு :

$$\frac{1}{3}\pi(OA^2)(OC+OB)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 12^2 \times (16+9)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 144 \times 25$$

இரட்டைக் கூம்பின் புறப்பரப்பளவு $= (CAA^{|}$ன் வளைதளப்பரப்பு)

$+$ (கூம்பின் $BAA^{|}$ன் வளைதளப்பரப்பு)

$= (\pi \times OA \times AC) + (\pi \times OA \times AB)$

$= (\pi \times 12 \times 20) + (\pi \times 12 \times 15)$ செ.மீ^{2}

$= 420\,\pi$ செ.மீ^{2}

$= 420 \times 3.14$ செ.மீ^{2}

$= 1318.8$ செ.மீ^{2}

எடுத்துக்காட்டு-9. அடுத்துள்ள படத்தில் குறிப்பிட்டதுபோல் ஒரு ராக்கெட் மரபொம்மை உருளையின் மேல் கூம்பு அமைப்புடன் வைக்கப்பட்டுள்ளது. ராக்கெட்டின் முழு உயரம் 26செ.மீ, கூம்புப் பகுதியின் உயரம் 6செ.மீ, கூம்புப் பகுதியின் அடியின் விட்டம் 5செ.மீ மற்றும் உருளைப் பகுதியின் அடியின் விட்டம் 3செ.மீ. கூம்புப் பகுதி ஆரஞ்சு வண்ணத்திலும் உருளைப் பகுதி மஞ்சள் நிறத்திலும் வண்ணம் தீட்டப்பட்டால், ராக்கெட்டின் ஒவ்வொரு வண்ணம் தீட்டப்பட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி. $(\pi = 3.14)$

தீர்வு : 'r' என்பது கூம்பின் அடி எனக்கொள்க. மற்றும் 'l'என்பது அதன் சாய்வு உயரம் என கொள்க. மேலும் r_1 என்பது உருளையின் ஆரம் மற்றும் h_1 என்பது உயரம் எனக்கொள்க.

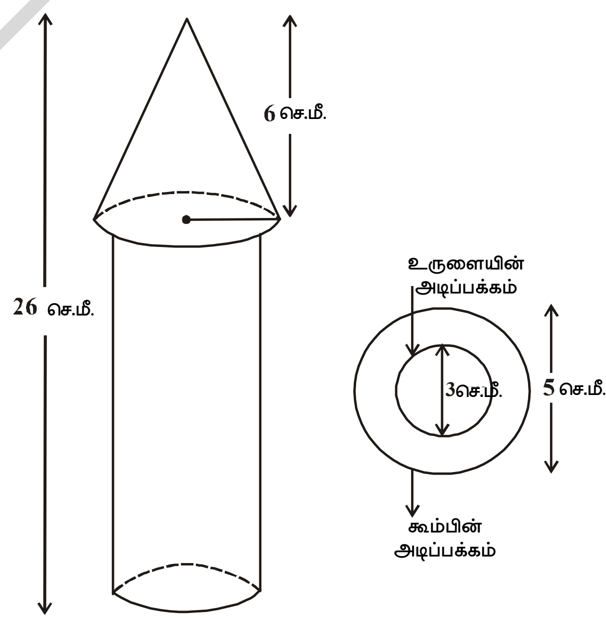
$r = 2.5$ செ.மீ $h = 6$ செ.மீ

$r_1 = 1.5$ செ.மீ $h_1 = 20$ செ.மீ

இங்கு $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$\Rightarrow \quad l = \sqrt{(2.5)^2 + 6^2}$

$l = \sqrt{6.25 + 36} = \sqrt{42.25} = 6.5$



இங்கு, ஆரஞ்சு வண்ணம் தீட்டுவதற்கான பரப்பளவு

= கூம்பின் வளைதளப்பரப்பு

$= \pi r l$

$= 3.14 \{2.5 \times 6.5\}$

$= 51.025$ செ.மீ ^{2}

மஞ்சள் வண்ணம் தீட்டுவதற்கான பரப்பளவு

= உருளையின் வளைதளப்பரப்பு + உருளையின் அடியின் பரப்பளவு

$= 2\pi r_1 h_1 + \pi r_1^2$

$= \pi r_1 (2h_1 + r_1)$

$= 3.14 \times 1.5\ (2\times20+1.5)$ செ.மீ^{2}

$= 3.14 \times 1.5 \times 41.5$ செ.மீ^{2}

$= 4.71 \times 41.5$ செ.மீ^{2}

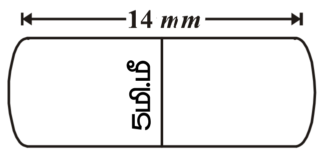
$= 195.465$ செ.மீ^{2}.

எனவே, மஞ்சள் வண்ணம் தீட்டுவதற்கான பரப்பளவு $= 195.465$ செ.மீ^{2}

பயிற்சி - 10.2

1. ஒரு பொம்மை அரைவட்டத்தின் மேல் நேராக கூம்பு அமைந்தது போல்(ஒரே விட்ட அளவுடன்) உள்ளது. கூம்பின் அடியின் விட்டம் மற்றும் உயரம் முறையே 6செ.மீ Ut ß m 4ù N.Á B Ï m. ùTômû U« u ×\ I TWû Td Li Ó©¥. $[\pi = 3.14]$

2. ஒரு நேரிய வட்ட உருளையான திண்ம வடிவம் ஒரு முனை அரைக்கோளத்தின் வடிவமும் மறுமுனை கூம்பின் வடிவமும் கொண்டுள்ளது. பொது அடியின் ஆரம் 8செ.மீ மற்றும் உருளைப் பகுதி மற்றும் கூம்புப் பகுதியின் உயரங்கள் 10செ.மீ மற்றும் 6செ.மீ ஆகும். திண்ம வடிவின் மொத்த புறபரப்பளவைக் கண்டுபிடி.$[\pi = 3.14]$



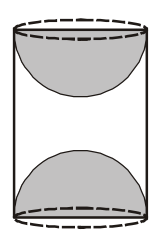
3. ஒரு மருந்து குப்பியானது உருளை வடிவத்தில் அதன் இரு முனைகள் அரைகோள வடிவத்திலும் உள்ளது. அதன் நீளம் 14மி.மீ மற்றும் அகலம் 5மி.மீ எனில் அதன் புறப்பரப்பைக் கண்டுபிடி.

4. 65க.செ.மீ கனஅளவைக் கொண்ட இரு கனசதுரங்கள் ஒன்றாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இதனால் கிடைக்கும் கனசெவ்வகத்தின் மொத்த புறபரப்பளவைக் கண்டுபிடி.

5. ஒரு நீர்தேக்கத்தொட்டியின் இரு முனைகள் அரைக்கோளம் வடிவம் உடைய உருளைப் போன்றுள்ளது. உருளையின் வெளி விட்டம் 1.4மீ மற்றும் நீளம் 8மீ எனில் வெளிப்புறம் வர்ணம் தீட்ட ஒரு ச.மீக்கு ரூ.20வீதம் என்ன செலவாகும்?

6. ஒரு கனசெவ்வக மரக்கட்டையிலிருந்து, கன செவ்வகத்தின் நீளத்தை விட்டமாக உடைய அரைகோளம் வெட்டி எடுக்கப்பட்டது. எனில் மீதி மரக்கட்டையின் புறப்பரப்பைக் கண்டுபிடி.

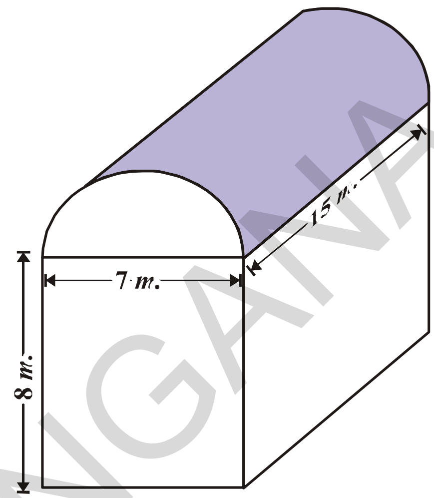
7. படத்தில் காட்டியதைப் போல் மரத்தால் ஆன ஒரு பொருள் அதன் இரண்டு முனைகளிலிருந்து அரைகோள வடிவங்களை வெட்டி எடுத்த உருளையைப் போல் உள்ளது. உருளையின் உயரம் 10செ.மீ மற்றும் அதன் அடி ஆரம் 3.5செ.மீ எனில் அந்த பொருளின் மொத்த தளபரப்பைக் கண்டுபிடி.



10.3 கலவை திண்ம வடிவங்களின் கனஅளவு

கனஅளவை ஒரு எடுத்துக்காட்டின் மூலம் புரிந்துகொள்வோம்.

சுரேஷ் கனசெவ்வகத்தின் மேல் அமைந்த அரைபாக உருளையின் அமைப்பைக் கொண்ட ஒரு கொட்டகையில் தொழிற்சாலை நடத்திவந்தான். அந்த கொட்டகையின் அடி 7மீ $\times$15மீ மற்றும் கன செவ்வகவடிவில் உயரம் 8மீ. அந்த கொட்டகையில் காற்றின் கன அளவு எவ்வளவு பிடிக்கும் என்று கண்டுபிடி? மேலும் அந்த கொட்டகையில் உள்ள கருவிகள் 300க.மீ இடத்தை அடைத்துக் கொள்கிறது. மேலும் அங்கு வேலை செய்யும் 20 வேலை ஆட்கள் ஒவ்வொருவரும் 0.08க.மீ சராசரியாக இடத்தை அடைத்துக் கொண்டால் அந்த கொட்டகையில் எவ்வளவு காற்று இருக்கும்?



கொட்டகையில் உள்ள காற்றின் கனஅளவு (கருவிகளும், ஆட்களும் இல்லாத போது) கனசெவ்வகத்தில் உள்ள காற்றின் கனஅளவு மற்றும் அரை உருளையின் காற்றின் கனஅளவும் சேர்ந்ததாகும். கனசெவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே 15மீ , 7மீ மற்றும் 8மீ ஆகும். அரை உருளையின் விட்டம் 7மீ மற்றும் அதன் உயரம் 15மீ.

எனவே,தேவையான கனஅளவு = கனசெவ்வகத்தின் கனஅளவு + $\frac{1}{2}$ உருளையின் கனஅளவு.

$$= \left[15\times7\times8+\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times15\right] \text{மீ}^3$$

$$= 1128.75 \text{ மீ}^3.$$

அடுத்து, கருவிகளால் ஆக்கிரமித்த பகுதி

$$= 300 \text{ மீ}^3.$$

வேலை ஆட்களால் ஆக்கிரமித்த பகுதி

$$= 20\times0.08 \text{ மீ}^3$$

$$= 1.6\text{மீ}^3$$

ஆகவே, ஆட்களும், கருவிகளும் உள்ளபோது காற்றின் கனஅளவு

$$= 1128.75 - (300.00 + 1.60)$$

$$= 1128.75 - 301.60 = 827.15 \text{ மீ}^3$$

குறிப்பு : நாம் கலவை திண்ம வடிவங்களை கணக்கிடும் போது, நாம் இரண்டு திண்ம வடிவங்களின் புறபரப்பை கணக்கிட இயலாது. ஏனெனில் அவற்றை நாம் இணைக்கும் போது சில பகுதிகளின் புறபரப்புகள் மறைந்துவிடலாம். ஆனால் இது நாம் கனஅளவை கணக்கிடும் போது நடக்காது. மேல் உள்ள எடுத்துக்காட்டின்படி திண்ம வடிவங்களை இணைக்கும் போது உண்டாகும் திண்மத்தின் கனஅளவு உண்மையில் உறுப்புகளின் கனஅளவின் கூடுதல் ஆகும்.

முயற்சி செய்

1. ஒரு கம்பியின் குறுக்கு வெட்டியின் விட்டம் 5% குறையும் போது, அதன் கனஅளவு சமமாக இருக்கவேண்டுமெனில் அதன் நீளத்தில் எத்தனை சதவீதம் அதிகரிக்கவேண்டும்?
2. கோளம் மற்றும் கனசதுரத்தின் புறப்பரப்பளவு சமம். அதன் கனஅளவுகளின் விகிதத்தைக் கண்டுபிடி.

நாம் மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-10. ஒரு பொம்மையின் திண்ம வடிவம் நேர்வட்ட உருளை வடிவத்திலும் அதன் ஒரு முனை அரைக்கோள வடிவத்திலும் மறுமுனை கூம்பு வடிவத்திலும் உள்ளது. அதன் பொது விட்டம் 4.2செ.மீ மற்றும் உருளை மற்றும் கூம்பின் உயரம் முறையே 12செ.மீ மற்றும் 7செ.மீ ஆகும். திண்ம வடிவ பொம்மையின் கனஅளவைக் கண்டுபிடி.

[$\pi = \frac{22}{7}$ ஐ பயன்படுத்து]

தீர்வு : கூம்பின் உயரம் $h_1 = 7$செ.மீ

உருளைப் பகுதியின் உயரம் $h_2 = 12$ செ.மீ

ஆரம் $(r) = \frac{4.2}{2} = 2.1 = \frac{21}{10}$ செ.மீ

திண்ம வடிவ பொம்மையின் கன அளவு

= கூம்பின் கனஅளவு + உருளையின் கனஅளவு + அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{2}{3}\pi r^3$$

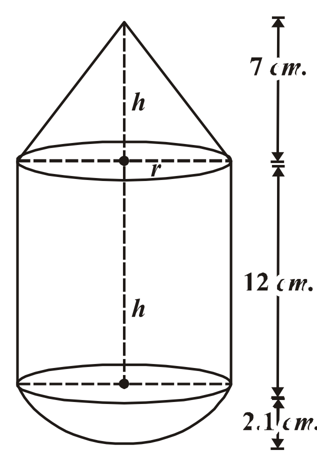
$$= \pi r^2 \left[\frac{1}{3}h_1 + h_2 + \frac{2}{3}r\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{10}\right)^2 \times \left[\frac{1}{3}\times 7 + 12 + \frac{2}{3}\times\frac{21}{10}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[\frac{7}{3} + \frac{12}{1} + \frac{7}{5}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[\frac{35+180+21}{15}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \frac{236}{15} = \frac{27258}{125} = 218.064 \text{ செமீ}^3$$



எடுத்துக்காட்டு-11. ஒரு ஐஸ்கீரிம் நிறைந்த உருளை வடிவ பாத்திரத்தின் விட்டம் 12செ.மீ மற்றும் அதன் உயரம் 15செ.மீ இந்த ஐஸ்கீரிம் கூம்பின் மேல் அரைக்கோளம் அமைந்த வடிவங்களில் 10 குழந்தைகளுக்கு சமமாக நிரப்பி கொடுக்கப்படுகிறது. கூம்பின் உயரம் அதன் அடியின் விட்டத்தைவிட இரண்டு மடங்கு எனில் ஐஸ்கீரிம் கூம்பின் விட்டத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : ஐஸ்கீரிம் கூம்பின் அடியின் ஆரம் $= x$ செ.மீ என்க.

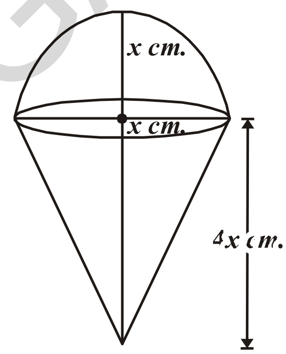
$\therefore$ விட்டம் $= 2x$ செ.மீ

ஐஸ்கீரிம் கூம்பின் உயரம்

$= 2$ (விட்டம்) $= 2(2x) = 4x$ செ.மீ

ஐஸ்கீரிம் கூம்பின் கனஅளவு

$=$ கூம்பின் கனஅளவு $+$ அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு.



$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{1}{3}\pi x^2 (4x) + \frac{2}{3}\pi x^3$$

$$= \frac{4\pi x^3 + 2\pi x^3}{3} = \frac{6\pi x^3}{3}$$

$= 2\pi x^3$ செ.மீ^{3}

உருளைப் பாத்திரத்தின் விட்டம் $= 12$ செ.மீ

அதன் உயரம் $(h) = 15$ செ.மீ

$\therefore$ உருளைப் பாத்திரத்தின் கனஅளவு $= \pi r^2 h$

$= \pi (6)^2\ 15$

$= 540\pi$ செ.மீ^{3}

ஐஸ்கீரிம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை = 10

$$\frac{\text{உருளை கன்டெய்னரின் கனஅளவு}}{\text{ஐஸ்கீரிம் கூம்பின் கனஅளவு}} = 10$$

$$\Rightarrow \quad \frac{540\pi}{2\pi x^3} = 10$$

$$2\pi x^3 \times 10 = 540\pi$$

$$\Rightarrow \quad x^3 = \frac{540}{2 \times 10} = 27$$

$$\Rightarrow \quad x^3 = 27$$

$\Rightarrow \quad x^3 = 3^3$

$\Rightarrow \quad x = 3$

$\therefore$ ஐஸ்கீரிம் கூம்பின் விட்டம் $2x = 2(3) = 6$செ.மீ

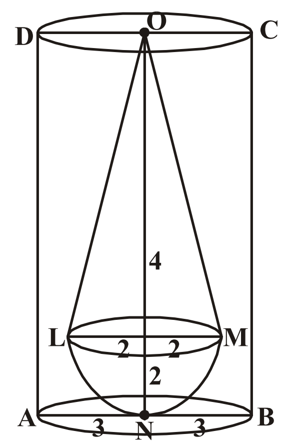
எடுத்துக்காட்டு-12. ஒரு அரைக்கோளத்தின் மேல் நிற்க வைக்கப்பட்டுள்ள நேர் வட்டக் கூம்பின் திண்ம வடிவம் நீர் நிரம்பியுள்ள நேர் வட்ட உருளையில் அதன் அடி தொடுமாறு தலைகீழாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. உருளை ஆரம் 3செ.மீ மற்றும் உயரம் 6செ.மீ கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது அந்த உருளையில் மீதமுள்ள தண்ணீரின் கனஅளவைக் கண்டுபிடி. அரைக்கோளத்தின் ஆரம் 2செ.மீ மற்றும் கூம்பின் உயரம் 4செ.மீ ஆகும். $\left[\pi = \frac{22}{7}\right.$ என எடுத்துக்கொள் $\left.\right]$

தீர்வு : இங்குள்ள படத்தில்

ABCD என்பது உருளை மற்றும் LMN என்பது ஒரு அரைக்கோளம்.

OLM என்பது ஒரு கூம்பு. கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளம் கொண்ட திண்ம வடிவமானது நீருள்ள உருளையில் மூழ்கி உள்ளது என்பதை நாம் அறிவோம். பிறகு திண்ம வடிவத்திற்கு சமமான கனஅளவைக் கொண்ட நீரை இடமாற்றம் செய்து வை.

உருளையின் கனஅளவு $= \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi$ செ.மீ^{3}



அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\times\pi\times 2^3 = \frac{16}{3}$ செ.மீ^{3}

கூம்பின் கனஅளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\times\pi\times 2^2\times 4 = \frac{16}{3}$ செ.மீ^{3}

கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{16}{3}\pi + \frac{16}{3}\pi$

$= \frac{32}{3}\pi$

உருளையில் விடப்பட்ட நீரின் கனஅளவு

= உருளையின் கனஅளவு – கூம்பு மற்றும் அரைகோளத்தின் கனஅளவு

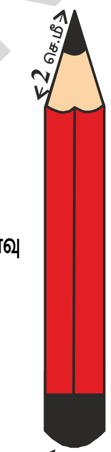
$=$ உருளையின் கனஅளவு $- \frac{32\pi}{3}$

$= 54\pi - \frac{32\pi}{3}$

$= \frac{162\pi - 32\pi}{3} = \frac{130\pi}{3}$

$$= \frac{130}{3} \times \frac{22}{7} = \frac{2860}{21} = 136.19 \text{ செமீ}^3$$

எடுத்துக்காட்டு-13. ஒரு உருளை வடிவம் கொண்ட எழுதுகோலை அதன் உயரம் குறையாதவாறு அதன் ஒரு முனை சரியான கூம்பு வடிவில் கூர்மையாக்கப்படுகிறது. அந்த எழுதுகோலின் விட்டம் 1செ.மீ மற்றும் கூம்பின் உயரம் 2செ.மீ. சீவப்பட்ட பகுதியின் கனஅளவை கணக்கிடுக. தசம எண்ணில் சீவப்பட்ட பகுதியின் கனஅளவைக் கணக்கிடுக. தசம எண்ணில் விடை இருந்தால் அதை இரண்டு தான எண்ணிற்கு திருத்தி சரியான விடையை கூறு. [$\pi = \frac{22}{7}$ ஐ பயன்படுத்து]



தீர்வு : எழுதுகோலின் விட்டம் = 1செ.மீ

எனவே 1 எழுதுகோலின் ஆரம் $(r) = 0.5$ செ.மீ

கூம்பு பகுதியின் உயரம் $= h = 2$செ.மீ

சீவப்பட்ட பகுதியின் கன அளவு = 2செ.மீ நீளமும் அடி 0.5செ.மீ ஆரமும் கொண்ட உருளையின் கனஅளவு

− உருளையில் உண்டாகும் கூம்பின் கனஅளவு

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{355}{113} \times (0.5)^2 \times 2 \text{ செமீ}^3 = 1.05 \text{ செமீ}^3$$

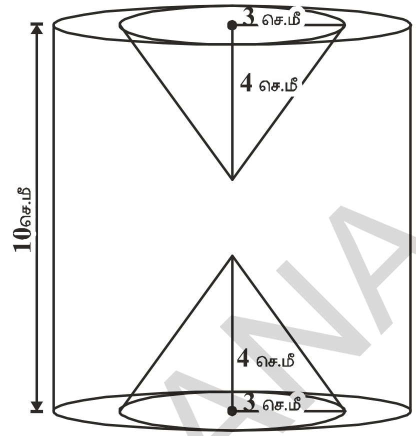
பயிற்சி-10.3

1. ஒரு இரும்புத் தூணின் உருளைப் பகுதி 2.8மீ உயரமும் மற்றும் விட்டம் 20செ.மீ. அதன் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ள கூம்பின் உயரம் 42செ.மீ கொண்டுள்ளது. 1க.செ.மீ இரும்பு 7.5கிராம் எனில் இரும்புத் தூணின் எடையைக் கண்டுபிடி.

2. ஒரு பொம்மை ஒரு அரைகோள வடிவின் மேல் வைக்கப்பட்ட கூம்பின் அடியும் அரைகோளத்தின் அடியும் இணைத்து செய்யப்பட்டுள்ளது. கூம்பின் அடியின் ஆரம் 7செ.மீ மற்றும் அதன் கனஅளவு அரைகோளத்தின் $\frac{3}{2}$ பாகம் ஆகும். கூம்பின் உயரத்தையும், பொம்மையின் புறபரப்பையும் கணக்கிட்டு தசமஎண் எனில் இரண்டு தான எண்ணிற்கு திருத்து. [$\pi = \frac{22}{7}$ என எடுத்துக்கொள்க]

3. 7செ.மீ பக்கமுள்ள ஒரு கனசதுரத்தில் ஏற்படும் மிகப்பெரிய கூம்பின் கனஅளவைக் கண்டுபிடி.

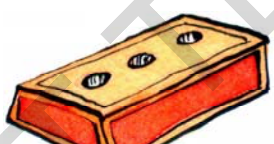
4. நீர் நிரம்பியுள்ள ஒரு உருளை வடிவ தொட்டி 5செ.மீ ஆரமும் 9.8செ.மீ நீளமும் கொண்டுள்ளது. ஒரு அரைகோளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்ட ஒரு நேர் வட்ட கூம்பு தொட்டியில் அழுத்திவைக்கப்பட்டது. அரைக்கோளத்தின் ஆரம் 3.5செ.மீ மற்றும் அரைக்கோளத்திற்கு வெளியே உள்ள கூம்பின் உயரம் 5செ.மீ ஆகும். தொட்டியில் இருந்து வெளியேறிய நீரின் கனஅளவைக் கண்டுபிடி. $\left[\pi = \frac{22}{7}\right.$ என எடுத்துக்கொள்க $\left.\right]$

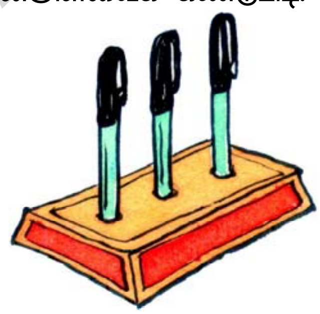


5. அடுத்துள்ள படத்தில், உருளையின் உயரம் 10செ.மீ மற்றும் விட்டம் 7செ.மீ படத்தில் உள்ளது போல் 3செ.மீ ஆரமும் 4செ.மீ உயரமும் கொண்ட இரண்டு சம கூம்புகள் ஓட்டையிட்டு வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது. மீதமுள்ள திண்ம வடிவத்தின் கனஅளவைக் கண்டுபிடி.

6. 1.4செ.மீ விட்டம் கொண்ட கோள வடிவ கோலிகள் 7செ.மீ விட்டம் மற்றும் நீர் நிரம்பியுள்ள ஒரு உருளை வடிவ பீக்கரில் போடப்படுகிறது. 5.6செ.மீ அளவிற்கு நீர்மட்டம் உயர எத்தனை கோலிகள் அந்த குவளையில் போடலாம்?

7. மரத்தினால் ஆன கனசெவ்வக வடிவில் பேனா வைப்பதற்கான மூன்று குழிகளைக் கொண்ட பேனா மேடை செய்யபடுகிறது. கனசெவ்வகத்தின் அளவுகள் 15செ.மீ, 10செ.மீ, 3.5செ.மீ. ஒவ்வொரு குழியின் ஆரம் 0.5செ.மீ மற்றும் ஆழம் 1.4செ.மீ ஆகும். பேனா மேடையில் உள்ள மரத்தின் கனஅளவைக் கண்டுபிடி.



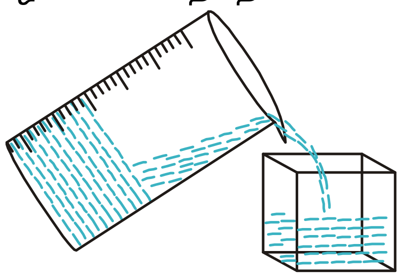


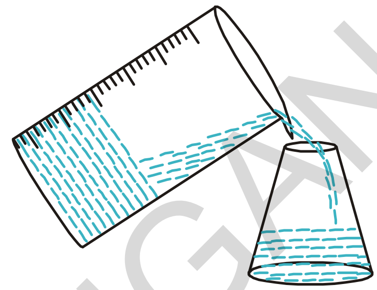
10.4 ஒரு திண்ம வடிவில் இருந்து மற்றொன்றுக்கு மாற்றுதல்

கனசெவ்வக வடிவில் உள்ள மெழுகை உருக்கி அதிலிருந்து மெழுகுவர்த்திகளை சுயஉதவி பெண்கள் குழு (DWACRA) தயார் செய்கிறது. துப்பாக்கி தொழிற்சாலையில் கனசதுர வடிவில் உள்ள ஈயத்தை உருக்கி அதிலிருந்து கோள வடிவ தோட்டாக்கள் தயாரிக்கபடுகின்றது. பொற்கொல்லர் தங்கத்தை உருக்கி அதிலிருந்து பல விதமான அணிகலன்களை தயார் செய்கிறார். இதில் எல்லாவற்றிலும் திண்ம வடிவங்கள் ஒரு வடிவில் இருந்து மற்றொரு வடிவிற்கு மாறுபடுகிறது. ஆனால் இந்த முறையில் அனைத்து கனஅளவுகளும் ஒன்றாக இருக்கும்.

இது எப்படி நடக்கிறது? உனக்கு மெழுகுவர்த்தி ஒரு சிறப்பான வடிவில் வேண்டும் என்றால் அதை நெருப்பில் உருக்கி அந்த மெழுகை ஒரு உலோக பாத்திரத்தில் ஊற்ற வேண்டும். பின்னர் அதை நீ விரும்பும் வடிவில் உள்ள பாத்திரத்தில் மாற்ற வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, உருளைவடிவில் ஒரு மெழுகுவர்த்தியை எடுத்து அதை கோள வடிவில் உள்ள ஒரு பாத்திரத்தில் ஊற்று.

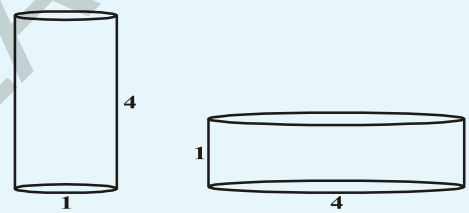
அது குளிர்ந்த பிறகு நமக்கு கோளத்தின் வடிவில் மெழுகுவர்த்தி கிடைக்கும். புது மெழுகுவர்த்தியின் கனஅளவும் அதற்கு முன் இருந்து மெழுகுவர்த்தியின் கனஅளவும் ஒன்றாகவே இருக்கும். இதிலிருந்து நாம் ஒரு பொருளில் இருந்து மற்றொரு பொருளுக்கு மாற்றும் போதோ (அ) ஒரு திரவ பொருள் ஒரு குறிப்பிட்ட வடிவம் உள்ள பாத்திரத்தில் இருந்து மற்றொரு வடிவம் உள்ள பாத்திரத்தில் ஊற்றும் போதும் அதன் கனஅளவுகள் சமம். கீழ் உள்ள படத்தை கவனிக்கலாம்.





சிந்தித்து கலந்துரையாடு

அடுத்துள்ள படத்தில் எந்த பீப்பாயில் அதிக நீர் பிடிக்கும்? உன் நண்பர்களுடன் கலந்துரையாடு?



நாம் கலந்துரையாடுவதை புரிந்து கொள்ள மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-14. மாதிரி களிமண்ணால் உண்டான கூம்பின் உயரம் 24செ.மீ மற்றும் ஆரம் 6செ.மீ. ஒரு குழந்தை அதை கோள வடிவிற்கு மாற்றியது. கோளத்தின் ஆரத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : கூம்பின் கனஅளவு $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ செமீ^{3}

r என்பது கோளத்தின் ஆரம். எனில் அதன் கனஅளவு $\frac{4}{3}\pi r^3$

கூம்பு வடிவில் உள்ள களிமண்ணின் கனஅளவும், கோளத்தின் கனஅளவும் ஒன்றே. எனவே,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi \times 6 \times 6 \times 24$$

$$r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3 \times 3 \times 3 \times 8$$

$$r^3 = 3^3 \times 2^3$$

$$r = 3 \times 2 = 6$$

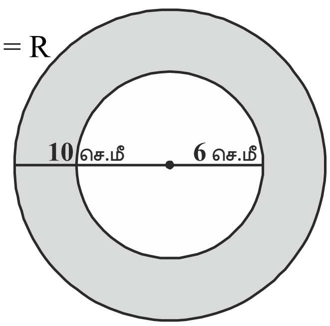
கோளத்தின் ஆரம் 6செ.மீ

இதை செய்

1. 1செ.மீ விட்டமும் 8செ.மீ நீளமும் உள்ள ஒரு தாமிரக் கம்பி 18மீ நீளமுள்ள ஒரே அடர்த்தியுள்ள கம்பியாக செய்யப்பட்டது. எனில் அந்த கம்பியின் தடிப்பைக் காண்.
2. பார்வதியின் வீட்டு மாடியில் ஒரு உருளை வடிவ நீர்த்தொட்டி உள்ளது. கனசெவ்வகவடிவில் உள்ள நீர்சேகரிக்கும் தொட்டியில் (நிலபரப்புக்கு கீழே அமைக்கப்பட்ட தொட்டி) இருந்து தொட்டிக்கு நீர் நிரப்பப்படுகிறது. நீர் சேகரிக்கும் தொட்டியின் பரிமாணம் 1.57 மீ $\times$ 1.44 மீ $\times$ 9.5 செ.மீ. நீர்தொட்டியின் ஆரம் 60செ.மீ மற்றும் உயரம் 95 செ.மீ நீர்த்தொட்டி நிறைந்த பின்னர் நிலத்தடி நீர்சேகரிக்கும் தொட்டியில் உள்ள நீரின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி. நீர்த்தொட்டியை, நீர் தேக்க தொட்டியுடன் அதன் கொள்ளளவை ஒப்பிடுக.$(\pi = 3.14)$

எடுத்துக்காட்டு-15. ஒரு உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் உட்புறம் மற்றும் வெளிபுற விட்டம் 6செ.மீ மற்றும் 10செ.மீ ஆகும். அதை உருக்கி பின்னர் அது 14செ.மீ விட்டம் உடைய திண்ம உருளையாக மாற்றப்படுகிறது. அந்த உருளையின் உயரம் என்ன?

தீர்வு : ஒரு உள்ளீடற்ற அரைகோளத்தின் ஆரம் $= \frac{10}{2} = 5$ செ.மீ $= R$



ஒரு உள்ளீடற்ற அரைகோளத்தின் உட்புற விட்டம் $= \frac{6}{2} = 3$செ.மீ $= r$

உள்ளீடற்ற அரைகோளத்தின் கனஅளவு

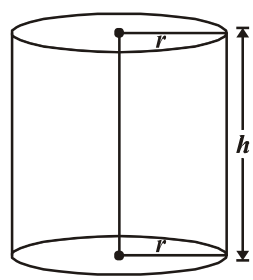
= வெளிபுற கனஅளவு – உட்புற கனஅளவு

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)$$

$$= \frac{2}{3}\pi (5^3 - 3^3)$$

$$= \frac{2}{3}\pi (125 - 27)$$



$= \frac{2}{3}\pi \times 98$ செ.மீ^{3} $= \frac{196\pi}{3}$ செ.மீ^{3} ...(1)

உள்ளீடற்ற அரைகோளத்தை உருக்கி அதை திண்ம உருளையாக மாற்றும்போது அதன் கனஅளவு சமமாக இருக்கும்.

உருளையின் விட்டம் = 14செ.மீ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

உருளையின் உயரம் $= h$ எனக் கொள்க

$\therefore$ உருளையின் கனஅளவு $= \pi r^2 h$

$= \pi \times 7 \times 7 \times h$ செ.மீ^{3} $= 49\pi h$ செ.மீ^{3} ...(2)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனையின் படி

உள்ளீடற்ற அரைகோளத்தின் கனஅளவு = உருளையின் கனஅளவு

$$\frac{196}{3}\pi = 49\,\pi h$$ [சமன்பாடு (1) மற்றும் (2)லிருந்து]

$$\Rightarrow \quad h = \frac{196}{3 \times 49} = \frac{4}{3} \text{ செ.மீ}$$

ஆகவே, உருளையின் உயரம் = 1.33செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு-16. ஒரு திரவம் நிரப்பப்பட்ட அரைகோளக் கிண்ணத்தின் உள் ஆரம் 16செ.மீ அந்த திரவமானது 5செ.மீ விட்டமும், 6செ.மீ உயரமும் கொண்ட உருளை பாட்டிலில் நிரப்ப வேண்டும். எனவே அந்த கிண்ணத்தை காலி செய்ய எத்தனை பாட்டில்கள் தேவைப்படுகிறது?

தீர்வு : அரைகோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{2}{3}\pi r^3$

அரைகோளத்தின் உள் ஆரம் $r = 15$ செ.மீ.

$\therefore$ அரைகோளக் கிண்ணத்தில் உள்ள திரவத்தின் கனஅளவு

$$= \frac{2}{3}\pi(15)^3 \text{ செமீ}^3$$

$$= 2250\,\pi \text{ செ.மீ}^3$$

இந்த திரவத்தை உருளை வடிவ பாட்டில்களில் நிரப்ப வேண்டும். ஒவ்வொரு பாட்டிலின் உயரம் $(h) = 6$ செ.மீ.

உருளை பாட்டிலின் ஆரம் $(\mathrm{R}) = \frac{5}{2}$ செ.மீ.

$\therefore$ 1 உருளை பாட்டிலின் கனஅளவு $= \pi r^2 h$

$$= \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 6$$

$$= \pi \times \frac{25}{4} \times 6 \text{ செமீ}^3 = \frac{75}{2}\,\pi \text{ செமீ}^3$$

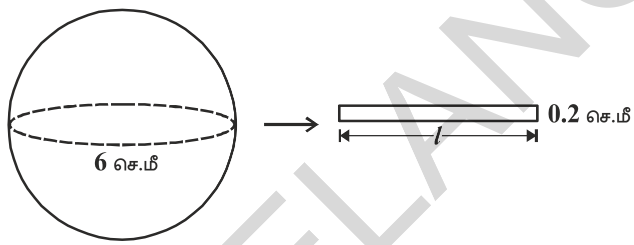
தேவையான உருளை பாட்டில்களின் எண்ணிக்கை$= \dfrac{\text{அரைகோள கிண்ணத்தின் கனஅளவு}}{\text{1 உருளை பாட்டிலின் கனஅளவு}}$

$$= \frac{2250\pi}{\frac{75}{2}\pi} = \frac{2\times 2250}{75} = 60.$$

எடுத்துக்காட்டு-17. ஒரு உலோக கோளத்தின் விட்டம் 6செ.மீ அதை உருக்கி அதை ஒரு கம்பியாக இழுக்கும்போது அதன் குறுக்கு பகுதியின் விட்டம் 0.2செ.மீ. கம்பியின் நீளத்தை கண்டுபிடி.

தீர்வு : உலோக கோளத்தின் விட்டம் = 6செ.மீ

$\therefore$ உலோக கோளத்தின் ஆரம் = 3செ.மீ



உருளை வயரின் குறுக்குப் பகுதியின் விட்டம் = 0.2செ.மீ

உருளை வயரின் குறுக்குப் பகுதியின் ஆரம் = 0.1செ.மீ

வயரின் நீளம் l செ.மீ எனக் கொள்க.

உலோக கோளம் உருளை வடிவில் மாற்றபடுவதால் வயரின் நீளம் hசெ.மீ ஆகும்.

$\therefore$வயரில் பயன்படுத்தப்பட்ட உலோகத்தின் கனஅளவு = கோளத்தின் கனஅளவு.

$$\pi\times(0.1)^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times 3^3$$

$$\pi\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times 27$$

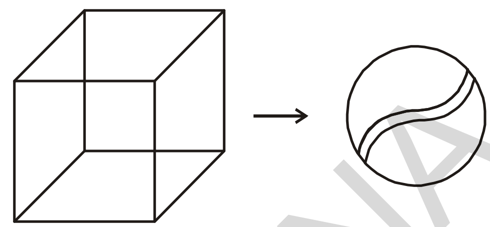
$$\pi \times \frac{1}{100} \times h = 36\pi$$

$$h = \frac{36\pi\times 100}{\pi}\text{செ.மீ}$$

$$= 3600 \text{ செ.மீ.} = 36 \text{ மீ.}$$

$\therefore$ கம்பியின் நீளம் 36மீ.

எடுத்துக்காட்டு-18. 44செ.மீ பக்க அளவுடைய ஈய கனசதுர வடிவத்தை 4செ.மீ விட்டமுள்ள எத்தனை கோள வடிவ பந்துகளாக மாற்றலாம்?



தீர்வு : ஈய கனசதுரத்தின் பக்கம் = 44 செ.மீ.

ஈய கனசதுரத்தின் ஆரம் $= \frac{4}{2}$ செ.மீ $= 2$ செ.மீ

இங்கு, கோள வடிவ பந்துகளின் கனஅளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 2^3 \text{ செமீ}^3$$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8 \text{ செமீ}^3$$

x கோள வடிவ பந்துகளின் கனஅளவு $= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x \text{ cm}^3$ செமீ^{3}

நாம் அறிவது

x கோள வடிவ பந்துகளின் கனஅளவு = ஈய கனசதுரத்தின் கனஅளவு

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x = (44)^3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x = 44\times 44\times 44$$

$$\Rightarrow x = \frac{44\times 44\times 44\times 3\times 7}{4\times 22\times 8}$$

$$x = 2541$$

$\therefore$ கோள வடிவ பந்துகளின மொத்த எண்ணிக்கை = 2541

எடுத்துக்காட்டு-19. ஒரு பெண்கள் சுயஉதவிக்குழு (DWACRA) 66செ.மீ, 42செ.மீ, 21செ.மீ அளவுகள் கொண்ட கனசெவ்வக வடிவில் உள்ள மெழுகைக் கொண்டு 4.2செ.மீ விட்டமும் மற்றும் 2.8செ.மீ உயரமும் கொண்ட உருளை வடிவ மெழுகுவர்த்திகளை தயாரித்தது எனில் தயாரித்த மெழுகுவர்த்திகளின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடி..

தீர்வு : செவ்வக வடிவ திண்ம மெழுகின் கனஅளவு $= lbh$

$$= (66\times 42\times 21) \text{ செ.மீ}^3.$$

உருளை வடிவ மெழுகுவர்த்தியின் ஆரம் $= \frac{4.2}{2}$ செ.மீ $= 2.1$ செ.மீ.

உருளை வடிவ மெழுகுவர்த்தியின் உயரம் = 2.8செ.மீ

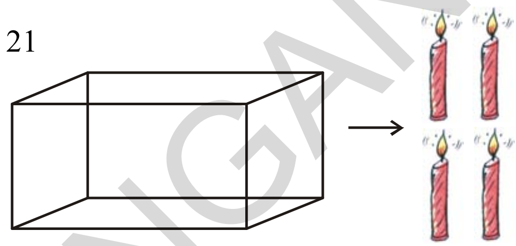
மெழுகுவர்த்தியின் கனஅளவு $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times (2.1)^2 \times 2.8$$

x உருளை மெழுகுவர்த்திகளின் கனஅளவு $= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x$

$\because$ x உருளை மெழுகுவர்த்தியின் கனஅளவு = செவ்வக வடிவில் உள்ள மெழுகின் கனஅளவு

$$\therefore \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x = 66 \times 42 \times 21$$



$$x = \frac{66 \times 42 \times 21 \times 7}{22 \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8}$$

$$= 1500$$

எனவே, உருளை வடிவ மெழுகுவர்த்திகளின் எண்ணிக்கை = 1500

பயிற்சி - 10.4

1. 4.2செ.மீ ஆரம் உள்ள ஒரு உலோக கோளத்தை உருக்கி அதை திரும்பவும் 6செ.மீ ஆரம் உள்ள உருளை வடிவில் உருக்கினால், அந்த உருளையின் உயரம் என்ன?
2. 6செ.மீ, 8செ.மீ மற்றும் 10செ.மீ ஆரங்களை உடைய உலோக கோளங்களை உருக்கி அதை ஒரு தனி திண்ம கோளமாக மாற்றினால். கோளத்தின் ஆரத்தைக் கண்டுபிடி.
3. 7மீ விட்டம் மற்றும் 20மீ ஆரம் கொண்ட ஒரு கிணற்றைத் தோண்டி, அந்த மண்ணை 22மீ × 14மீ அளவுடைய மேடையாக மாற்றினால், மேடையின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.
4. 14மீ விட்டமும், 15மீ ஆழமும் உள்ள கிணற்றைத் தோண்டும் போது கிடைக்கும் மண்ணை 7மீ அகலம் கொண்ட வட்ட வலய அமைப்பில் நிரப்பப்பட்டது எனில் வட்டவலயத்தின் உயரம் என்ன?
5. 12செ.மீ விட்டமும் மற்றும் 15செ.மீ உயரமும் கொண்ட நேர் வட்ட உருளை வடிவ பாத்திரத்தில் ஐஸ்கீரிம் நிரம்பி உள்ளது. இந்த ஐஸ்கிரீமை 12செ.மீ உயரமும் 6செ.மீ விட்டமும் கொண்ட கூம்புகளில் மேலே அரைகோள வடிவில் இருக்குமாறு நிரப்ப வேண்டும். ஐஸ்கிரீம் நிரம்பிய கூம்புகளின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடி.
6. 5.5செ.மீ ×10செ.மீ × 3.5செ.மீ அளவுகளை உடைய கனசெவ்வகங்களாக மாற்ற 1.75செ.மீ விட்டம், 2மி.மீ தடிப்பை உடைய எத்தனை வெள்ளிக்காசுகள் தேவை?
7. ஒரு பாத்திரம் ஒரு தலைகீழ் கூம்பு வடிவத்தில் உள்ளது. அதன் உயரம் 8செ.மீ மற்றும் அதன் மேல் பகுதி 5செ.மீ ஆரம் கொண்டது. விளிம்பு வரை நீர் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொன்றும் 0.5ஆரம் கொண்ட கோள வடிவில் உள்ள ஈய குண்டுகள் அந்த பாத்திரத்தில் விடும்போது $\frac{1}{4}$ பாகம் தண்ணீர் வெளியேற்றபடுகிறது. எத்தனை ஈய குண்டுகள் பாத்திரத்தில் உள்ளது என்பதை கண்டுபிடி.

8. 28செ.மீ விட்டம் உடைய ஒரு உலோக கோளத்தை உருக்கி அதை மீண்டும் ஒவ்வொன்றும் $4\frac{2}{3}$ செ.மீ விட்டமும் 3செ.மீ உயரமும் உடைய சிறு கூம்புகளாக செய்யப்படுகிறது. செய்யப்படும் கூம்புகளின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி.

விருப்பப் பயிற்சி (தேர்வுக்குரிய வினாக்கள் அல்ல)

1. 1செ.மீ விட்டம் உடையது ஒரு குழி பந்தின் புறபரப்பில் 2மி.மீ ஆரத்தைக் கொண்ட 150 மேடுகள் உள்ளன. இந்த அமைப்பின் மொத்த புறப்பரப்பைக் காண். (மேடுகள் அரைகோள வடிவத்தில் உள்ளன என்று கொள்க)
2. 12 செ.மீ ஆரமுடைய உருளைவடிவ பாத்திரத்தில் 20செ.மீ ஆழத்திற்கு நீர் உள்ளது. ஒரு உருளை வடிவ இரும்புப் பந்தைப் போடும் போது அதன் உயரம் 6.75செ.மீ உயர்ந்தது எனில் பந்தின் ஆரத்தைக் கண்டுபிடி.
3. ஒரு திண்ம பொம்மையானது நேர் வட்ட உருளை வடிவத்தில் ஒரு முனை அரைக்கோள வடிவிலும் மற்றொரு முனை கூம்பு வடிவிலும் உள்ளது. அதன் பொது விட்டம் 4.2செ.மீ உருளை மற்றும் கூம்பு பகுதியின் உயரங்கள் முறையே 12செ.மீ மற்றும் 7செ.மீ எனில் திண்ம பொம்மையின் கனஅளவு கண்டுபிடி.
4. 15செ.மீ, 12செ.மீ, 9செ.மீ பக்கங்களாக உடைய 3 உலோக கனசதுரங்களை உருக்கி ஒரு கனசதுரமாக உருவாக்கினால் அந்த கனசதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தைக் கண்டுபிடி.
5. 36செ.மீ ஆரம் உடைய ஒரு அரைகோள பாத்திரம் திரவத்தால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. அதை 3செ.மீ ஆரமும் 6செ.மீ உயரம் உடைய உருளைவடிவ பாட்டில்களில் நிரப்பினால் அந்த பாத்திரத்தை காலி செய்ய எத்தனை பாட்டில்கள் தேவை?

செயல்திட்டம்

மொத்ததளபரப்பளவு/பக்கதள பரப்பளவு/கொள்ளளவு(பெட்டியில் அடுக்கி வைத்தல்)

- சம கொள்ளளவும் மாறுபட்ட மொத்ததள பரப்பளவும் கொண்ட கனசெவ்வகம்.
- மாறுபட்ட கொள்ளளவும். மாறுபட்ட மொத்ததள பரப்பளவும் கொண்ட கனச்செவ்வகம் மேற்கூறப்பட்ட இரண்டு சந்தர்பங்களிலும் கொள்ளளவு, மொத்ததள பரப்பளவு அதிகபட்சமாக கொள்க.

நாம் கற்றவை

1. இரண்டு திண்ம பொருட்களை சேர்ப்பதால் ஏற்படும் திண்மப்பொருளின் கனஅளவு, அந்த இரண்டு திண்ம பொருட்களின் கனஅளவின் மொத்தத்திற்குச் சமம்.
2. திண்மப் பொருட்களை ஏற்படும் மற்றொரு திண்மப் பொருளின் மொத்த புறப்பரப்பு, அவற்றின் மொத்த புறப்பரப்புகளின் மொத்தத்திற்கு சமமாகாது. ஏனெனில் அந்த பொருட்களை சேர்ப்பதால் புறப்பரப்பின் சிலபகுதிகள் மறைந்துவிடும்.

அத்தியாயம்

11 முக்கோணவியல்
(TRIGONOMETRY)

11.1 அறிமுகம்

முக்கோணங்கள் மற்றும் அவற்றின் பண்புகளை நாம் முன் வகுப்புகளில் கற்றுள்ளோம். நாம் அன்றாட வாழ்க்கையில் வெவ்வேறு சூழ்நிலைகளில் முக்கோணங்களை பயன்படுத்துவதை கவனித்து இருக்கிறோம்.

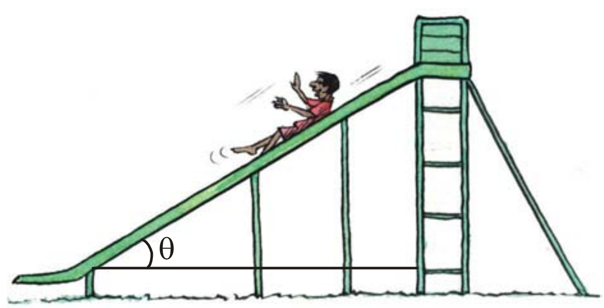
இப்போது ஒருசில அன்றாட வாழ்க்கையில் நிகழும் உதாரணங்களை பார்ப்போம்.

- மின்சார கம்பங்கள் எங்கும் இருக்கும். இவை பொதுவாக ஒரு உலோக கம்பியின் உதவியால் நிற்கவைக்கப்பட்டிருக்கும். மின்சாரக்கம்பம், கம்பி மற்றும் தரை ஆகியவை ஒரு முக்கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. ஆனால் உலோகக் கம்பியின் நீளத்தை குறைத்தால் அது தரையுடன் ஏற்படுத்தும் கோணத்தில் ஏதேனும் மாற்றத்தை ஏற்படுத்துமா?

அடுத்துள்ள படத்தில் காட்டியவாறு ஒருவர் ஏணியின் உதவியுடன் சுவருக்கு வெள்ளையடித்துகொண்டிருக்கிறார். ஒருவேளை அவர் மேல்பாகத்திற்கு வெள்ளையடிக்க வேண்டுமானால் அவர் என்ன செய்யவேண்டும்? தரையுடன் ஏணி ஏற்படுத்தும் கோணத்தில் ஏற்படும் மாற்றம் என்ன?

- அதிலாபாத் மாவட்டத்தில் ஜைனத் கிராமத்தில் 13ஆம் நூற்றாண்டில் கட்டப்பட்ட ஒரு கோயிலில் டிசம்பர் மாதத்தின் ஒரு நாளில் சூரியநாராயண சுவாமி சிலையின் பாதம் மீது சூரியனின் முதல் ஒளிக்கதிர்கள் விழுகின்றன. கோயிலின் நுழைவு வாசலில் இருந்து சிலைக்கு உள்ளதூரம், சூரிய கதிர்கள் வரும் நுழைவு வாயிலின் மேலுள்ள துளையின் உயரம் மேலும் அந்த மாதத்தில் முதல் சூரியகதிர்கள் பூமியோடு ஏற்படுத்தும் கோணம் ஆகியவற்றிற்கு இடையே தொடர்பு உள்ளது. இதில் ஏதாவது முக்கோணம் ஏற்படுமா?

- விளையாட்டு மைதானத்தில் சிறுவர்கள் சறுக்குப் பலகையில் சறுக்குவதற்கு விருப்பப்படுவார்கள். சறுக்குப்பலகை பூமியுடன் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் பொறுத்து சறுக்கும் தன்மை மாறுபடும். சறுக்குப் பலகையில் கோணத்தை மாற்றியமைத்தால் என்ன நிகழும்? இவ்வாறு கோணங்களை மாற்றியமைக்கும் போது சிறுவர்களால் சறுக்கமுடியுமா?



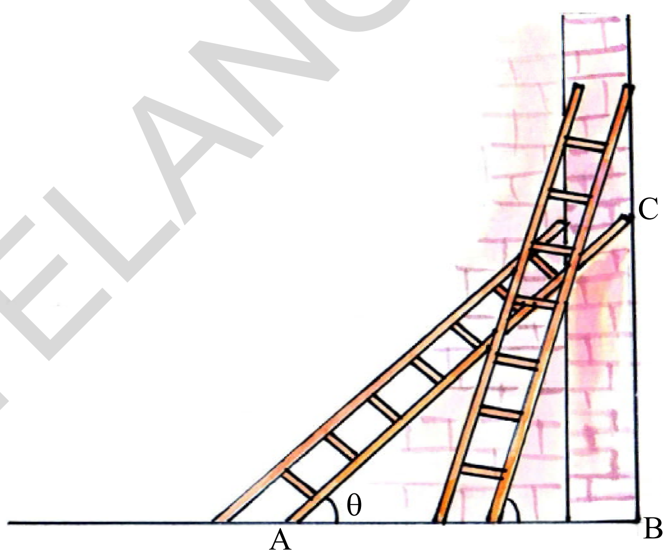
மேலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகள் அன்றாட வாழ்க்கையில் முக்கோணங்களின் பயன்பாடுகளை காட்டுகிறது. மேலும் உயரங்கள், தூரங்கள், சாய்தளங்கள் ஆகியவற்றின் அளவுகளை முக்கோணத்தின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி அளக்கலாம். கணிதத்தின் ஒரு பிரிவான முக்கோணவியல் இவ்வகையான கணக்குகளின் ஒரு பகுதியாகும்.

முன்பக்க படத்தில் காட்டிய எடுத்துக்காட்டான ஏணியின் உதவியோடு சுவருக்கு வெள்ளையடிக்கும் ஒரு நபரின் செயல்களை பார்க்கலாம்.

பின்வரும் நிபந்தனைகளை உற்றுநோக்குவோம்.

ஏணியின் அடியை A என்றும் மேல் பாகத்தை C என்றும் குறிக்கலாம். சுவரின் நீளத்தையும் ஏணியின் அடியையும் சேர்க்கும் புள்ளியை B என்று குறிக்கலாம். ஆகவே ΔABC என்பது Bல் செங்கோணத்தை உடைய ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும். ஏணிக்கும் தரைக்கும் இடையே உள்ள கோணம் θ எனக்கொள்வோம்.

1. அவர் சுவரின் மேல்பாகத்திற்கு வெள்ளையடிக்க வேண்டுமெனில்
   - ஏணி தரையுடன் ஏற்படுத்தும் கோணத்தில் என்ன நிகழும்?
   - ABன் தூரத்தில் நிகழும் மாற்றம் என்ன?
2. அந்த நபர் சுவரின் கீழ் பகுதிக்கு வெள்ளையடிக்க வேண்டுமெனில்
   - ஏணி பூமியுடன் ஏற்படுத்தும் கோணத்தில் என்ன நிகழும்?
   - AB ன் தூரத்தில் நிகழும் மாற்றம் என்ன?



ஒருவர் சுவற்றிற்கு வெள்ளையடிக்கும்போது (எடுத்துகாட்டில்) வெள்ளையடிக்கும் உயரத்தை அதிகரித்தாலும் அல்லது குறைத்தாலும் அவர் ஏணியின் நிலையை மாற்றவேண்டியுள்ளது. எனவே 'θ' அதிகரிக்கும் போது சுவரில் வெள்ளையடிக்க வேண்டிய உயரம் அதிகரிக்கிறது மேலும் தரையின் அடிதூரம் குறைகிறது. ஆனால் θ குறையும் போது சுவரில் வெள்ளையடிக்க வேண்டிய உயரம் குறைகிறது மேலும் அடிப்பக்கம் தூரம் அதிகரிக்கிறது. இந்த கூற்றை நீங்கள் ஒப்புக்கொள்கிறீர்களா?

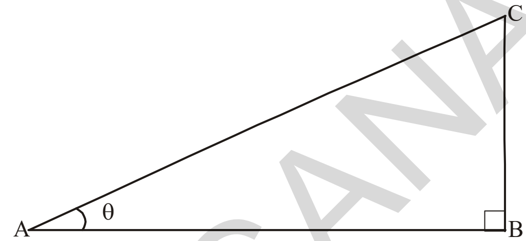
இங்கு ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ABCல் அனைத்து பக்கங்களுக்கும், கோணங்களுக்கும் சாதாரண பெயரையே இடுவோம். இப்பொழுது மீண்டும் பக்கங்களுக்கு பெயரிடுவோம் ஏனெனில் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் பக்கங்களின் மீது மட்டும் ஆதாரப்பட்டுள்ளது.

11.1.1 செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு பெயரிடுதல்

படத்தில் காட்டியவாறு செங்கோண முக்கோணம் ABCஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

இந்த செங்கோண முக்கோணம் ABCல் $\angle CAB$ஐ $\angle A$ என எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு A ஒரு குறுங்கோணம் ஆகும். எனவே AC என்பது முக்கோணத்தின் மிகப்பெரிய பக்கம். இதை “கர்ணம்” என்று அழைப்பர்.

இங்கு கோணம் A வைப் பொறுத்து BC ன் நிலையை உற்றுநோக்குங்கள் இது கோணம் Aவுக்கு எதிர்பக்கத்தில் இருப்பதை பார்க்கலாம். எனவே BC ஐ $\angle A$ ன் எதிர்பக்கம் என்பர். மேலும் மற்றொரு பக்கம் ABஐ $\angle A$ ன் அடுத்துள்ள பக்கம் என்று அழைப்பர்.



AC = கர்ணம்

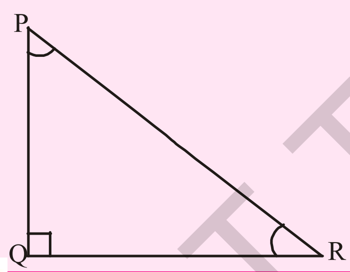
BC = கோணம் A ன் எதிர்பக்கம்

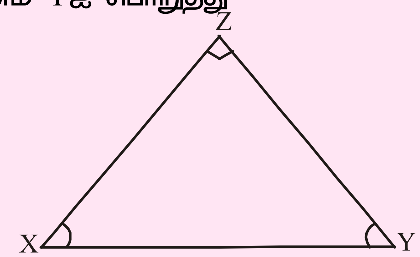
AB = கோணம் A ன் அடுத்துள்ள பக்கம்

இதை செய்

கீழே உள்ள முக்கோணங்களில் கொடுக்கப்பட்ட கோணங்களுக்கு கர்ணம், எதிர்பக்கம், மேலும் அடுத்துள்ள பக்கம் ஆகியவற்றை குறிக்கவும்.

1. கோணம் Rஐ பொறுத்து
2. (i) கோணம் Xஐ பொறுத்து
   (ii) கோணம் Yஐ பொறுத்து

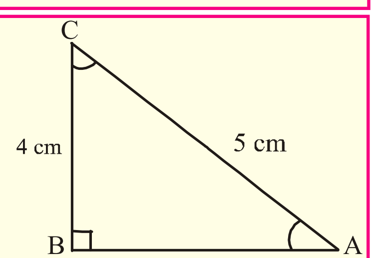




இதை செய்

அடுத்துள்ள முக்கோணத்தில் கொடுக்கப்பட்ட கோணங்களைப் பொறுத்து கர்ணம், எதிர்பக்கம் மற்றும் அடுத்துள்ள பக்கம் ஆகியவற்றின் நீளங்களைக் கண்டுபிடி.

1. கோணம் Cஐ பொறுத்து 2. கோணம் Aவைப் பொறுத்து



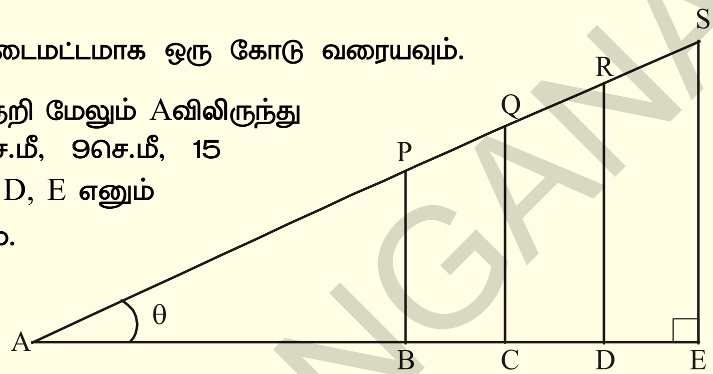
நீங்கள் கவனித்தது என்ன? கோணம் A ன் எதிர்பக்கத்திற்கும் மேலும் கோணம் Cன் அடுத்துள்ள பக்கத்திற்கும், இடையே ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா? இதைப்போல, ஒரு உலோக கம்பியின் உதவியால் ஒரு மின்சாரக் கம்பம் நிற்கவைக்கப்பட்டிருந்தால் கம்பத்தின் உயரம் மேலும் உலோகக்கம்பியின் நீளம் இவற்றிற்கிடையே ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா? இங்கு நாம் முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கும் கோணங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை புரிந்துகொள்ள வேண்டும். நாம் இவற்றைப் பற்றி முக்கோணவியல் விகிதங்கள் எனும் பகுதியில் படிப்போம்.

11.2 முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தின் தொடக்கத்தில் நாம் அன்றாட வாழ்க்கையில் ஏற்படும் சூழ்நிலைகளை கவனித்தோம். இனி முக்கோணவியல் விகிதங்கள் மேலும் அவை எவ்வாறு வரையறுக்கப்படுகிறது என்பதைப் பற்றி தெரிந்துக்கொள்வோம்.

செயல்

1. ஒரு காகிதத்தின் மீது கிடைமட்டமாக ஒரு கோடு வரையவும்.
2. முதல்புள்ளியை A என குறி மேலும் Aவிலிருந்து முறையே 3செ.மீ, 6செ.மீ, 9செ.மீ, 15 செ.மீ தூரத்தில் B, C, D, E எனும் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.
3. 4செ.மீ, 8செ.மீ, 12செ.மீ, 16செ.மீ, நீளத்தில் B , C , D , E , புள்ளிகளிலிருந்து BP, CQ, DR, ES எனும் செங்குத்துகளை வரையவும்.



4. AP, PQ, QR, RS ஐ இணைக்கவும்.
5. AP, AQ, AR, AS ன் நீளங்களைக் கண்டுபிடி.

கர்ணத்தின் நீளம்	எதிர்பக்கத்தின் நீளம்	அடுத்துள்ள பக்கத்தின் நீளம்	$\frac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$
ΔABP				
ΔACQ				
ΔADR				
ΔAES				

$\frac{BP}{AP}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{DR}{AR}$ மேலும் $\frac{ES}{AS}$ ன் விகிதங்களைக் கண்டுபிடி

உங்களுக்கு $\frac{4}{5}$ எனும் ஒரே விகிதம் கிடைத்ததா?

இதைப்போலவே $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ மேலும் $\frac{AE}{AS}$ ஆகிய விகிதங்களையும் கண்டுபிடி? நீ கவனித்தது என்ன?

11.2.1 முக்கோணவியல் விகிதங்களை வரையறுத்தல்.

மேலுள்ள செயலில் செங்கோண முக்கோணங்கள் ABP, ACQ, ADR மேலும் AES, அனைத்திற்கும் $\angle A$ பொதுவானது, $\angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ ஆகியவை செங்கோணங்கள் மேலும் $\angle P, \angle Q, \angle R, \angle S$ ஆகியவை சமம். எனவே ABP, ACQ, ADR, AES ஆகியவை வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ஆகும். இவற்றில் ஒரு முக்கோணத்தில் கோணம் A ன் எதிர்பக்கம் மற்றும் கர்ணத்தின் விகிதம் மற்ற முக்கோணங்கள் ABP, ACQ, ADR, AES ஆகியவற்றின் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் நிலையானதாக இருப்பதை கவனியுங்கள். மேலும் $\frac{BP}{AP}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{DR}{AR}, \frac{ES}{AS}$ இவற்றின் விகிதங்களை "**sine A**" அல்லது சுருக்கமாக "**sin A**" என அழைப்பர். கோணம் A ன் மதிப்பு "x" எனில் இதை "$\sin x$" என்று கூறலாம்.

இவ்வாறு எல்லா வடிவொத்த செங்கோண முக்கோணங்களிலுள்ள செங்கோணம் அற்ற ஒரு கோணத்தின் எதிர்பக்கம் மற்றும் கர்ணத்தின் நீளம் இவற்றிற்கிடையே உள்ள விகிதம் ஒரு மாறிலியாக இருக்கும். மேலும் இந்த விகிதம் அந்த கோணத்தின் *"sine"* எனப்படும்.

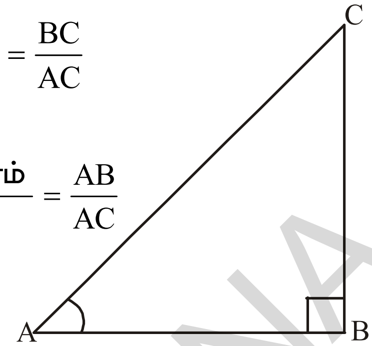
இதைப்போல $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}, \frac{AE}{AS}$ *ன் விகிதங்களும் மாறிலியாக இருப்பதை கவனிக்கலாம். இவை கோணம் A ன் அடுத்துள்ள பக்கம் மற்றும் கர்ணத்தின் விகிதங்கள் ஆகும். எனவே* $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}, \frac{AE}{AS}$ *ஆகிய விகிதங்களை* ***"cosine A"*** *அல்லது சுருக்கமாக* ***"cos A"*** *என்று அழைப்பர். கோணம் A ன் மதிப்பு "x" எனில் "$\cos x$" என்று அழைக்கப்படுகிறது.*

இவ்வாறு எல்லா வடிவொத்த செங்கோண முக்கோணங்களிலுள்ள செங்கோணமற்ற ஒரு கோணத்தின் அடுத்துள்ள பக்கம் மற்றும் கர்ணத்தின் நீளம் ஆகியவற்றிற்கிடையே உள்ள விகிதம் ஒரு மாறிலியாக இருக்கும். இந்த விகிதம் அந்த கோணத்தின் "cosine" எனப்படும்.

இதைப்போல ஒரு கோணத்தின் எதிர்பக்கம் மற்றும் அடுத்துள்ள பக்கம் ஆகியவற்றிற்கிடையே உள்ள விகிதம் ஒரு மாறிலியாகும். இந்த விகிதம் அந்த கோணத்தின் "tangent" எனப்படும்.

செங்கோண முக்கோண விகிதங்களின் வரையறைகள்

பின்வரும் படத்தில் காட்டியவாறு செங்கோண முக்கோணம் ABCல் செங்கோணம் Bல் உள்ளது. செங்கோண முக்கோணம் ABCல் கோணம் Aன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது:



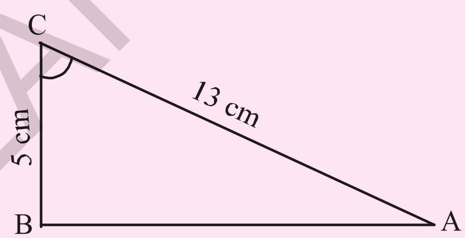
$\angle A$ன் sine $= \sin A = \dfrac{\angle A\text{ன் எதிர்பக்கத்தின் நீளம்}}{\text{கர்ணத்தின் நீளம்}} = \dfrac{BC}{AC}$

$\angle A$ ன் cosine $= \cos A = \dfrac{\angle A\text{ன் அடுத்துள்ள பக்கத்தின் நீளம்}}{\text{கர்ணத்தின் நீளம்}} = \dfrac{AB}{AC}$

$\angle A$ ன் tangent $= \tan A = \dfrac{\angle A\text{ன் எதிர்பக்கத்தின் நீளம்}}{\angle A\text{ன் அடுத்துள்ள பக்கத்தின் நீளம்}} = \dfrac{BC}{AB}$

இதை செய்

1. அடுத்துள்ள முக்கோணத்தில் (i) $\sin C$ (ii) $\cos C$ and (iii) $\tan C$ ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடி.



2. முக்கோணம் XYZ, $\angle Y$ செங்கோணம், $XZ = 17$ செ.மீ மேலும் $YZ = 15$ செ.மீ எனில் (i) $\sin X$ (ii) $\cos Z$ (iii) $\tan X$ஐ கண்டுபிடி.
3. முக்கோணம் PQRல் Qல் செங்கோணம் மேலும் $\angle P$ ன் மதிப்பு x, $PQ = 7$செ.மீ $QR = 24$ செ.மீ எனில் $\sin x$ மேலும் $\cos x$ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

முயற்சி செய்

ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ABCல் C என்பது செங்கோணமாகும். $BC + CA = 23$செ.மீ மேலும் $BC - CA = 7$செ.மீ எனில் $\sin A$ மற்றும் $\tan B$ ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடி.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

பின்வருவனவற்றை உன்னுடைய நண்பர்களுடன் கலந்துரையாடு

(i) x ன் சில மதிப்புக்கு $\sin x = \dfrac{4}{3}$ சரியானதாக இருக்குமா?

(ii) $\sin A$ மேலும் $\cos A$ ன் மதிப்புகள் எப்போதும் 1க்கு குறைவாக இருக்கும். ஏன்?

(iii) $\tan A$ என்பது tan மேலும் Aன் பெருக்கற்பலன்.

மேலும் மூன்று முக்கோணவியல் விகிதங்கள் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன. இவை மேலுள்ள மூன்று விகிதங்களின் தலைகீழிகள் ஆகும்.

"sine A" ன் பெருக்கல் தலைகீழி "cosecant A" ஆகும். இதை சுருக்கமாக "cosec A" என எழுதுகிறோம். சில நேரங்களில் இதை "csc A" எனவும் எழுதுவர்.

அதாவது $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$

இதைப்போலவே "cos A"ன் பெருக்கல் தலைகீழி "secant A" (சுருக்கமாக "sec A")

மேலும் "tan A" ன் பெருக்கல் தலைகீழி "cotangent A (சுருக்கமாக cot A)

அதாவது $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ மேலும் $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$

பக்கங்களைப் பொறுத்து 'cosec'ன் விகிதத்தை எவ்வாறு வரையறுக்கலாம்?

$\sin A = \dfrac{\text{கோணம் A ன் எதிர்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$,, $\operatorname{cosec} A = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{கோணம் A ன் எதிர்பக்கம்}}$

முயற்சி செய்

sec A மற்றும் cos A வை ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கமாக தெரிவி.

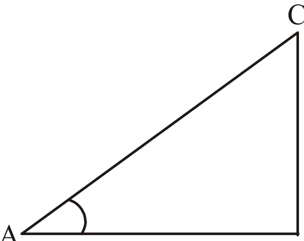
சிந்தித்து - கலந்துரையாடு

- $\dfrac{\sin A}{\cos A}$ ன் மதிப்பு tan Aக்கு சமமா ?
- $\dfrac{\cos A}{\sin A}$ ன் மதிப்பு cot Aக்கு சமமா ?

மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-1. $\tan A = \dfrac{3}{4}$ எனில் கோணம் Aன் மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $\tan A = \dfrac{3}{4}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது



இங்கு $\tan A = \dfrac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ளபக்கம்}} = \dfrac{3}{4}$

எனவே, எதிர்பக்கம் : அடுத்துள்ளபக்கம் = 3:4

கோணம் An எதிர்பக்கம் = BC = $3k$

அடுத்தள்ள பக்கம் = AB = $4k$ (இங்கு k ஒரு மிகைஎண்)

இப்பொழுது, பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி முக்கோணம் ABC ல்

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= (3k)^2 + (4k)^2 = 25k^2$$
$$AC = \sqrt{25k^2}$$
$$= 5k = \text{கர்ணம்}$$

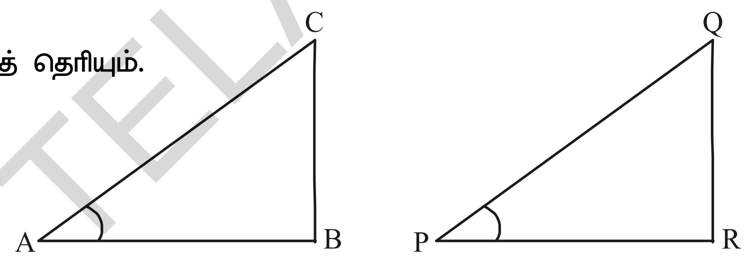
இனி நாம் மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களை எளிதாகக் கண்டறியலாம்.

$$\sin A = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5} \text{ மேலும் } \cos A = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{3}, \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4}, \quad \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{4}{3}.$$

எடுத்துக்காட்டு-2. $\sin A = \sin P$ என இருக்குமாறு $\angle A$ மற்றும் $\angle P$ ஆகியவை குறுங்கோணங்கள் எனில் $\angle A = \angle P$ எனக்காட்டு.

தீர்வு : $\sin A = \sin P$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



$\sin A = \dfrac{BC}{AC}$ என நமக்குத் தெரியும்.

மேலும் $\sin P = \dfrac{QR}{PQ}$

$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{QR}{PQ}$ ஆகும்

எனவே $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{QR}{PQ} = k$ எனக்கொண்டால்

பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தினால்

$$\frac{AB}{PR} = \frac{\sqrt{AC^2 - BC^2}}{\sqrt{PQ^2 - QR^2}} = \frac{\sqrt{AC^2 - k^2AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - k^2PQ^2}} = \frac{\sqrt{AC^2\,\cancel{(1-k^2)}}}{\sqrt{PQ^2\,\cancel{(1-k^2)}}} = \frac{AC}{PQ}$$

$\dfrac{AC}{PQ} = \dfrac{AB}{PR} = \dfrac{BC}{QR}$ எனவே $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

$\therefore \angle A = \angle P$

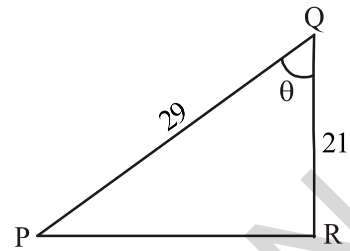
எடுத்துக்காட்டு-3. செங்கோண முக்கோணம் PQRல், Rல் செங்கோணம் உள்ளது. மேலும் $PQ = 29$ அலகுகள், $QR = 21$ அலகுகள் மற்றும் $\angle PQR = \theta$, எனில்

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ and (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

தீர்வு : முக்கோணம் PQRல்

$$PR = \sqrt{PQ^2 - QR^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{400} = 20 \text{ அலகுகள்}$$

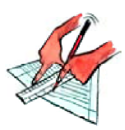


$$\sin\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{20}{29}$$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{21}{29}$$

Now (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{441+400}{841} = 1$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{441-400}{841} = \frac{41}{841}$



பயிற்சி - 11.1

1. ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ABCல் பக்கங்கள் AB, BC, மற்றும் CA ன் நீளங்கள் முறையே 8செ.மீ, 15செ.மீ, 17செ.மீ, எனில் sin A, cos A மேலும் tan A மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.
2. ஒரு செங்கோண முக்கோணம் PQRன் பக்கங்கள் PQ = 7செ.மீ, QR = 25செ.மீ, மேலும் $\angle Q = 90^\circ$ எனில் tan Q – tan R ஐக் கண்டுபிடி.
3. ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ABCல் செங்கோணம் Bல் உள்ளது. $a = 24$ அலகுகள், $b = 25$ அலகுகள் மேலும் $\angle BAC = \theta$ எனில் $\cos\theta$, $\tan\theta$ மதிப்புகளைக்கண்டுபிடி.
4. $\cos A = \frac{12}{13}$ $(A < 90^\circ)$ எனில் sin A மேலும் tan A மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.
5. $3\tan A = 4$, எனில் sin A மேலும் cos A மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.
6. $\cos A = \cos X$ என்றவாறு $\angle A$ மேலும் $\angle X$ ஆகியவை குறுங்கோணங்கள் எனில் $\angle A = \angle X$ எனக்காட்டு.
7. $\cot\theta = \frac{7}{8}$ எனில் (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.
8. ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ABCல் செங்கோணம் Bல் உள்ளது மேலும் $\tan A = \sqrt{3}$ எனில்

   (i) sin A cos C + cos A sin C (ii) cos A cos C – sin A sin C ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

11.3 சிறப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

30^o, 60^o மற்றும் 90^o கோணங்களில் உள்ள இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணம் மற்றும் செங்கோண முக்கோணங்களைப் பற்றி நமக்குத்தெரியும்.

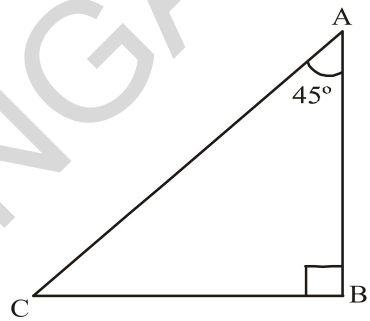
நாம் $\sin 30^o$ அல்லது $\tan 60^o$ அல்லது $\cos 45^o$ போன்றவற்றை மேற்கண்ட முக்கோணங்களின் மூலம் கண்டுபிடிக்க முடியுமா?

$\sin 0^o$ அல்லது $\cos 0^o$ மதிப்பு இருக்குமா?

11.3.1 45^oன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணம் ABCல் செங்கோணம் Bல் உள்ளது எனில் $\angle A = \angle C = 45^o$ (ஏன் ?) மேலும் $BC = AB$ (ஏன் ?)

$BC = AB = a$ என நினைத்துக்கொள்வோம்.



பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= a^2 + a^2 = 2a^2,$$
$$\therefore AC = a\sqrt{2}$$

முக்கோணவியல் விகிதங்களின் வரையறைகளைப் பயன்படுத்தினால்

$$\sin 45^o = \frac{45^0 \text{ கோணத்தின் எதிர்பக்கம் நீளம்}}{\text{கர்ணத்தின் நீளம்}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

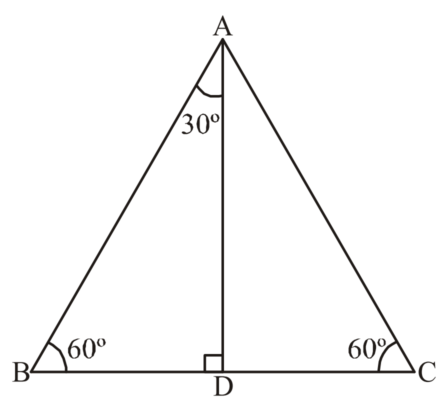
$$\cos 45^o = \frac{45^0 \text{ கோணத்தின் அடுத்துள்ள பக்க நீளம்}}{\text{கர்ணத்தின் நீளம்}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^o = \frac{45^0 \text{ கோணத்தின் எதிர்பக்க நீளம்}}{45^0 \text{ கோணத்தின் அடுத்துள்ள பக்கநீளம்}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1$$

இதைப்போல $\operatorname{cosec} 45^o$, $\sec 45^o$, $\cot 45^o$ களின் மதிப்புகளையும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

11.3.2 30^o மேலும் 60^oன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

இப்பொழுது நாம் 30^o மேலும் 60^o கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கண்டுபிடிப்போம். இதை கண்டறிய ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். இதில் ஒரு பக்கத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோடு ஒவ்வொரு முக்கோணம் $30^o, 60^o, 90^o$ கோணங்களாகக் கொண்ட இரண்டு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது.



சமபக்க முக்கோணம் ABC ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். இதன் ஒவ்வொரு கோணமும் 60^{o} ஆகும். எனவே $\angle A = \angle B = \angle C = 60^{o}$ மேலும் இதன் பக்கங்கள் $AB = BC = CA = 2a$ அலகுகள் ஆகும். முனை A லிருந்து BCக்கு BDஎனும் செங்குத்துக் கோட்டை மேற்கண்ட படத்தில் காட்டியவாறு வரையவும்.

இந்த செங்குத்துக்கோடு AD, கோணம் Aன் இருசமவெட்டியாகவும், மேலும் பக்கம் BCன் இருசமவெட்டியாகவும் உள்ளது.

ஃ $\angle BAD = \angle CAD = 30^{o}$.

BC ஐ D புள்ளி இரண்டு சமமான பாகங்களாக பிரிப்பதால்

$BD = \frac{1}{2}BC = \frac{2a}{2} = a$ அலகுகள்

மேற்கண்ட செங்கோண முக்கோணம் ABDல்

$AB = 2a$ மேலும் $BD = a$

இப்பொழுது $AD^2 = AB^2 - BD^2$ (பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி)

$= (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$.

ஃ $AD = a\sqrt{3}$ அலகுகள்

முக்கோணவியல் விகிதங்களின் வரையறைகளிலிருந்து

$$\sin 60^{o} = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^{o} = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

இவ்வாறே $\tan 60^{o} = \sqrt{3}$ (ஏன்?)

மேற்கண்டவற்றிலிருந்து $\text{cosec } 60^{o}$, $\sec 60^{o}$, $\cot 60^{o}$ தலைகீழிகளை விகிதங்களைப் பயன்படுத்தி கண்டறியலாம்.

இதை செய்

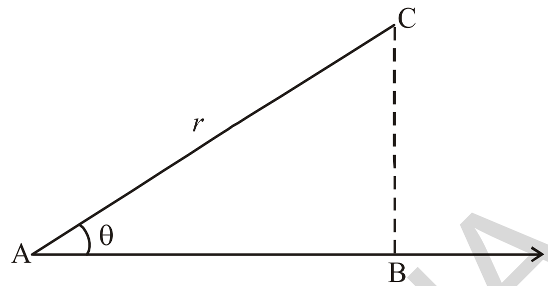
$\text{cosec } 60^{o}$, $\sec 60^{o}$, $\cot 60^{o}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை கண்டுபிடி.

முயற்சி செய்

$\sin 30^{o}$, $\cos 30^{o}$, $\tan 30^{o}$, $\text{cosec } 30^{o}$, $\sec 30^{o}$, $\cot 30^{o}$ ன் மதிப்புகளை முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பயன்படுத்திக் கண்டுபிடி.

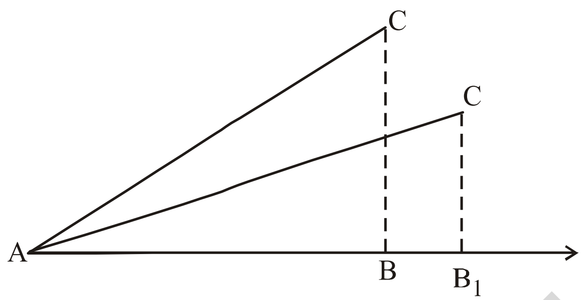
11.3.3 0^{o} மேலும் 90^{o}ன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

இதுவரை நாம் 30^{o}, 45^{o}, 60^{o}களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் குறித்து விவாதித்தோம். இப்போது 0^{o}, 90^{o}ன் முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கண்டுபிடிப்போம்.

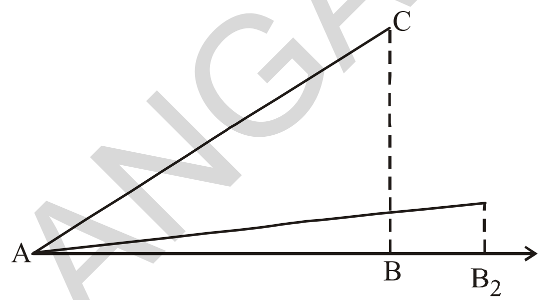


AB கதிரின் மீது r நீளமுடைய AC கோட்டுத்துண்டு குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது எனக்கொள். புள்ளி Bயிலிருந்து C புள்ளியின் உயரம் BC. ABன் மீது AC ஏற்படுத்தும் கோணம் இன்னும் சற்று குறையுமாறு ABக்கு அருகில் ACஐ நெருங்குமாறு செய்யவும். இப்பொழுது BC மற்றும் ABகளின் நீளங்களில் என்ன நிகழும்?

இவ்வாறே கோணம் Aஐ குறைத்துக்கொண்டேபோனால் கதிர் ABயிலிருந்து Cன் உயரம் குறைந்து கொண்டே Bன் அடி Bயிலிருந்து B_1 மேலும் B_2 க்கு படிப்படியாக மாறும் கோணம் பூஜ்ஜியமாகும் போது உயரம் (அதாவது கோணத்தின் எதிர்பக்கம்) கூட பூஜ்ஜியமாகிவிடும். மேலும் அடுத்துள்ள பக்கம் ACக்கு சமமாகிவிடும். அதாவது ACன் நீளம் r க்கு சமமாக இருக்கும்.



படி (i)



படி (ii)

இப்போது முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பார்ப்போம்.

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \text{ மேலும் } \cos A = \frac{AB}{AC}$$

$A = 0^o$ எனில் $BC = 0$ மேலும் $AC = AB = r$

$$\sin 0^o = \frac{0}{r} = 0 \text{ மேலும் } \cos 0^o = \frac{r}{r} = 1$$

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ என நமக்குத் தெரியும்.

$$\tan 0^o = \frac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = \frac{0}{1} = 0$$

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

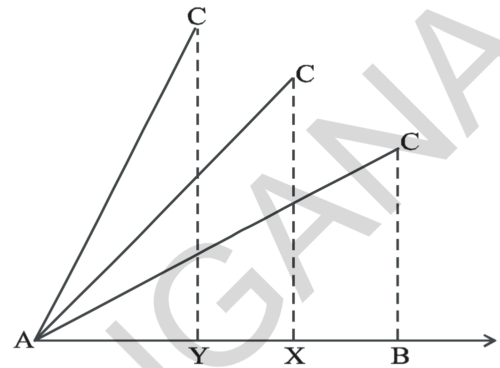
பின்வரும் நிபந்தனைகளை உன்னுடைய நண்பர்களுடன் கலந்துரையாடு.

1. $\operatorname{cosec} 0^o = \dfrac{1}{\sin 0^o}$ இது வரையறுக்கப்பட்டதா? ஏன்?

2. $\cot 0^o = \dfrac{1}{\tan 0^o}$. இது வரையறுக்கப்பட்டதா? ஏன்?

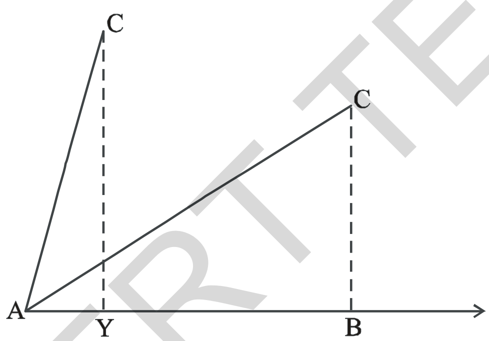
3. $\sec 0^o = 1$. ஏன் ?

இப்போது கதிர் ABஉடன் AC ஏற்படுத்தும் கோணம் அதிகமானால் என்ன நிகழும் என்பதை பார்ப்போம். கோணம் A அதிகரித்துக் கொண்டே செல்லும் செங்குத்தின் அடி Bலிருந்து புள்ளி Xக்கும் இவ்வாறே புள்ளி Yக்கும் மாறிக்கொண்டே செல்லும். இதை மற்றொரு விதமாக கூறவேண்டுமானால் BCன் உயரம் படிப்படியாக அதிகரித்துக்கொண்டே சென்றால் Cன் மீதுள்ள கோணம் தொடர்ச்சியாக அதிகரித்து ஒரு நிலையில் 90^oஐ அடைகிறது. இந்த நிலையில் B புள்ளி A புள்ளியை அடையும். மேலும் ACயும் BCயும் சமமாக இருக்கும்.

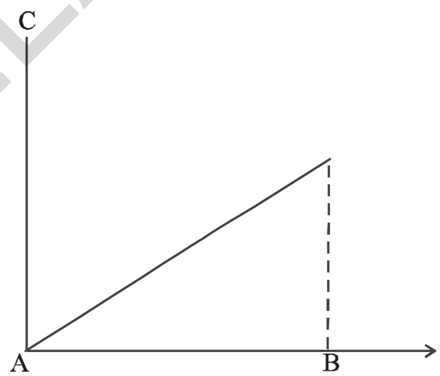


Step (i)

அதாவது கோணத்தின் மதிப்பு 90^o எனில் அடிப்பக்கம் (அதாவது கோணத்தின் அடுத்துள்ள பக்கம்) பூஜ்ஜியமாகிவிடும். கதிர் ABலிருந்து Cன் உயரம் அதிகரித்து ACக்கு சமமாகிறது. இந்த நீளம் r க்கு சமம்.



படி (ii)



படி (iii)

இப்போது முக்கோணவியல் விகிதங்களை பார்ப்போம்

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \text{ மேலும் } \cos A = \frac{AB}{AC}$$

$A = 90^o$ எனில் $AB = 0$ மேலும் $AC = BC = r$

$$\sin 90^o = \frac{r}{r} = 1 \text{ மேலும் } \cos 90^o = \frac{0}{r} = 0$$

முயற்சி செய்

$\tan 90^o$, $\text{cosec } 90^o$, $\sec 90^o$, $\cot 90^o$ ன் விகிதங்களை கண்டுபிடி.

இப்போது நாம் மேலே விவாதித்த கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களின் மதிப்புகளை அட்டவணை வடிவில் பார்க்கலாம்.

அட்டவணை 11.1

$\angle$**A**	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	வரையறுக்கப்படவில்லை
$\cot A$	வரையறுக்கப்படவில்லை	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec A$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	வரையறுக்கப்படவில்லை
$\operatorname{cosec} A$	வரையறுக்கப்படவில்லை	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

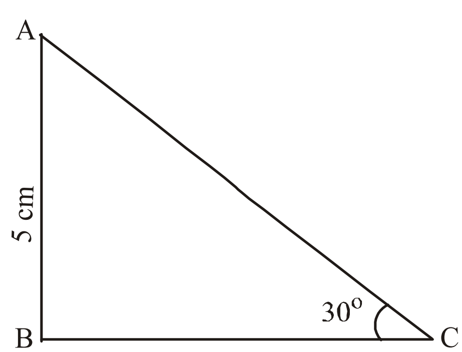
கோணம் A ன் மதிப்பு 0^o விருந்து 90^o வரை அதிகரித்துக்கொண்டே சென்றால் $\sin A$ மேலும் $\cos A$ ன் மதிப்புகள் எவ்வாறு மாறுபடுகிறது? (மேலுள்ள அட்டவணையை உற்றுநோக்குங்கள்)

$A \geq B$, எனில் $\sin A \geq \sin B$ என்பது சரியா?

$A \geq B$ எனில் $\cos A \geq \cos B$ என்பது சரியா? கலந்துரையாடு.

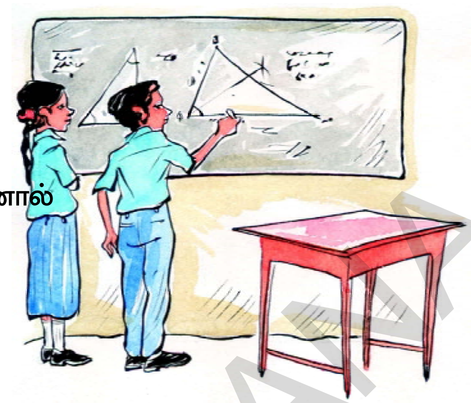
எடுத்துக்காட்டு-4. B ல் செங்கோணத்தைக் கொண்ட ΔABC ல் AB = 5செ.மீ மேலும் $\angle ACB = 30^o$ எனில் BC, AC பக்கங்களின் நீளங்களைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $\angle ACB = 30^o$ மேலும் AB=5செ.மீ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பக்கம் AB, BC இரண்டும் சம்பந்தப்பட்ட முக்கோணவியல் விகிதத்தை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். இங்கு BC என்பது கோணம் C ன் அடுத்துள்ள பக்கம் மேலும் AB என்பது கோணம் C ன் எதிர்பக்கம் ஆகும்.



ஆகவே, $\frac{AB}{BC} = \tan C.$

அதாவது $\frac{5}{BC} = \tan 30^{o} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



இதிலிருந்து $BC = 5\sqrt{3}$ செ.மீ.

முக்கோணவியல் விகிதங்களை பயன்படுத்தினால்

ΔABC-ல் $\sin 30^{\circ} = \frac{5}{AC}$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

$AC = 10$ செ.மீ

எடுத்துக்காட்டு-5. 6 செ.மீ. ஆரமுடைய ஒரு வட்டத்தின் நாண் மையத்தில் 60^{o} கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது எனில் நாணின் நீளத்தைக் கண்டுபிடி.

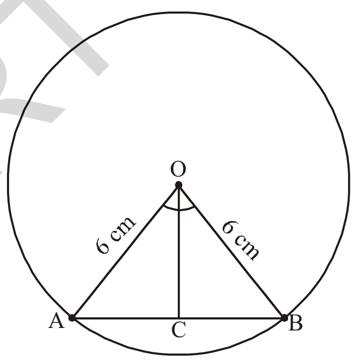
தீர்வு : வட்டத்தின் ஆரம் $OA = OB = 6$செ.மீ. என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$\angle AOB = 60^{o}$

OC என்பது 'O' லிருந்து ABக்கு வரையப்பட்ட உயரம் மேலும் அது ஒரு கோண இருசமவெட்டி.

$\angle COB = 30^{o}$.

ΔCOBல்



$$\sin 30^{o} = \frac{BC}{OB}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{6}$$

$$BC = \frac{6}{2} = 3.$$

ஆனால் நாணின் நீளம் $AB = 2BC$

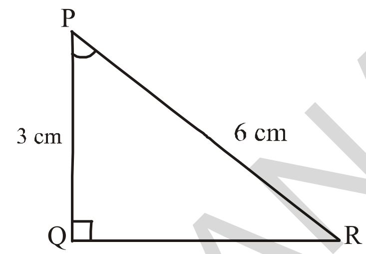
$= 2 \times 3 = 6$ செ.மீ

$\therefore$ நாணின் நீளம் $= 6$ செ.மீ

இன்று நாம் பயன்படுத்தும் **'sine'** எனும் கருத்தின் பயன்பாட்டை முதன் முதலில் கி.மு.500ஆம் ஆண்டில் ஆரியபட்டா என்பவரால் இயற்றப்பட்ட ஆரியபட்டீயம் எனும் நூலில் காணலாம். இதில் sine அரைநாணாக பயன்படுத்தப்பட்டது. அதற்கு பிறகு இதை **ஜியா** அல்லது **ஜிவா** ஆக நாளடைவில் மாறியது. அரபிக் மொழியில் மொழிபெயர்க்கப்பட்ட ஆரியபட்டீயத்தில் ஜிவா என்றே எழுதப்பட்டது. அதன் பிறகு லாடின் மொழியில் மொழிப்பெயர்க்கப்பட்ட போது ஜிவா என்பது **sinus** ஆக மாறியது. பின் ஐரோப்பா முழுவதும் கணிதத்தில் **sine** என்றே பயன்படுத்தப்பட்டது. எட்முண்ட் குண்டர் (1581-1626) முதன் முதலாக sine ஐ சுருக்கமாக **sin** என பயன்படுத்தினார்.

எடுத்துக்காட்டு-6. Qல் செங்கோணத்தைக் கொண்ட ΔPQR ல் $PQ = 3$ செ.மீ மற்றும் $PR = 6$ செ.மீ எனில் $\angle QPR$ மற்றும் $\angle PRQ$ கண்டுபிடி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டவை $PQ = 3$செ.மீ. மேலும் $PR = 6$ செ.மீ



$\therefore \frac{PQ}{PR} = \sin R$

அல்லது $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

எனவே $\angle PRQ = 30^o$

மேலும் $\angle QPR = 60^o$ (ஏன்?)

குறிப்பு : ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு பக்கம் மேலும் மற்றொரு அளவு (ஏதாவதொரு பக்கம் அல்லது குறுங்கோணம்) கொடுக்கப்பட்டால் முக்கோணத்தின் மீதமுள்ள பக்கங்கள் மேலும் கோணங்களைக் காணமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டு-7. $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, $0^o < A + B \leq 90^o, A > B$ எனில் A மேலும் Bன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, ஆகவே $A - B = 30^o$ (ஏன்?)

$\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, ஆகவே $A + B = 60^o$ (ஏன்?)

மேலுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தால் நாம் பெறுவது $A = 45^o$ மேலும் $B = 15^o$. (எப்படி?)

பயிற்சி - 11.2

1. பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $\sin 45^o + \cos 45^o$

(ii) $\dfrac{\cos 45^o}{\sec 30^o + \operatorname{cosec} 60^o}$

(iii) $\dfrac{\sin 30^o + \tan 45^o - \operatorname{cosec} 60^o}{\cot 45^o + \cos 60^o - \sec 30^o}$

(iv) $2\tan^2 45^o + \cos^2 30^o - \sin^2 60^o$

(v) $\dfrac{\sec^2 60^o - \tan^2 60^o}{\sin^2 30^o + \cos^2 30^o}$

2. பொருத்தமான விடையை தேர்ந்தெடுத்து நியாயப்படுத்து.

(i) $\dfrac{2\tan 30^o}{1 + \tan^2 45^o}$

(a) $\sin 60^o$ (b) $\cos 60^o$ (c) $\tan 30^o$ (d) $\sin 30^o$

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$

(a) $\tan 90^\circ$ (b) 1 (c) $\sin 45^\circ$ (d) 0

(iii) $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$

(a) $\cos 60^\circ$ (b) $\sin 60^\circ$ (c) $\tan 60^\circ$ (d) $\sin 30^\circ$

3. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$ மதிப்பைக் கண்டுபிடி. $\sin(60^\circ + 30^\circ)$ன் மதிப்பு என்ன? இதிலிருந்து நீ என்ன தீர்மானிப்பாய்?

4. $\cos(60^\circ + 30^\circ) = \cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ$ என்பது சரியானதா?

5. Qல் செங்கோணத்தைக் கொண்ட ΔPQRல் $PQ = 6$செ.மீ $\angle RPQ = 60^\circ$ எனில் QR மேலும் PRன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

6. Yல் செங்கோணத்தைக் கொண்ட ΔXYZல் $YZ = x$, மேலும் $XZ = 2x$ எனில் $\angle YXZ$, $\angle YZX$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

7. $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ என்பது சரியா? உன்னுடைய விடையை நியாயப்படுத்து.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

θ ன் எந்த குறுங்கோண மதிப்பிற்கு (i) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$ இது சரியாகும்?

மேலுள்ள சமன்பாடு $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ல் எந்த மதிப்பிற்கு வரையறுக்கப்பட்டது.

11.4 நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

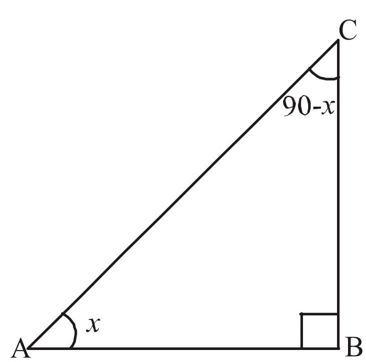
இரண்டு கோணங்களின் மொத்தம் 90°எனில் அந்த கோணங்களை நிரப்புக் கோணங்கள் என்பதை நாம அறிவோம். Bல் செங்கோணத்தைக் கொண்ட முக்கோணம் ABCஐ எடுத்துக்கொள். இதில் ஏதாவது நிரப்புக்கோணங்கள் உள்ளதா?

இங்கு கோணம் B ன் மதிப்பு 90°, எனவே மற்ற இரண்டு கோணங்களின் மொத்தம் 90°ஆக இருக்க வேண்டும்.

($\because$ முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல் 180°)

$\because \angle A + \angle C = 90^\circ$. எனவே $\angle A$ மேலும் $\angle C$ நிரப்புக்கோணங்கள் என கூறலாம்.

$\angle A = x$, என நினைத்துக்கொள். அப்பொழுது x ன் எதிர்பக்கம் BC மேலும் அடுத்துள்ளபக்கம் AB ஆகும்.



$\sin x = \dfrac{BC}{AC}$ $\quad\cos x = \dfrac{AB}{AC}$ $\quad\tan x = \dfrac{BC}{AB}$

$\operatorname{cosec} x = \dfrac{AC}{BC}$ $\quad\sec x = \dfrac{AC}{AB}$ $\quad\cot x = \dfrac{AB}{BC}$

$\angle A + \angle C = 90^o$, எனவே $\angle C = 90^o - \angle A$

மேலும் $\angle A = x$, எனில் $\angle C = 90^o - x$

முக்கோணம் ABCல் கோணம் $(90^o - x)$ ன் எதிர்பக்கம் மேலும் அடுத்துள்ள பக்கம் எதுவாக இருக்கும் என நாம் பார்க்கலாம்.

$\sin(90^o - x) = \dfrac{AB}{AC}$ $\quad\cos(90^o - x) = \dfrac{BC}{AC}$ $\quad\tan(90^o - x) = \dfrac{AB}{BC}$

$\text{Cosec}(90^o - x) = \dfrac{AC}{AB}$ $\quad\sec(90^o - x) = \dfrac{AC}{BC}$ $\quad\cot(90^o - x) = \dfrac{BC}{AB}$

இப்பொழுது, x மேலும் $(90^o - x)$ கோணங்களின் விகிதங்களை மேலுள்ள வெவ்வேறான முக்கோணவியல் மதிப்புகளுடன் ஒப்பிட்டால் மேற்கண்ட படத்திலிருந்து நமக்கு மூன்று சாத்தியமான விகிதங்கள் கிடைக்கின்றன.

$\sin(90^o - x) = \dfrac{AB}{AC} = \cos x$ மேலும் $\cos(90^o - x) = \dfrac{BC}{AC} = \sin x$

$\tan(90^o - x) = \dfrac{AB}{BC} = \cot x$ மேலும் $\cot(90^o - x) = \dfrac{BC}{AB} = \tan x$

$\operatorname{cosec}(90^o - x) = \dfrac{AC}{AB} = \sec x$ மேலும் $\sec(90^o - x) = \dfrac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} x$

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

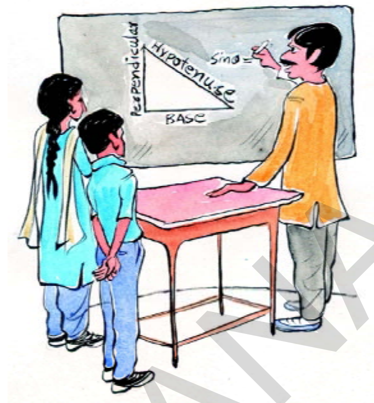
0^o மேலும் 90^oக்கு இடையில் அமையும் எல்லா கோணங்களுக்கும் மேற்கண்ட உறவுகள் உண்மையா? இல்லையா? சரிபார்.

எனவே, $\sin(90^o - A) = \cos A$ $\quad\cos(90^o - A) = \sin A$

$\tan(90^o - A) = \cot A$ மேலும் $\cot(90^o - A) = \tan A$

$\sec(90^o - A) = \operatorname{cosec} A$ $\quad\operatorname{cosec}(90^o - A) = \sec A$

இப்பொழுது மேலும் சில உதாரணங்களை பார்ப்போம்



எடுத்துக்காட்டு-8. மதிப்பிடு $\dfrac{\sec 35^o}{\text{cosec}\, 55^o}$

தீர்வு : $\text{cosec}\, A = \sec(90^o - A)$

$$\text{cosec}\, 55^o = \sec(90^o - 35^o)$$

$$\text{cosec}\, 55^o = \sec 35^o$$

எனவே $\dfrac{\sec 35^o}{\text{cosec}\, 55^o} = \dfrac{\sec 35^o}{\sec 35^o} = 1$

எடுத்துக்காட்டு-9. $\cos 7A = \sin(A - 6^o)$, இங்கு $7A$ என்பது குறுங்கோணம். எனில் Aன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டவை $\cos 7A = \sin(A - 6^o)$ ...(1)

$$\sin(90 - 7A) = \sin(A - 6^o)$$

இங்கு $(90 - 7A)$ மேலும் $(A - 6^o)$ ஆகிய இரண்டும் குறுங்கோணங்களாகும்.

எனவே $90^o - 7A = A - 6^o$

$$8A = 96^o$$

$$\therefore A = 12^o.$$

எடுத்துக்காட்டு-10. $\sin A = \cos B$. எனில் $A + B = 90^o$ எனக் காட்டு

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $\sin A = \cos B$ ...(1)

$\cos B = \sin(90^o - B)$ என நமக்குத் தெரியும்

$$\sin A = \sin(90^o - B)$$

A, B ஆகியவை குறுங்கோணங்கள். எனவே, $A = 90^o - B$.

$$\Rightarrow A + B = 90^o.$$

எடுத்துக்காட்டு-11. $\sin 81^o + \tan 81^o$ ன் மதிப்பை 0^o மேலும் 45^o கோணங்களுக்கு இடைப்பட்ட முக்கோணவியல் விகிதங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு : $\sin 81^o = \cos(90^o - 81^o) = \cos 9^o$

$\tan 81^o = \tan(90^o - 81^o) = \cot 9^o$ என எழுதலாம்.

எனவே, $\sin 81^o + \tan 81^o = \cos 9^o + \cot 9^o$

எடுத்துக்காட்டு-12. A, B, C ஆகியவை முக்கோணம் ABCன் கோணங்கள் எனில் $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$ எனக்காட்டு.

தீர்வு : A, B, C ஆகியவை முக்கோணம் ABCன் கோணங்கள்

எனவே, $A + B + C = 180^o$.

மேலுள்ள சமன்பாட்டை இருபுறமும் 2ஆல் வகுத்தால் நாம் பெறுவது

$$\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^o$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^o - \frac{A}{2}$$

இருபுறங்களுக்கும் sin விகிதத்தை எடுத்துக்கொண்டால்

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^o - \frac{A}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$. நிரூபிக்கப்பட்டது.

பயிற்சி 11.3

1. மதிப்பிடு.
   (i) $\frac{\tan 36^o}{\cot 54^o}$ (ii) $\cos 12^o - \sin 78^o$ (iii) $\text{cosec } 31^o - \sec 59^o$
   (iv) $\sin 15^o \sec 75^o$ (vi) $\tan 26^o \tan 64^o$
2. நிரூபிக்கவும்.
   (i) $\tan 48^o \tan 16^o \tan 42^o \tan 74^o = 1.$
   (ii) $\cos 36^o \cos 54^o - \sin 36^0 \sin 54^o = 0.$
3. $\tan 2A = \cot(A - 18^o)$. இங்கு 2A என்பது குறுங்கோணம் எனில் Aன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.
4. $\tan A = \cot B$. இங்கு A, B ஆகியவை குறுங்கோணங்கள் எனில் $A + B = 90^o$ என நிரூபிக்கவும்.
5. A, B, C ஆகியவை முக்கோணம் ABCன் உள்கோணங்கள் எனில் $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$ எனக்காட்டு.
6. $\sin 75^o + \cos 65^o$ ன் மதிப்பை 0^o மேலும் 45^o கோணங்களுக்கிடைப்பட்ட முக்கோணவியல் விகிதங்களாகக் காட்டு.

11.5 முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள்

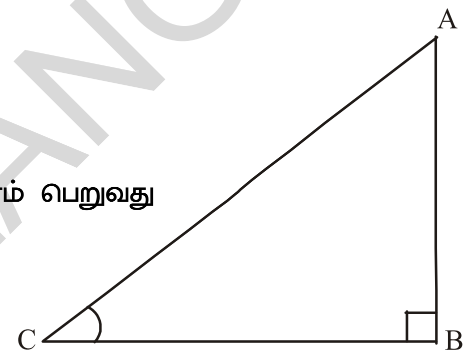
மாறிகளின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் கணித சமன்பாடு மெய்யானால் அதை முற்றொருமை என்கிறோம்.

உதாரணமாக $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ என்பது ஒரு முற்றொருமை.

இதைப்போலவே முக்கோணவியல் விகிதங்கள் ஆதாரமாக ஏற்படும் முற்றொருமைகளை முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் என்று என்பர். மேலும் இந்த முற்றொருமைகள் முக்கோணவியல் விகிதங்களின் எல்லாகோண மதிப்புகளுக்கும் மெய்யாகும்.

இங்கு ஒரு முக்கோணவியல் முற்றொருமையை வருவிப்போம். மற்றவை இதன் அடிப்படையில் ஏற்பட்டவை.

செங்கோண முக்கோணம் ABC ஐ கோணம் Bல் செங்கோணம் இருக்குமாறு எடுத்துக்கொள்வோம்.



பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் படி

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad ....(1)$$

இருபுறங்களையும் AC^2 ஆல் வகுத்தால், நாம் பெறுவது

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\left[\frac{AB}{AC}\right]^2 + \left[\frac{BC}{AC}\right]^2 = \left[\frac{AC}{AC}\right]^2$$

அதாவது $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1.$

நாம் பொதுவாக $\cos^2 A$ ஐ $(\cos A)^2$ என எழுதுவோம்.

அதாவது, $(\cos A)^2 = \cos^2 A$ ($\cos A^2$ என எழுதமாட்டோம்)

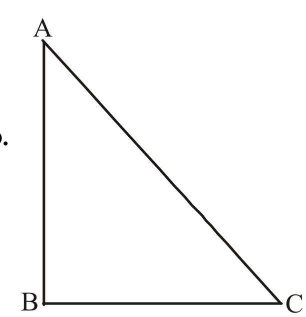
$\therefore$ மேலுள்ள சமன்பாடு $\cos^2 A + \sin^2 A = 1.$

மேலுள்ள சமன்பாட்டில் கோணம் Aஐ மாறியாகக் கொண்டால் இந்த சமன்பாடு Aன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் மெய்யாகும். எனவே மேலுள்ள சமன்பாடு ஒரு முக்கோணவியல் முற்றொருமை ஆகும்.

எனவே நாம் பெறும் முக்கோணவியல் முற்றொருமை

$$\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$$

மற்றொரு முக்கோணவியல் முற்றொருமையைப் பார்ப்போம்.



சமன்பாடு (1) லிருந்து

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2} \qquad \text{(இருபுறங்களையும் } AB^2 \text{ ஆல் வகுத்தால்)}$$

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2+\left(\frac{BC}{AB}\right)^2=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$1+\tan^2 A=\sec^2 A$. இதைப்போலவே சமன்பாடு (1) ஐ BC^2ஆல் வகுத்தால் நமக்கு $\cot^2 A+1=\operatorname{cosec}^2 A$ கிடைக்கிறது.

மேலுள்ள முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி, நாம் ஒரு முக்கோணவியல் விகிதத்தை மற்றொரு முக்கோணவியல் விகிதமாக தெரிவிக்கலாம். இந்த முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி ஒரு விகிதத்தின் மதிப்பு தெரிந்தால் மற்ற எல்லா விகிதங்களின் மதிப்புகளையும் கண்டறியலாம்.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

$0^0\le A\le 90^0$ ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் மெய்யா? இல்லையெனில் A வின் எந்த மதிப்பிற்கு மெய்யாகும்?

- $\sec^2 A-\tan^2 A=1$
- $\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A=1$

இதை செய்

(i) $\sin C=\frac{15}{17}$, எனில் $\cos A$ வைக் கண்டுபிடி. (ii) $\tan x=\frac{5}{12}$, எனில் $\sec x$ ஐக் கண்டுபிடி.

(iii) $\operatorname{cosec}\theta=\frac{25}{7}$, எனில் $\cot x$ ஐக் கண்டுபிடி.

முயற்சி செய்

பின்வருவனவற்றை மதிப்பீடு செய்து உன் விடையை நியாயப்படுத்து.

(i) $\dfrac{\sin^2 15^o+\sin^2 75^o}{\cos^2 36^o+\cos^2 54^o}$ (ii) $\sin 5^o\cos 85^o+\cos 5^o\sin 85^o$

(iii) $\sec 16^o\ \operatorname{cosec} 74^o-\cot 74^o\tan 16^o$.

எடுத்துக்காட்டு-13. $\cot\theta+\tan\theta=\sec\theta\ \operatorname{cosec}\theta$ எனக்காட்டு.

தீர்வு : LHS $=\cot\theta+\tan\theta$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \text{(ஏன்?)}$$

$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta \ \cos\theta} \qquad \text{(ஏன் ?)}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \ \frac{1}{\cos\theta} = \operatorname{cosec}\theta \ \sec\theta$$

எடுத்துக்காட்டு-14. $\tan^2\theta + \tan^4\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$ **எனக்காட்டு.**

தீர்வு : L.H.S. $= \tan^2\theta + \tan^4\theta$

$= \tan^2\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

$= \tan^2\theta \,.\, \sec^2\theta$ (ஏன் ?)

$= (\sec^2\theta - 1)\,\sec^2\theta$ (ஏன் ?)

$= \sec^4\theta - \sec^2\theta = \text{R.H.S}$

எடுத்துக்காட்டு-15. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ **என நிரூபி**

தீர்வு : LHS $= \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ ($1 + \cos\theta$ ஆல் பெருக்கு, வகு)

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \qquad \text{(ஏன்?)}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \text{R.H.S.}$$

பயிற்சி 11.4

1. பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)\,(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$

(ii) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

(iii) $(\sec^2\theta - 1)\,(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)$

2. $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ எனக்காட்டு

3. $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ எனக்காட்டு

4. $\dfrac{1-\tan^2 A}{\cot^2 A - 1} = \tan^2 A$ எனக்காட்டு

5. $\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \tan\theta.\sin\theta$ எனக்காட்டு

6. சுருக்குக : $\sec A\,(1-\sin A)\,(\sec A + \tan A)$

7. நிரூபிக்க : $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

8. சுருக்குக : $(1 - \cos\theta)\,(1 + \cos\theta)\,(1 + \cot^2\theta)$

9. $\sec\theta + \tan\theta = p$. எனில் $\sec\theta - \tan\theta$ ன் மதிப்பு என்ன?

10. $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = k$ எனில் $\cos\theta = \dfrac{k^2-1}{k^2+1}$ என நிரூபி.

விருப்பப் பயிற்சி
(தேர்வுக்குரியவை அல்ல)

1. $\dfrac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \dfrac{\operatorname{cosec}\theta - 1}{\operatorname{cosec}\theta + 1}$ என நிரூபி.

2. $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$ என நிரூபி. ($\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ எனும் முற்றொருமையை பயன்படுத்து)

3. $(\operatorname{cosec} A - \sin A)\,(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$ என நிரூபி.

4. $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ என நிரூபி.

5. $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1+\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$ என நிரூபி.

6. $\left(\dfrac{(\sec A - 1)}{(\sec A + 1)}\right) = \left(\dfrac{(1-\cos A)}{(1+\cos A)}\right)$ என நிரூபி.

செயல்திட்டம்

- முக்கோணவியல் விகிதங்கள், பல்வேறுபட்ட கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களை அட்டவணைப்படுத்துதல்

நாம் கற்றவை

1. Bல் செங்கோணத்தைக் கொண்ட செங்கோண முக்கோணம் ABCல்

$$\sin A = \frac{\text{கோணம் A ன் எதிர்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}, \quad \cos A = \frac{\text{கோணம் A ன் அடுத்துள்ளபக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$$

2. $\text{cosec}\, A = \dfrac{1}{\sin A}$; $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$

3. ஒரு குறுங்கோணத்தின் ஒரு முக்கோணவியல் விகிதம் தெரிந்தால் மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களை கண்டறியலாம்.

4. $0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o$ ஆகியவை முக்கோணவியல் விகிதங்கள் ஆகும்.

5. $\sin A$ அல்லது $\cos A$ ன் மதிப்புகள் எப்போதும் 1ஐவிட அதிகமாக இருக்காது. ஆனால் $\sec A$ அல்லது $\text{cosec}\, A$ ன் மதிப்புகள் எப்போதும் 1 அல்லது அதைவிட அதிகமாக இருக்கும்.

6. $\sin(90^o - A) = \cos A$, $\cos(90^o - A) = \sin A$

   $\tan(90^o - A) = \cot A$, $\cot(90^o - A) = \tan A$

   $\sec A(90^o - A) = \text{cosec}\, A$, $\text{cosec}(90^o - A) = \sec A$

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

   $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ இங்கு $0^o \le A \le 90^o$

   $\text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$ இங்கு $(0^o \le A \le 90^o)$

அத்தியாயம்

12

முக்கோணவியலின் பயன்பாடுகள்

(APPLICATIONS OF TRIGONOMETRY)

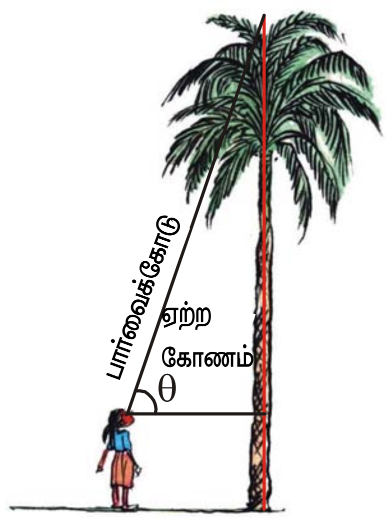
12.1 அறிமுகம்

உலகின் மிகப்பெரிய சிகரம் எவரெஸ்ட் என்றும் அதன் உயரம் 8848மீ என்றும் சமூக அறிவியலில் நீங்கள் படித்திருக்கிறீர்கள்.

அதிலாபாத் மாவட்டத்தில் உள்ள குண்டாலா நீர்வீழ்ச்சி ஆந்திரபிரதேசத்தில் உள்ள மிகப்பெரிய இயற்கை நீர்வீழ்ச்சி ஆகும். இதனுடைய உயரம் 147 அடிகள்.

இந்த உயரங்களை எவ்வாறு அளந்திருப்பார்கள்? உங்களுடைய பள்ளி கட்டிடத்தின் உயரத்தையோ அல்லது பள்ளியின் சுற்றுப்புறத்தில் உள்ள மிக உயரமான மரத்தின் உயரத்தையோ உங்களால் அளக்க முடியுமா?

நாம் சில உதாரணங்களின் மூலம் அறிந்துக்கொள்ளலாம். விஜயா பனைமரத்தின் உயரத்தை அறிய விரும்பினாள். அவளுடைய கண்ணிலிருந்து மரத்தின் உச்சி புள்ளிவரை கற்பனையாக ஒரு நேர்க்கோட்டை இணைத்துக்கொண்டாள். இந்த நேர்கோட்டை பார்வைக்கோடு என்பர்.

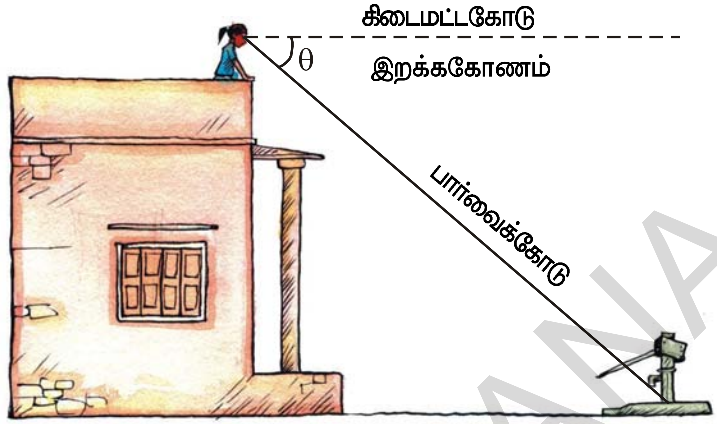


மேலும் அவள், தன் கண்ணிலிருந்து மரம்வரை தரைக்கு இணையாக ஒரு கிடைக்கோட்டை படத்தில் காட்டியபடி ஊகித்துக்கொண்டாள். பார்வைக்கோடு, கிடைக்கோடு மற்றும் அந்தமரம் ஆகிய மூன்றும் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது.

அவள் மரத்தின் உயரத்தை கண்டுபிடிப்பதற்கு இந்தமுக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளமும், ஒரு கோண அளவும் தேவைப்படுகிறது.

கிடைக்கோட்டிற்கு மேல் பகுதியில் பார்வைக்கோடு அமைகிறது. பார்வைக் கோட்டிற்கும் கிடைக்கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணம் ஏற்றகோணம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

நீ உன்னுடைய பள்ளிகட்டிட மாடியின் மேல் படத்தில் காட்டியவாறு நின்று இருப்பதாக நினைத்துக்கொள். பள்ளிக்கட்டித்தின் அடிப்பகுதியிலிருந்து குழாய் கிணறு (borewell) வரைக்கும் உள்ள தூரத்தை காணவேண்டும் என்று நினைக்கிறாய். அதற்கு குழாய் கிணற்றின் அடிப்பகுதியை நீ கவனிக்க வேண்டும்.



உன்னுடைய கண்ணிற்கும் கிணற்றின் அடிப்பகுதிக்கும் இடையே உள்ள பார்வைக்கோடு கிடை கோட்டிற்கு கீழே இருக்கும்.

இங்கு பார்வைக்கோட்டிற்கும் கிடைக்கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் இறக்கக்கோணம் எனப்படும்.

பல நூற்றாண்டுகளாக நிலஅளவையர் (Surveyors) முக்கோணவியலை பயன்படுத்திவருகிறார்கள். நிலத்தை அளக்கும்போது ஏற்றகோணம் அல்லது இறக்கக்கோணத்தை அளவிட தியோடலைட் (theodolite) எனும் கருவியை பயன்படுத்துகிறார்கள். 19ஆம் நூற்றாண்டின் "Great Trigonometric Survey" என்ற பெயரில் பிரிட்டீஷ் இந்தியா இந்தியாவில் அளவிடும் திட்டத்திற்கு இரண்டு பெரிய தியோடலைட்களை தயார்செய்தது. இந்த அளவிடும் திட்டத்தின் போது 1852ல், இமயமலைத்தொடரில் உலகிலேயே மிகப்பெரிய சிகரமான எவரெஸ்ட் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. அச்சிகரத்தைச்சுற்றி 160கி.மீ. தொலைவில் அமைக்கப்பட்ட ஆறு ஆய்வு நிலையங்களிலிருந்து கவனித்து அச்சிகரத்தின் உயரம் கணக்கிடப்பட்டது. இந்த மிகப்பெரிய தியோடலைட் கருவியை முதன்முதலில் பயன்படுத்திய அதிகாரியான சர்ஜார்ஜ் எவரெஸ்ட் என்பவரை கௌரவிக்கும் விதமாக அச்சிகரத்திற்கு 1856ல் எவரெஸ்ட் சிகரம் என்று பெயர் சூட்டப்பட்டது. இந்த தியோடலைட் கருவிகளை டெஹ்ராடூனில் உள்ள Museum of the survey of India எனும் பொருட்காட்சி நிலையத்தில் பார்வைக்காக வைக்கப்பட்டுள்ளது.

12.2 கணக்குகளின் தீர்வுகளை காண்பதற்கு படம் வரைதல்

தூரங்களும் உயரங்களும் சார்ந்த கணக்குகளின் தீர்வுகளை காணும்போது கீழ்கண்டவற்றை கவனத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

(i) கோபுரங்கள், மரங்கள், கட்டிடங்கள், கப்பல்கள், மலைகள் ஆகியவற்றை கணக்கிடுவதற்கு வசதியாக நேர்க்கோடுகளாக எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

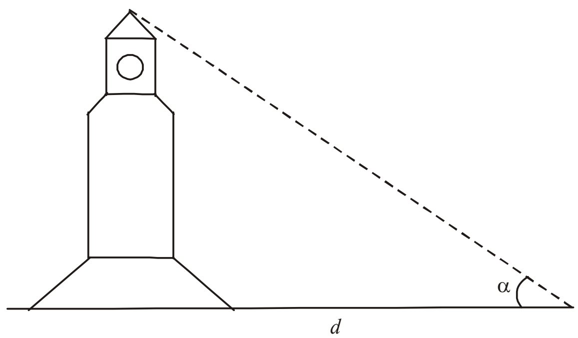
(ii) ஏற்றகோணம் அல்லது இறக்கக்கோணத்தை கிடைக்கோட்டின் அடிப்படையிலேயே எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

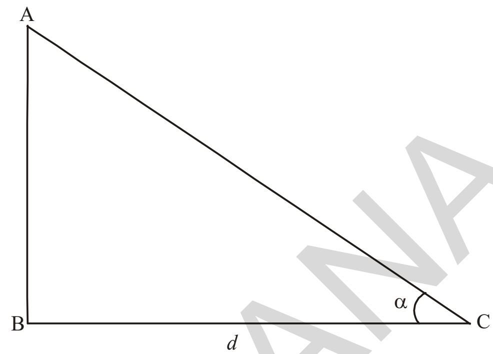
(iii) பார்வையாளரின் உயரம் தரப்படாவிடில் பார்வையாளரின் உயரத்தை தவிர்க்கலாம்.

தூரங்களும், உயரங்களும் சார்ந்த கணக்குகளின் தீர்வுகளை காண்பதற்கு ஏற்ற அல்லது இறக்கக் கோணங்களுக்கு தக்கவாறு ஒரு மாதிரி வடிவியல் படத்தை வரைந்துக்கொள்வது அவசியம். இந்த மாதிரி படத்தின் உதவியுடன் தூரம் மற்றும் உயரத்தின் அளவுகளைக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-1. ஒரு கடிகார கோபுரத்தின் உச்சியை, கடிகாரகோபுரத்தின் அடியிலிருந்து d மீ. தொலைவில் உள்ள ஒருவர் α^{o} ஏற்றகோணத்தில் காண்கிறார். இந்த விவரத்திற்கான படம் வரைக.

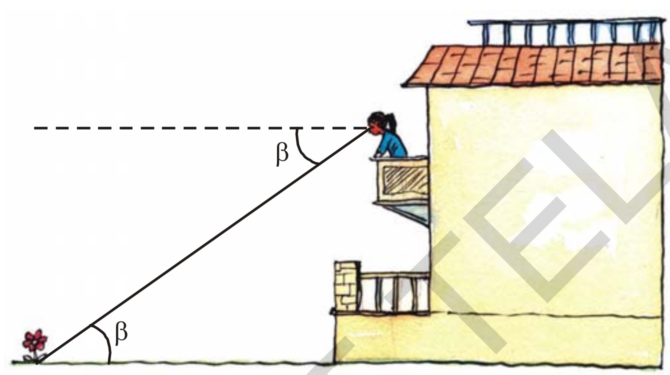
தீர்வு : படத்தை கீழ்கண்டவாறு வரையலாம்

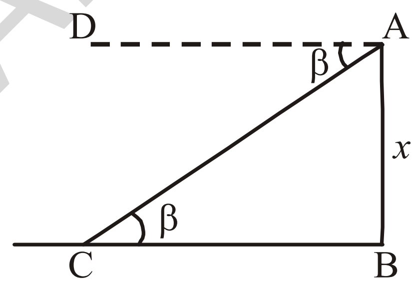




எடுத்துக்காட்டு-2. xமீ உயரமுள்ள ஒரு மாடியிலிருந்து ராதா தரையில் உள்ள ஒரு பூவை β^{o} இறக்கக்கோணத்தில் காண்கிறாள். இந்த விவரத்திற்கு ஒருபடம் வரைக.

தீர்வு :



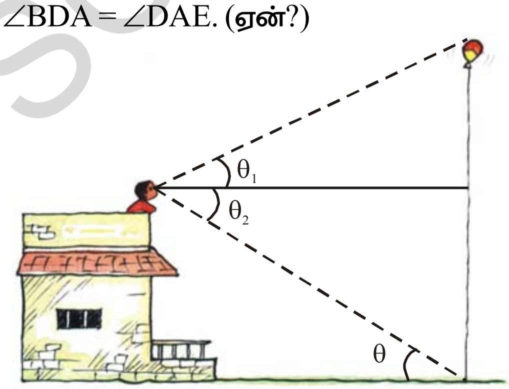


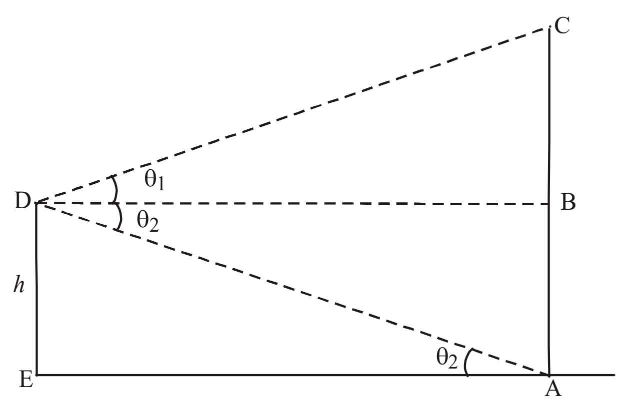
இங்கு $\angle DAC = \angle ACB = \beta$ (ஏன்?)

எடுத்துக்காட்டு-3. ஒரு பெரிய பலூன் கயிற்றினால் கட்டப்பட்டு காற்றில் பறந்துக்கொண்டிருக்கிறது. மாடியிலிருந்து ஒருவர் பலுனை θ_1 ஏற்றகோணத்திலும் கயிற்றின் கீழ்முனையை θ_2 இறக்கக்கோணத்திலும் காண்கிறார். மாடியின் உயரம் h அடிகள். இந்த விவரத்திற்கு ஒரு படம் வரைக.

தீர்வு : இங்கு நாம் கவனிக்கத்தக்கது

$\angle BDA = \angle DAE$. (ஏன்?)





இதை செய்

1. கீழ்கண்ட சூழ்நிலைகளுக்கு படம் வரைக.

   (i) ஒருவர் α^o ஏற்றகோணத்தில் ஒரு பட்டத்தை பறக்கவிட்டுக்கொண்டிருக்கிறார். அவருடைய கையிலிருந்து பட்டம் வரையுள்ள நூலின் நீளம் 'l'.

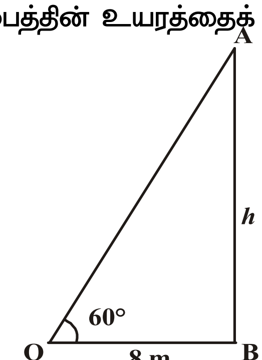
   (ii) ஆற்றின் அருகில் உள்ள h உயரம் உள்ள ஒரு மரத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒருவர் ஆற்றின் இருகரைகளை θ_1 மற்றும் θ_2 $(\theta_1 < \theta_2)$ இறக்க கோணங்களில் காண்கிறார். ஆற்றின் அகலம் 'd'.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

1. உன்னுடைய பள்ளிக்கட்டிடத்திலிருந்து d மீ தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பள்ளிக்கட்டித்தின் மாடியை α^o ஏற்றகோணத்தில் காண்கிறாய் எனில் பள்ளிக்கட்டிடத்தின் உயரத்தை கணக்கிடுவதற்கு எந்த முக்கோணவியல் விகிதத்தை பயன்படுத்துவாய்?
2. x மீ நீளமுள்ள ஏணி ஒன்று தரையுடன் θ கோணம் ஏற்படுமாறு சுவற்றின்மீது சாய்க்கப்பட்டுள்ளது. சுவரின் அடிப்பகுதியிலிருந்து ஏணி தொடும் புள்ளிவரை உள்ள சுவரின் உயரத்தை கணக்கிடுவதற்கு எந்த முக்கோணவியல் விகிதத்தை பயன்படுத்துவாய்?

இதுவரை தரபட்டுள்ள விவரங்களுக்கு ஏற்றவாறு எவ்வாறு படங்களை வரைவது என்பதை அறிந்துக்கொண்டீர்கள். இப்பொழுது உயரங்களும் தூரங்களும் சார்ந்த கணக்குகளை கவனிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-4. ஒரு மின்கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 8மீ தூரத்திலிருக்கும் ஒரு சிறுவன் மின்கம்பத்தின் உச்சியை 60^o ஏற்றகோணத்தில் காண்கிறான். மின்கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க.



தீர்வு : படத்திலிருந்து முக்கோணம் OABல்

OB = 8 மீ

$\angle AOB = 60^o$

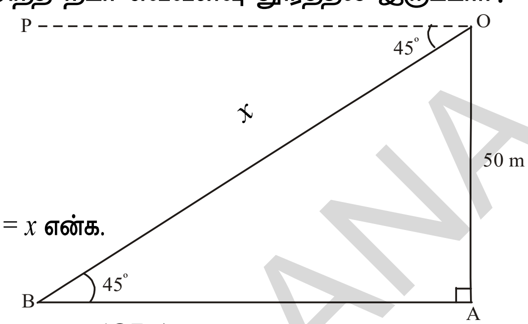
கம்பத்தின் உயரம் = AB = h மீ

(ΔOABல் $\angle AOB$ அடுத்துள்ள பக்க மதிப்பு தெரியும். நாம் $\angle AOB$ன் எதிர்பக்க மதிப்பை காணவேண்டும். எனவே கணக்கிற்கு தீர்வு காண்பதற்கு முக்கோணவியல் விகிதம் "tan"ஐ கருதுவோம்)

$$\tan 60^o = \frac{AB}{OB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{8} \qquad\qquad h = 8\sqrt{3} \text{ மீ}$$

எடுத்துக்காட்டு-5. ராஜேந்தர் ஹெலிகாப்டரிலிருந்து தரையின் மீது உள்ள ஒருவரை 45^o இறக்க கோணத்தில் காண்கிறார். தரையிலிருந்து 50மீ உயரத்தில் ஹெலிகாப்டர் பறந்துக்கொண்டிருந்தால் ராஜேந்திரனிடமிருந்து அந்த நபர் எவ்வளவு தூரத்தில் இருப்பார்?



தீர்வு : படத்திலிருந்து, முக்கோணம் OABல்

$OA = 50$ மீ

$\angle POB = \angle OAB = 45^o$ (ஏன் ?)

OB = ராஜேந்திரனிடமிருந்து அந்த நபருக்கு உள்ள தூரம் $= x$ என்க.

(ΔOABல் $\angle OBA$ ன் எதிர்பக்க மதிப்பு தெரியும். நாம் $\angle OBA$ ன் கர்ணத்தின் மதிப்பைக் காணவேண்டும். எனவே கணக்கிற்கு தீர்வு காண உதவும் முக்கோணவியல் விகிதம் "sin" ஆகும்.)

$$\sin 45^o = \frac{OA}{OB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{50}{x}$$

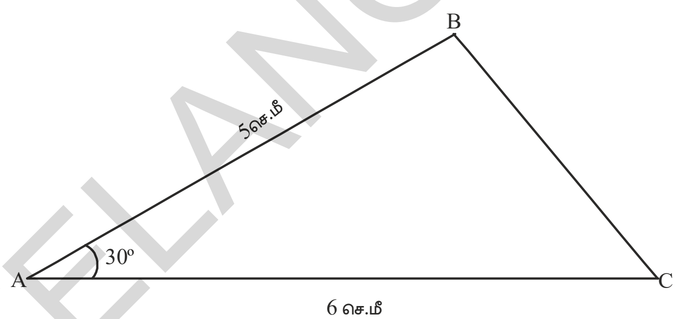
$$x = 50\sqrt{2} \text{ மீ}$$

(ராஜேந்திரனிடமிருந்து அந்த நபர் $50\sqrt{2}$ மீ. தூரத்தில் இருக்கிறார்.)

பயிற்சி - 12.1

1. ஒரு கோபுரம் செங்குத்தாக நின்றுகொண்டுள்ளது. கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 15மீ தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியலிருந்து அந்த கோபுர உச்சியின் ஏற்றகோணம் 45^o எனில் கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.
2. காற்றில் ஒரு மரம் முறிந்து, அதன் உச்சி தரையுடன் 30^o கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. மரத்தின் உச்சி மரத்தின் அடியிலிருந்து 6மீ. தொலைவில் தரையை தொடுகிறது. முறிவதற்குமுன் மரத்தின் உயரத்தை கண்டுபிடி.
3. ஒரு ஒப்பந்தக்காரர், பூங்காவில் சிறுவர்களுக்கான சறுக்குப்பலகையை அமைக்க விரும்பினார். அதை 2 மீ உயரத்திலும் தரையுடன் 30^o கோணத்தை ஏற்படுத்துமாறும் அமைக்க விரும்பினார். அந்த பலகையின் நீளம் எவ்வளவு இருக்கவேண்டும்?
4. 15மீ நீளமுள்ள கம்பம் ஒன்று காலை 7மணிக்கு $15\sqrt{3}$மீ. நீளமுள்ள நிழலை ஏற்படுத்துகிறது. அந்த நேரத்தில் சூரியகதிர் தரையுடன் ஏற்படுத்தும் ஏற்றகோணம் என்ன?
5. ராஜா 10மீ நீளமுள்ள கம்பத்தை நிற்க வைக்க மூன்று பலமான கயிறுகளை பயன்படுத்தினார். ஒவ்வொரு கயிறும் கம்பத்துடன் 30^o கோணத்தை ஏற்படுத்தினால் கயிற்றின் நீளம் எவ்வளவு இருக்கும்?

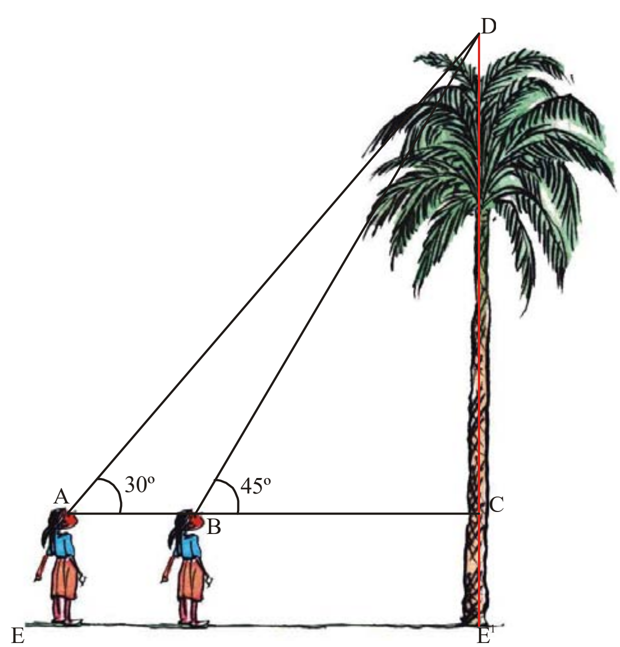
6. விஜய், 6மீ உயரமுள்ள மாடியின் மீதிருந்து தரையின் மீது உள்ள ஒரு இலக்கை 60^o இறக்கக்கோணத்தில் ஒரு அம்பினால் தாக்க நினைத்தார். விஜயிடமிருந்து அந்த இலக்கு எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது?
7. 9மீ உயரமுள்ள மின்கம்பத்தில் ஏறி ஒரு மின்வாரிய ஊழியர், மின் இணைப்பை சரிசெய்ய வேண்டியுள்ளது. அந்த வேலையை செய்வதற்கு அவர் அந்த மின்கம்பத்தின் உச்சியிலிருந்து 1.8மீ உயரத்தை அடையவேண்டும். ஒரு ஏணியை தரையில் 60^o கோணத்தில் வைக்கவேண்டுமென்றால் ஏணியின் உயரம் எவ்வளவு இருக்கவேண்டும்? ஏணியின் அடியிலிருந்து கம்பத்தின் அடிவரையுள்ள தூரம் எவ்வளவு?
8. ஒரு படகு ஒரு நதியை கடக்கவேண்டியுள்ளது. படகு நதியை கடக்கும்போது நதிநீர் ஓட்டத்தால் படகு தரையுடன் 60^o கோணத்தை ஏற்படுத்திக்கொண்டு 600மீ பயணம்செய்து தரையின் மற்றொரு முனையை அடைகிறது எனில் நதியின் அகலத்தைக் கண்டுபிடி.
9. 1.8மீ உயரமுள்ள ஒருவர், பனைமரத்திலிருந்து 13.2மீ தூரத்தில் நிற்கிறார். அவர் பனைமரத்தின் உச்சியை 45^o ஏற்றகோணத்தில் காண்கிறார் எனில் பனைமரத்தின் உயரம் என்ன?
10. அருகில் உள்ள படத்தில், AC= 6செ.மீ, AB = 5செ.மீ மற்றும் $\angle BAC = 30^o$. எனில் முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.



12.3 இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களுடன் கூடிய கணக்குகள்

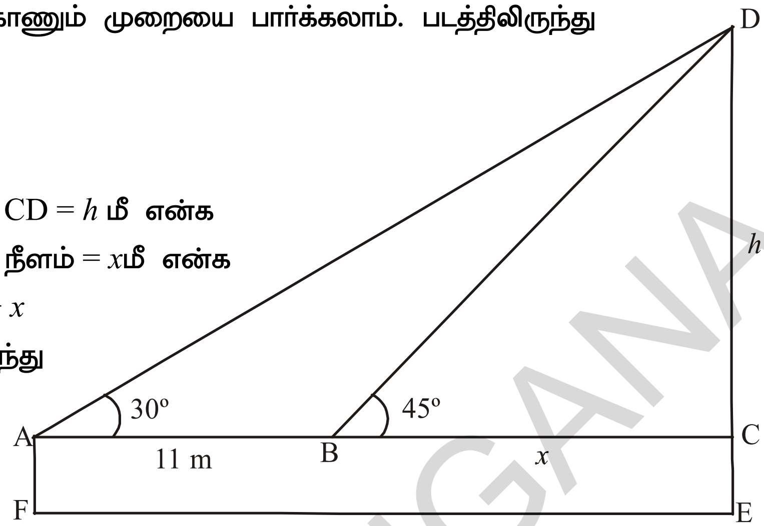
நாம் இதுவரை ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தைச் சார்ந்த கணக்குகளின் தீர்வுகளைக் கண்டோம். இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களை சார்ந்த கணக்குகளின் தீர்வுகளை எவ்வாறு காண்பது?

நீ மரத்தின் ஒருபுறத்தில் நின்றுகொண்டிருப்பதாக நினைத்துக்கொள். நீ அந்த மரத்தின் உச்சியை இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளிலிருந்து உற்றுநோக்கி மரத்தின் உயரத்தைக் காண விரும்புகிறாய் என நினைத்துக்கொள்.



இதை நீ எவ்வாறு செய்வாய்? நீ மரத்தின் உச்சியை 45^o ஏற்றகோணத்தில் காண்கிறாய் என நினைத்துக்கொள். மரத்திலிருந்து மேலும் 11மீ தூரம் நகர்ந்து அம்மரத்தின் உச்சியை காணும்போது 30^o ஏற்றகோணமாக மாறுகிறது.

அந்த மரத்தின் உயரத்தை காணும் முறையை பார்க்கலாம். படத்திலிருந்து



AB = 11மீ

$\angle DAC = 30^\circ$

$\angle DBC = 45^\circ$

பனைமரத்தின் உயரம் CD = h மீ என்க

BCன் நீளம் = xமீ என்க

$AC = 11 + x$

முக்கோணம் BDCவிருந்து

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h\sqrt{3} \qquad \text{...(1)}$$

முக்கோணம் ADCவிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{DC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{11+x}$$

$$h = \frac{11+x}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{\sqrt{3}} + \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$h - \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{\left(\sqrt{3}-1\right)} \text{ மீ.}$$

குறிப்பு : பனைமரத்தின் மொத்த உயரம்=CD + CE . இங்கு CE = AF. இது சிறுமியின் உயரம்.

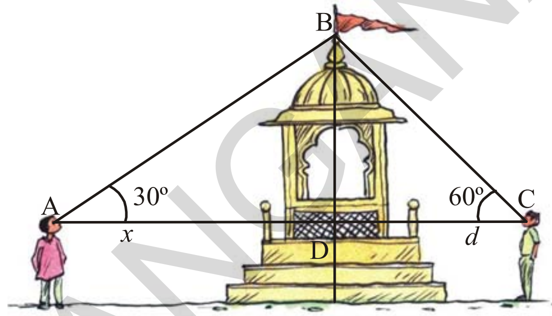
எடுத்துக்காட்டு-6. இரண்டு சிறுவர்கள் 30மீ உயரமுள்ள கோயிலின் எதிரெதிர் பக்கங்களில் நின்றுகொண்டு கோபுரத்தின் உச்சியை முறையே 30°, 60° ஏற்றுக்கோணத்தில் காண்கின்றனர். இரண்டு சிறுவர்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் என்ன?

தீர்வு : படத்திலிருந்து கோயிலின் உயரம் $BD = 30$மீ

முதல் சிறுவனின் ஏற்றகோணம் $\angle BAD = 30^{\circ}$

இரண்டாவது சிறுவனின் ஏற்றகோணம் $\angle BCD = 60^{\circ}$

முதல் சிறுவனுக்கும் கோயிலுக்கும் இடையே உள்ள தூரம் $AD = x$ மீ என்க. இரண்டாவது சிறுவனுக்கும் கோயிலுக்கும் இடையே உள்ள தூரம் $CD = d$ மீ என்க.



ΔBADலிருந்து

$$\tan 30^{\circ} = \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{x}$$

$$x = 30\sqrt{3} \text{ .... (1)}$$

ΔBCDலிருந்து

$$\tan 60^{\circ} = \frac{BD}{d}$$

$$\sqrt{3} = \frac{30}{d}$$

$$d = \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ .... (2)}$$

(1)மற்றும் (2)லிருந்து இரண்டு சிறுவர்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம்$= BC + BA = x + d$

$$= 30\sqrt{3} + \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30 X 4}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3} \text{ மீ}$$

எடுத்துக்காட்டு-7. ஒரு நேரான நெடுஞ்சாலை ஒரு கோபுரத்தின் அடியை நோக்கிச் செல்கிறது. கோபுரத்தின் உச்சியில் நின்றுகொண்டிருக்கும் ராமையா சீரான வேகத்தில் வந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு ஊர்தியை 30° இறக்கக்கோணத்தில் காண்கிறார். 6 விநாடிகளுக்குப் பிறகு அந்த ஊர்தியின் இறக்கக் கோணம் 60° எனில் கோபுரத்தின் அடியை அடைய ஊர்தி மேலும் எத்தனை விநாடிகள் எடுத்துக்கொள்ளும்?

தீர்வு : படத்திலிருந்து, ஊர்தி 6 விநாடிகளில் பிரயாணம் செய்த தூரம் $= AB = x$மீ என்க.

கோபுரத்தின் உயரம் $CD = h$ மீ

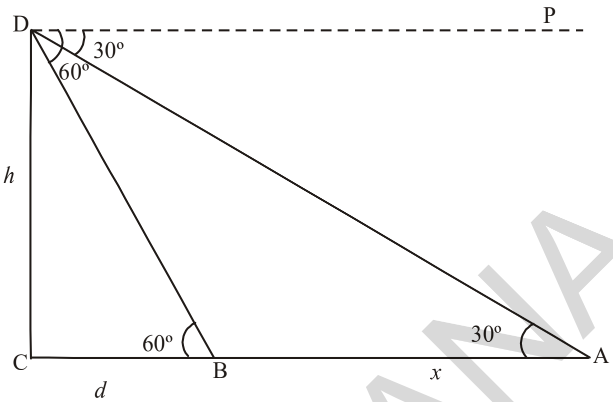
ஊர்தி கோபுரத்தை அடைய மேலும் பிரயாணம் செய்ய வேண்டிய தூரம் $BC = d$மீ

மேலும் $AC = AB + BC = (x + d)$ மீ

$\angle PDA = \angle DAP = 30^{\circ}$ (ஏன்?)

$\angle PDB = \angle DBP = 60^{\circ}$ (ஏன்?)

ΔBCDலிருந்து



$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{d}$$

$$h = \sqrt{3}d \qquad ...(1)$$

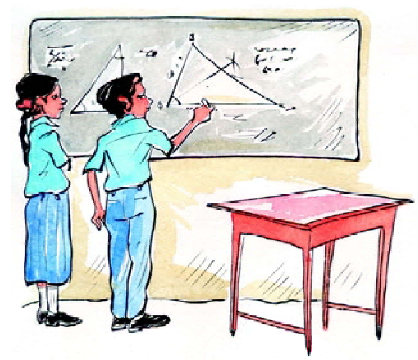
ΔACD லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(x+d)}$$

$$h = \frac{(x+d)}{\sqrt{3}} \qquad ...(2)$$

(1) & (2) லிருந்து



$$\frac{x+d}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}d$$

$$x + d = 3d$$

$$x = 2d$$

$$d = \frac{x}{2}$$

'x'மீ தூரத்தைக் கடக்க எடுத்துக்கொண்ட காலம் = 6விநாடிகள்

$d=\frac{x}{2}$ மீ தூரத்தைக் கடக்க எடுத்துக்கொண்ட காலம் = 3விநாடிகள்

பயிற்சி - 12.2

1. ஒரு டி.வி. கோபுரம் ஒரு சாலையின் ஒருபுறம் உள்ளது. சாலைக்கு மறுபுறம் டி.வி.கோபுரத்தின் நேர்எதிரான ஒரு புள்ளியிலிருந்து டி.வி.கோபுர உச்சியின் ஏற்றகோணம் 60^0ஆகும். டி.வி. கோபுர அடிக்கும் அந்தபுள்ளிக்கும் இணைக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டின் மீது அந்தப்புள்ளியிலிருந்து 10மீ தூரத்தில் உள்ள மற்றொரு புள்ளியிலிருந்து டி.வி.கோபுர உச்சியின் ஏற்றகோணம் 30°. டி.வி. கோபுரத்தின் உயரத்தையும் சாலையின் அகலத்தையும் காண்க.

2. 1.5மீ உயரமுள்ள ஒரு சிறுவன் ஒருகுறிப்பிட்ட தூரத்திலிருந்து 30மீ உயரமுள்ள கோயிலின் உச்சியை காண்கிறான். அவன் கோயிலை நோக்கி நடந்து வருகையில் கோபுர உச்சியின் ஏற்றகோணம் 30^{o} லிருந்து 60^{o} ஆக உயர்ந்தது. அவன் கோயிலை நோக்கி நடந்து வந்த தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

3. ஒரு சுவாமிசிலை 2மீ உயரமுள்ள மேடையின்மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து சிலையின் உச்சி மற்றும் மேடையின் மேல்தளம் ஆகியவற்றின் ஏற்றகோணங்கள் முறையே 60^{o} மற்றும் 45^{o} எனில் சிலையின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

4. ஒரு கட்டிடத்தின் மாடியிலிருந்து ஒரு கோபுரத்தின் (cell tower) உச்சி மற்றும் அடியின் ஏற்ற, இறக்க கோணங்கள் முறையே 60^{o} மற்றும் 45^{o}. கோபுரத்திலிருந்து கட்டிடத்தின் தூரம் 7மீ எனில் கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

5. 18மீ நீளமுள்ள ஒரு கயிறு, தரையுடன் 30^{o} ஏற்றகோணம் ஏற்படுமாறு மின்கம்பத்தில் கட்டி வைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிறு, மிகநீளமாக உள்ள காரணத்தினால் கயிற்றை சிறிதளவு வெட்டி எடுத்துவிட்டு, மீதியுள்ள கயிறு தரையுடன் 60^{o} ஏற்றகோணம் ஏற்படுமாறு கட்டப்பட்டது. வெட்டி எடுக்கப்பட்ட கயிற்றின் நீளம் என்ன?

6. ஒரு கோபுரத்தின் அடிப்பகுதியிலிருந்து ஒரு கட்டிட உச்சியின் ஏற்றகோணம் 30^{o} மற்றும் கட்டிடத்தின் அடிப்பகுதியிலிருந்து கோபுர உச்சியின் ஏற்றகோணம் 60^{o}. கோபுரத்தின் உயரம் 30மீ எனில் கட்டிடத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

7. சமமான உயரமுள்ள இரண்டு கம்பங்கள், 120அடி அகலமுள்ள சாலையின் இருபுறங்களிலும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்எதிராக நிற்கவைக்கப்பட்டுள்ளன. இரண்டு கம்பங்களுக்கு இடையில் சாலையின் மீதுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து கம்பங்களின் உச்சியின் ஏற்றகோணங்கள் முறையே 60^{o} மற்றும் 30^{o}. கம்பங்களின் உயரத்தையும், கம்பங்களிலிருந்து புள்ளிக்கு உள்ள தூரங்களையும் கண்டுபிடி.

8. கோபுரத்தோடு ஒரே நேர்கோட்டில் அமைந்த 4மீ மற்றும் 9மீ தூரங்களில் உள்ள இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக்கோணங்களாக உள்ளன. கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

9. கிடைநிலையில் பறந்துகொண்டிருக்கும் ஒரு ஜெட் விமானத்தை தரைமீதுள்ள A எனும்புள்ளியிலிருந்து பார்க்கும்போது அதன் ஏற்றகோணம் 60^{o}. அவ்விமானம் அதே கிடைநிலையில் 15விநாடிகள் பறந்தபின் அதே புள்ளியிலிருந்து அந்த விமானத்தின் ஏற்றகோணம் 30^{o} ஆக மாறுகிறது. அவ்விமானம் $1500\sqrt{3}$ மீ, மாறாத உயரத்தில் பறந்துக்கொண்டிருந்தால் அவ்விமானத்தின் வேகத்தைக் கண்டுபிடி. $\left(\sqrt{3}=1.732\right)$

10. ஒரு கட்டிடத்தின் அடிப்பகுதியிலிருந்து ஒரு கோபுர உச்சியின் ஏற்றகோணம் 30^{o} மற்றும் கோபுரத்தின் அடிப்பகுதியிலிருந்து கட்டிட உச்சியின் ஏற்றகோணம் 60^{o}. கோபுரத்தின் உயரம் 30மீ எனில் கட்டிடத்தின் உயரங்களின் விகிதங்களை கண்டுபிடி.

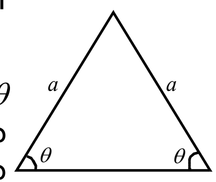
விருப்பப் பயிற்சி (தேர்வுக்குரிய வினாக்கள் அல்ல)

1. 1.2மீ உயரமுள்ள சிறுமி தலையிலிருந்து 88.2மீ உயரத்தில் கிடைநிலைக்கோட்டில் காற்றில் நகரும் ஒரு பலூனை 60^o ஏற்ற கோணத்தில் பார்க்கிறாள். சிறுது நேரம் கழித்து, அதே இடத்திலிருந்து அவள் பலூனை பார்க்கும்போது ஏற்றகோணம் 30^o ஆக குறைகிறது எனில் இக்கால இடைவெளியில் பலூன் நகர்ந்த தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

2. ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ள A, B மற்றும் C எனும் மூன்று படகுகளிலிருந்து, அதே திசையில் உள்ள கலங்கரைவிளக்கத்தின் ஏற்றகோணங்கள் முறையே $a, 2a, 3a$. A மற்றும் B படகுகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் xமீ எனில் கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

3. கனசெவ்வக வடிவில் உள்ள அலமாறியின் உட்புறம் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் ஆகியவை $1 : \sqrt{2} : 1$ விகிதத்தில் உள்ளன. அந்த அலமாறியின் உட்புறம் மூலைவிட்டமாக அமைக்கப்பட்ட மிகநீளமான பலகை, அடிப்பகுதியுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் எவ்வளவு?

4. ஒரு கோளவடிவ இரும்புப் பந்தின் கனஅளவு 232848செ.மீ^{3}. அதை உருக்கி 120^o உச்சிகோணம் கொண்ட கூம்பை தயார்செய்தால் அக்கூம்பின் உயரத்தையும், அடியின் ஆரத்தையும் கண்டுபிடி.



5. ஒரு இருசமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $A = a^2 \text{Sin}\,\theta \,\text{Cos}\,\theta$ எனக்காட்டு. இங்கு a என்பது இரண்டு சமமான பக்கங்களில் ஒன்றின் நீளம் θ என்பது இரண்டு சமமான கோணங்களில் ஒன்றின் அளவாகவும் உள்ளது.

செயல்திட்டம்

- குளோனோ மீட்டர் உபகரணத்தைப் பயன்படுத்தி கோபுரம் / கட்டிடம் / மரம் போன்றவற்றின் உயரம் மற்றும் அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட தூரங்களை கண்டுபிடித்தல்

நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் கீழ்கண்ட கருத்துகளை அறிந்துகொண்டோம்.

1. (i) நாம் ஒரு பொருளைப் பார்க்கும்போது நமது கண்ணிலிருந்து அப்பொருளுக்கு உள்ள நேர்க்கோடு பார்வைக்கோடு எனப்படும்.
   (ii) ஒரு பொருள் நம் கிடைநிலை பார்வைக்கோட்டிற்கு மேலே இருக்கும்போது பார்வைக்கோடு, நிலைக்கோட்டுடன் ஏற்படுத்தும்கோணம் ஏற்றகோணம் எனப்படும்.
   (iii) ஒரு பொருள் நம் கிடைநிலை பார்வைக்கோட்டிற்கு கீழே இருக்கும்போது பார்வைக்கோடு, கிடைக்கோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் இறக்கக்கோணம் எனப்படும்.

2. ஒரு பொருளின் உயரத்தையோ அல்லது நீளத்தையோ அல்லது இரண்டு பொருட்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தையோ கணக்கிடுவதற்கு முக்கோணவியல் விகிதங்களை பயன்படுத்துகிறோம்.

அத்தியாயம்

13 நிகழ்தகவு

(PROBABILITY)

13.1 அறிமுகம்

குமார் மற்றும் சுதா தாம் விளையாடிக் கொண்டிருக்கும் கேரம் விளையாட்டுப்பற்றி கீழ்கண்டவாறு விவாதித்துக்கொண்டார்கள்.

குமார்: நாம் வெற்றி பெறுவோம் என்று நினைக்கிறாயா?

சுதா : நாம் வெற்றி பெறுவதற்கு 50% வாய்ப்புகள் உள்ளன. நாம் வெற்றி பெறலாம்.

குமார்: 50% வாய்ப்புகள் உள்ளது என்று எவ்வாறு கூறுகிறாய்?

மேற்கண்ட உரையாடலில் சுதாவின் கூற்று எந்த அளவிற்கு உண்மை என்று நினைக்கிறாய்?

அவர்கள் வெற்றி பெறுவதற்கு 50% வாய்ப்புகள் உள்ளனவா?

இந்த அத்தியாயத்தில் இவ்விதமான வாய்ப்புகளைக் குறித்து படிக்கப்போகிறோம். மேலும் நிகழ்தகவு, நிகழ்வுகள், வாய்ப்புகள் போன்றவைகளை குறித்தும் விவாதித்து அவைகளை எவ்வாறு கணிக்க வேண்டும் என்பதைப் பற்றியும் விவாதிக்கப்போகிறோம். நாம் 9ஆம் வகுப்பில் நிச்சயமாக நிகழ வாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் நிச்சயமாக நிகழவாய்ப்பில்லாத நிகழ்ச்சிகள் ஆகியவற்றைப்பற்றி படித்திருக்கிறோம். விழுவதற்கு சமமான வாய்ப்புகள் உள்ளது ஆனால் சரியாக எதுவிழும் என்று கூற முடியாத நிகழ்ச்சிகளின் வாய்ப்புகள், சாதகமான விளைவுகள் ஆகியவற்றைப் பற்றி படித்தோம். இந்த அத்தியாயத்தில் ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழக்கூடிய வாய்ப்புகளை எப்படி அளவிடலாம் என்பதை கற்றுக்கொள்ளலாம்.

இந்த அளவை எண் அளவாக (numerical measure) கொடுப்பதையே நிகழ்தகவு என்று குறிக்கப்படுகிறது.

13.1.1 நிகழ்தகவு என்றால் என்ன?

ஒரு பரிசோதனையை கவனிப்போம் : ஒரு நாணயம் 1000முறை சுண்டப்பட்டது. 455முறை தலையும் 545முறை பூவும் விழுந்தது. தலை கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பை கணக்கிட வேண்டுமானால் 1000க்கு 455ஆகும்.

அதாவது $\dfrac{455}{1000} = 0.455.$

ஒரு நாணயத்தை 1000முறை சுண்டப்பட்டபோது கிடைத்த முடிவை அடிப்படையாகக்கொண்டு இந்த நிகழ்தகவை மதிப்பிடப்படுவதால் இதை பரிசோதனை நிகழ்தகவு என்கிறோம். எல்லா சோதனை நிகழ்தகவுகளும் பரிசோதனை செய்யப்பட்டபோது ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்வுகள் பதிவு செய்யப்பட்டதை அடிப்படையாகக் கொண்டு மதிப்பிடப்படுகிறது. இந்த நிகழ்தகவுகள் மதிப்பீடுகள் மட்டுமே ஆகும். இந்த பரிசோதனையை மறுபடியும் 1000முறை செய்தால் கிடைக்கும் நிகழ்தகவு மதிப்பீடு மாறுபட்டிருக்கும்.

உலகத்தில் பலபகுதிகளில் உள்ளவர்கள் இதேவிதமான பரிசோதனைகளை செய்து தலை விழுந்த வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கையை பதிவுசெய்து உள்ளனர்.

உதாரணமாக 18ஆம் நூற்றாண்டில் பிரெஞ்சு விஞ்ஞானி காம்டே டி பப்பன் (comte de Buffon) 4040முறை ஒரு நாணயத்தை சுண்டியபோது 2048முறை தலை விழுந்தது. இந்த பரிசோதனையில் தலை கிடைப்பதற்கான பரிசோதனை நிகழ்தகவு $\frac{2048}{4040} = 0.507$.

J.E. கெரிச் (J.E.Kerrich) எனும் இங்கிலாந்து நாட்டவர் ஒரு நாணயத்தை 10000முறை சுண்டியதில் 5067 முறை தலை கிடைத்தது. தலை கிடைப்பதற்கான பரிசோதனை நிகழ்தகவு $\frac{5067}{10000} = 0.5067$. புள்ளியியல் மேதை கார்யல் பியர்சன் (Karl Pearson) ஒரு நாணயத்தை 24000முறை சுண்டியதில் 12012முறை தலை கிடைத்தது. தலை கிடைப்பதற்கான பரிசோதனை நிகழ்தகவு = 0.5005.

ஒருமில்லியன் முறை அல்லது 10மில்லியன் முறை ஒரு நாணயத்தை சுண்டும்போது தலை கிடைப்பதற்கான பரிசோதனை நிகழ்தகவு என்னவாக இருக்கும்? நாணயத்தை சுண்டும் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க தலை (அல்லது பூ) கிடைப்பதற்கான பரிசோதனை நிகழ்தகவு 0.5 அதாவது $\frac{1}{2}$ நெருங்குவதைக் காணலாம். ஆகவே நிகழ்வுகளை பரிசோதிக்காமலே அதை மதிப்பீடு செய்யலாம். இதையே தொன்மை நிகழ்தகவு (classical probability) என்கிறோம்.

இந்த அத்தியாயத்தில் ஒரு நிகழ்ச்சியின் Theoretical நிகழ்தகவு அறிமுகப்படுத்தப்படுகிறது. இந்த கருத்தை அடிப்படையாகக் கொண்ட சில கணக்குகளை நாம் விவாதிப்போம்.

13.2 நிகழ்தகவு தேற்ற விளக்கம்

ஒரு தெளிவான நாணயத்தை சமவாய்ப்பு முறையில் சுண்டப்படுகிறது என்க. தெளிவான நாணயத்தை சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ ஆகிய இரண்டில் ஒன்று மற்றொன்றைவிட அதிகம் விழுவதற்கான வாய்ப்பு இல்லை. இந்தமாதிரியான நாணயத்தின் பண்பை சமவாய்ப்புக் கொண்டவை என்கிறோம்.

சமவாய்ப்பு சுண்டுதல் என்பது நாணயத்தை சுண்டும்போது எந்தவிதமான தடங்கலோ, சுண்டுதலில் பாரபட்சமோ இல்லாமல் இருப்பது ஆகும். உதாரணமாக மணல்பரப்பில் சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ விழாமல் நாணயம் நிற்பதற்கு வாய்ப்பு உள்ளது. இந்த கட்டுபாடுகளுக்கு உட்பட்ட சோதனையை சமவாய்ப்பு சோதனை (Random experiment) என்கிறோம். தெளிவான நாணயத்தை சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ விழுவதற்கான வாய்ப்புகள் சமமாக உள்ளது. நிகழ்தகவு எனும் கருத்தை புரிந்துக்கொள்வதற்கு சோதனைகள் அனைத்தும் சமவாய்ப்பு விளைவுகளை கொண்டிருக்கிறது என்று நினைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

ஒரு நிகழ்ச்சி E ன் பரிசோதனை நிகழ்தகவு P(E) எனில்

$$P(E) = \frac{\text{நிகழ்வு ஏற்பட்ட முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{முயற்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

இதை செய்

a. கீழ்கண்ட பரிசோதனைகளில் எவை சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சி?

1. பகடையை உருட்டும்போது 1, 2, 3, 4, 5 அல்லது 6 கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு.
2. 5 சிவப்புநிற பந்துகள், 4 நீலநிறபந்துகள் மற்றும் 1 கருப்புநிற பந்து உள்ள பையிலிருந்து ஒரு பந்தை எதேச்சையாக எடுத்தல்.
3. கேரம் விளையாட்டில் வெற்றிபெறுதல்.
4. இரண்டு இலக்க எண்களில் ஒன்றுகள் இலக்கத்தில் 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 அல்லது 9 உள்ள எண்களை தேர்ந்தெடுத்தல்.
5. 10 சிவப்புநிற பந்துகள், 10 நீலநிற பந்துகள் மற்றும் 10 கருப்புநிற பந்துகள் உள்ள பையிலிருந்து ஒரு பந்தை எதேச்சையாக எடுத்தல்.
6. ஜுலை மாதத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் மழைபெய்தல்.

b. ஒவ்வொரு பரிசோதனையின் விளைவும் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சியா?

c. சமவாய்ப்பு விளைவுகள் கிடைக்கக்கூடிய சோதனைகளுக்கு 5 எடுத்துக்காட்டுகளும் சமவாய்ப்பு விளைவுகள் கிடைக்காத சோதனைகளுக்கு 5 எடுத்துக்காட்டுகளும் எழுதுக.

செயல்

(i) ஒரு நாணயத்தை எடுத்துக்கொண்டு 50முறைகள், 100 முறைகள், 150 முறைகள் சுண்டி ஒவ்வொரு முறையிலும் தலை மற்றும் பூக்களின் எண்ணிக்கையை கணக்கிட்டு கீழ்கண்ட அட்டவணையை நிரப்புக.

வ. எண்	பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கை	தலைவிழுந்த எண்ணிக்கை	தலைவிழுவதற்கான நிகழ்தகவு	பூ விழுந்த எண்ணிக்கை	பூ விழுவதற்கான நிகழ்தகவு
1.	50				
2.	100				
3.	150				

மேற்கண்ட பரிசோதனைகளிலிருந்து நீ அறிவது என்ன? பரிசோதனைகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க தலை அல்லது பூ விழுவதற்கான நிகழ்தகவு 50% அல்லது $\frac{1}{2}$ ஐ நெருங்குகிறது என்பது தெளிவாகிறது. விளைவுகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிக்கக்கூடிய அனைத்து பரிசோதனைகளிலும் இவ்வாறான நிகழ்தகவை கணக்கிடலாம்.

நிகழ்தகவும், மாதிரி பரிசோதனையும்

நாணயம் சுண்டுதல், பகடையை உருட்டுதல் போன்ற சோதனைகளில் விளைவுகளின் எண்ணிக்கையை மிக அதிகமாக்கினாலும், விளைவுகளுக்கு சில சிக்கல்களும், இடர்பாடுகளும் உள்ளன. உதாரணமாக செயற்கைக்கோளை வான்வெளிக்கு அனுப்புவதில் தோல்வி ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவை காண்பதற்கு, நிலநடுக்கத்தால் பலமாடி கட்டிடம் இடிந்து விழாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்பதற்கு நாம் பல சோதனைகளை காணமுடியாது. ஏனெனில் அப்பரிசோதனைக்கான செலவு மிகமிக

அதிகம் மற்றும் நிலநடுக்கம் ஏற்படும்போது பலமாடி கட்டிடங்கள் சேதம் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவை காண்பதற்கான பரிசோதனையை மறுபடியும் செய்வதற்கான அனுகூல வாய்ப்புகள் நம்மிடம் இல்லை.

ஆகவே மறுபடியும் மறுபடியும் செய்ய இயலாத இந்த வகையான பரிசோதனைகளை அதற்கான மாதிரி பரிசோதனைகளை ஊகித்து சமவாய்ப்பு விளைவுகளின் நிகழ்தகவு கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது. இந்த வகையான பரிசோதனைகளின் முடிவு (விளைவு) மாதிரி பரிசோதனையின் போது நாம் மேற்கொள்ளும் துல்லியமான அளவுகளையும், கட்டுப்பாடுகளையும், எச்சரிக்கைகளையும் பொருத்து உள்ளது. வானிலை முன்னறிவிப்பு, தேர்தலின் முடிவு, ஜனத்தொகை அதிகரிப்பு, பூகம்பம் பற்றிய முன்னறிவிப்பு உணவுப்பொருள் உற்பத்தி செய்தல் ஆகியவைகளை அவைகளின் மாதிரி பரிசோதனைகளை செய்வதன் மூலமும், ஊகித்தறிவதன் மூலமும் சொல்கிறார்கள்.

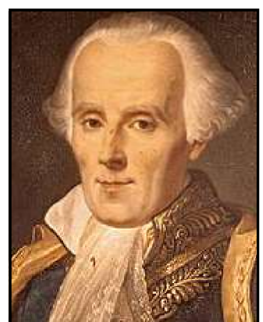
நாணயம் மற்றும் பகடையைக்கொண்டு சமவாய்ப்பு முறையில் செய்த பரிசோதனைகளின்படி ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு கீழ்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

Tஎன்பது ஒரு நிகழ்ச்சி எனில் Tன் தொன்மை நிகழ்தகவு (Theoretical or classical probability) P(T) என எழுதலாம்.

$$P(T) = \frac{\text{T கிடைப்பதற்கு சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{சோதனையின் மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

இங்கு சோதனையின் மொத்தவிளைவுகள் சமவாய்ப்பு முறையில் பெற்றதாக எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

தொன்மை நிகழ்தகவு என்பதை நிகழ்தகவு என்று சுருக்கமாக எழுதலாம். 1795ல் பியரீ சைமன் லாப்லஸ் என்பவர் நிகழ்தகவை வரையறுத்துக் கூறினார்.



பியரீ சைமன் லாப்லஸ்

(1749 – 1827)

16ம் நூற்றாண்டில் இயற்பியல் மற்றும் கணித வல்லுநரான ஜே.கார்டன் எனும் இத்தாலியரால் எழுதப்பட்ட "The book on Games of Chance" எனும் புத்தகத்தின் மூலம் நிகழ்தகவு எனும் கருத்து உருவானது.

ஜேம்ஸ் பெர்னாலி (1654-1705), ஏ.டிமாய்வர் (1667-1754) மற்றும் பியரீ சைமன் லாப்லஸ் ஆகியோரும் நிகழ்தகவு எனும் கருத்துக்கு மேலும் சிறப்பான முறையில் விளக்கம் அளித்து மெருகேற்றினார்கள்.

சமீபகாலமாக நிகழ்தகவு எனும் கருத்து பலதுறைகளில் (உயிரியல், பொருளாதாரம், மரபியல், இயற்பியல், சமூகஅறிவியல்) பிரபலமாக பயன்படுத்தப்படுகிறது.

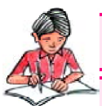
13.3 ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி

ஒரு நாணயத்தை சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ விழும். ஆனால் இரண்டும் விழாது, இவ்வாறே உயர்நிலைப் பள்ளியில் ஒரு மாணவனை தேர்ந்தெடுக்கிறோம் எனில் அம்மாணவன் 6,7,8,9, அல்லது 10ஆம் வகுப்பு ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒரு வகுப்பை சார்ந்தவனாகத்தான் இருப்பான். ஆனால் இரண்டு வகுப்புகளை சார்ந்தவனாகவோ அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வகுப்புகளை சார்ந்தவனாகவோ இருக்க இயலாது. மேற்கண்ட இரண்டு உதாரணங்களில் ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழும் போது மற்ற நிகழ்ச்சிகள் நிகழவிடாமல் தடுக்கிறது. இந்த மாதிரியான நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்று அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு சோதனையில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளில் எந்த ஒரு நிகழ்ச்சியும் மற்ற நிகழ்ச்சிகளை நிகழவிடாமல் தடுத்தால் அந்நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

இந்த அத்தியாயத்தின் இறுதியில் இக்கருத்தைப்பற்றி மேலும் விவாதிக்கலாம்.

13.4.1 நிகழ்தகவை கணக்கிடுதல்

சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சி நிகழ்தகவை எவ்வாறு காண்பது? ஒரு நாணயத்தை சுண்டுதல் என்பதை சமவாய்ப்புச் சோதனையாக எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே ஒவ்வொரு முறை சுண்டும்போதும் இரண்டு விளைவுகள் உள்ளன என்பதை நினைவுகூறுவோம். இந்த எல்லா விளைவுகளின் கணம் கூறுவெளி எனப்படும். ஒரு முறை சுண்டும் போது ஏற்படும் கூறுவெளி $\{H, T\}$ஆகும். சிவப்பு, நீலம், மஞ்சள் மற்றும் வெள்ளை நிற பந்துகள் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து ஒரு பந்தை தேர்ந்தெடுத்தல் என்ற சோதனையின் கூறுவெளி $\{R, B, Y, W\}$ஆகும். ஒரு பகடையை உருட்டும்போது ஏற்படும் கூறுவெளி யாது?



இதை செய்

சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஏற்படும் 5சூழ்நிலைகளை எழுதி அவைகளின் கூறுவெளிகளை எழுதுக.

ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளில் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவை காணும்முறை இப்பொழுது பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-1. ஒரு நாணயத்தை ஒருமுறை சுண்டும்போது தலைவிழுவதற்கான நிகழ்தகவையும், பூ விழுவதற்கான நிகழ்தகவையும் கண்டுபிடி.

தீர்வு : ஒரு நாணயத்தை ஒருமுறை சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ விழுவதற்கான வாய்ப்புகள் உள்ளன. E என்பது தலை விழுவதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. Eன் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை 1. எனவே

$$P(E) = P\,(\text{தலை}) = \frac{\text{E நிகழ்ச்சியின் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{சோதனையின் மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}} = \frac{1}{2}$$

இவ்வாறே, F என்பது பூ விழுவதற்கான நிகழ்ச்சி எனில்

$$P(F) = P(\text{பூ}) = \frac{1}{2} \ (\text{ஏன்?})$$

எடுத்துக்காட்டு-2. ஒரு பையில் சமஅளவுள்ள சிவப்பு, நீலம் மற்றும் மஞ்சள் நிற பந்துகள் உள்ளன. மானசா பையின் உட்புறம் பார்க்காமல் ஒரு பந்தை எடுத்தாள். அது (i) சிவப்புநிற பந்து (ii) நீலநிற பந்து (iii) மஞ்சள்நிற பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு : மானசா பையின் உட்புறம் பார்க்காமல் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்தினை எடுத்தாள்.

Y என்பது மஞ்சள்நிற பந்தினை எடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. Bஎன்பது நீலநிற பந்தினை எடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. R என்பது சிவப்புநிற பந்தினை எடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

சோதனை விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை = 3

(i) Yன் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை = 1.

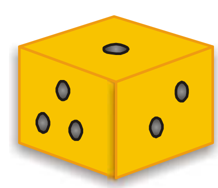
எனவே, $P(Y) = \frac{1}{3}$. இவ்வாறே, $P(R) = \frac{1}{3}$ மற்றும் $P(B) = \frac{1}{3}$

குறிப்பு:

1. ஒரு சோதனையில் ஒரேஒரு விளைவு மட்டும் கொண்டநிகழ்ச்சி தனித்த நிகழ்ச்சி எனப்படும். உதாரணம் 1ல் E மற்றும் F இரண்டு நிகழ்ச்சிகளுமே தனித்த நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். இவ்வாறே, உதாரணம் 2ல் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் Y, B மற்றும் R ஆகியவை தனித்த நிகழ்ச்சிகள்.
2. உதாரணம் 1ல்: $P(E) + P(F) = 1$
   உதாரணம் 2ல்: $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$.

   அனைத்து தனித்த நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவை கண்டுபிடித்து அவற்றை கூட்டினால் மொத்தம் 1 கிடைக்கும்.
3. ஒரு பகடையை உருட்டும்போது மூன்றைவிட குறைவான முகஎண்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவும், மூன்று அல்லது மூன்றைவிட அதிகமான முகஎண்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவும் தனித்த நிகழ்ச்சிகள் அல்ல. ஆனால் இரண்டு நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டும்போது {HH}, {HT}, {TH} மற்றும் {TT} என்பவைகள் தனித்த நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு-3. ஒரு பகடையை ஒருமுறை உருட்டும்போது (i) நான்கைவிட அதிகமான முகஎண்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (ii) 4 அல்லது 4ஐவிட குறைவான முகஎண்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?



தீர்வு : (i) ஒரு சீரான பகடையை உருட்டும்போது

கூறுவெளி $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

விளைவுகளின் எண்ணிக்கை $n(S) = 6$

4ஐவிட அதிகமான முகஎண்கள் கிடைக்க சாதகமான விளைவுகள் $E = \{5, 6\}$

சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை $n(E) = 2$

நிகழ்தகவு $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) 4 அல்லது 4ஐவிட குறைவான முகஎண்கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி F என்க.

கூறுவெளி $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

விளைவுகளின் எண்ணிக்கை $n(S) = 6$

4 அல்லது 4ஐ விட குறைவான முகஎண்கள் கிடைக்க சாதகமான விளைவுகள் $F = \{1, 2, 3, 4\}$

சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை $n(F) = 4$

$$\text{நிகழ்தகவு } P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

குறிப்பு : மேற்கண்ட உதாரணத்தில் E மற்றும் F தனித்த நிகழ்ச்சிகளா? இல்லை, அவைகள் தனித்த நிகழ்ச்சிகள் அல்ல. E ன் விளைவுகளின் எண்ணிக்கை 2 மற்றும் F ன் விளைவுகளின் எண்ணிக்கை 4.

13.4.2 நிரப்பு நிகழ்ச்சிகளும், நிகழ்தகவும்

முன்பகுதியில் தனித்த நிகழ்ச்சிகள்பற்றி படித்தோம். உதாரணம் 3ல் தனித்த நிகழ்ச்சிகள் அல்லாத நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளை கணக்கிட்டோம்.

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

இங்கு Fம் 'E அல்ல' என்பதும் ஒன்றே ஆகும். ஏனெனில் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் மட்டுமே உள்ளன.

'E அல்ல' நிகழ்ச்சியை $\overline{E}$ என்று குறிக்கிறோம். இது E ன் நிரப்பு நிகழ்ச்சி (complement event) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

எனவே, P(E) + P(E அல்ல) = 1

அதாவது, $P(E) + P(\overline{E}) = 1$, $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

பொதுவாக **E** எனும் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு $\mathbf{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$

இதை செய்

(i) ஒரு நாணயம் சுண்டும்போது தலைவிழுதல் என்பது பூ விழுதலுக்கு நிரப்பு நிகழ்ச்சியாக இருக்குமா? காரணம் கூறு.

(ii) பகடையை உருட்டும்போது முகஎண் 1 விழுதல் என்பது 2,3,4,5, மற்றும் 6 விழுதலுக்கான நிரப்பு நிகழ்ச்சியாக இருக்குமா? உன்னுடைய பதிலுக்கு காரணம் கூறு.

(iii) நிரப்பு நிகழ்ச்சிகளாக இருக்கக்கூடிய ஐந்து ஜோடி நிகழ்ச்சிகளை எழுதுக.

13.4.3 இயலா நிகழ்ச்சிகளும், உறுதி நிகழ்ச்சிகளும்

பகடையின் முகங்களில் 1,2,3,4,5 மற்றும் 6எனக் குறியிட்ட பகடையை உருட்டுக.

(i) ஒரு பகடையை ஒருமுறை உருட்டும்போது முகஎண் 7 விழுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

இந்த பகடையை ஒரு முறை உருட்டும்போது 6 சாதகமான விளைவுகள் உள்ளன என்று நாம் அறிவோம். அவை 1,2,3,4,5 மற்றும் 6. பகடையில் 7என குறியிட்ட முகம் இல்லை. எனவே முகஎண் 7 பகடையில் இல்லை. எனவே 7விழுவதற்கான சாதகமான விளைவு இல்லை. அதாவது சாதகமான விளைவின் எண்ணிக்கை பூஜ்ஜியம் ஆகும். இதையே முகஎண் 7 விழுவதற்கான வாய்ப்பு இயலாததாகும் என்று கூறுகிறோம்.

எனவே, $P(7 \text{ விழுவதற்கு}) = \frac{0}{6} = 0$

அதாவது இயலாத நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு பூஜ்ஜியம். ஒருபோதும் நடைபெறமுடியாத நிகழ்ச்சி இயலா நிகழ்ச்சி எனப்படும்.

(ii) ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 6 அல்லது 6ஐவிட குறைவான முகஎண் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

பகடையின் முகங்களில் 6 அல்லது 6ஐவிட குறைவான எண்களே குறிக்கப்பட்டிருக்கும். எனவே, பகடையை உருட்டும்போது அவைகளில் ஏதாவது ஒன்றே விழும். எனவே, சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கையும், சோதனை விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையும் சமம் ஆகும்.

ஆகவே, P(E) = P(6(அ) 6 ஐவிட குறைவான எண்) = $\frac{6}{6} = 1$

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 1 எனில் அது உறுதி நிகழ்ச்சி (**sure event** or **certain event**) எனப்படுகிறது.

குறிப்பு : நிகழ்தகவின் வரையறைப்படி, தொகுதி (நிகழ்ச்சி E ன் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை), பகுதிக்கு (சோதனை விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை) சமமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ இருக்கும், ஆகவே, **0 £ P(E) £ 1.**

முயற்சி செய்

1. ஒரு குழந்தையிடம் பகடையின் பக்கங்களின் மேல் A, B, C, D, E மற்றும் F என்ற எழுத்துகள் எழுதிய பகடை இருக்கிறது. அதை ஒருமுறை உருட்டினால் (i) A விழுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (ii) D விழுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?
2. கீழ்கண்டவைகளில் எவை நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவாக இருக்காது?

   (a) 2.3 (b) -1.5 (c) 15% (D) 0.7

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

1. எந்த ஒரு விளையாட்டிலும் எந்த குழுவிற்கு பந்துமுறையை தரவேண்டும் என்பதை நிர்ணயிப்பதற்கு ஏன் நாணயம் சுண்டப்படுகிறது?
2. ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $\frac{7}{2}$ ஆக இருக்குமா? விவரி.
3. கீழ்கண்டவைகளில் எவை சரியானவை? எவை தவறானவை?

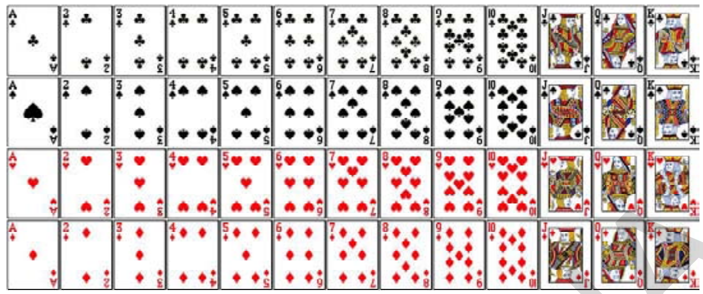
   i) இரண்டு நாணயங்களை ஒரேசமயத்தில் சுண்டும்போது மொத்தம் 3 சாதகமான விளைவுகள் உள்ளன. இரண்டு தலைகள், இரண்டு பூக்கள் அல்லது ஒவ்வொன்றிலும் ஒன்று. எனவே ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$.

   ii) ஒரு பகடையை உருட்டும்போது இரண்டு சாதகமான விளைவுகள் உள்ளன. அவை ஒற்றைப்படை எண் அல்லது இரட்டைப்படை எண். எனவே, ஒற்றைப்படை எண் கிடைக்க நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$.

13.5 சீட்டுக்கட்டும், நிகழ்தகவும்

நீங்கள் சீட்டுக்கட்டு விளையாட்டை பார்த்திருக்கிறீர்களா?

ஒரு சீட்டுக்கட்டில் 52சீட்டுகள் உள்ளன. ஒவ்வொன்றிலும் 13 சீட்டுப்பிரிவுகள் இருக்குமாறு நான்கு பகுதிகளாக பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. அவை கருப்பு ஸ்பேடு (♠), சிவப்புநிற இதய குறி (♥), சிவப்புநிற வைரவடிவம் (♦) மற்றும் கருப்பு கிளப் (♣).



ஒவ்வொரு பகுதியில் உள்ள 13 சீட்டுகளிலும் ஏஸ் (Ace), ராஜா, ராணி, ஜாகி(Jack) 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 மற்றும் 2 என்றவாறு குறிக்கப்பட்டுள்ளது, ராஜா, ராணி மற்றும் ஜாகி சீட்டுகள் முகப்பு சீட்டுகள் (face cards) எனப்படுகின்றன. சீட்டுக் கட்டைக் கொண்டு பலவிதமான விளையாட்டுகளை விளையாடுகிறார்கள். சீட்டுக்கட்டில் ஒரு பகுதி சீட்டுக்களை மட்டும் பயன்படுத்தி சில விளையாட்டுகளையும், இரண்டு சீட்டுக்கட்டுகளை பயன்படுத்தி சில விளையாட்டுகளையும் விளையாடுகிறார்கள்.

நிகழ்தகவுப்பற்றிய அறிவு சீட்டு மற்றும் தாயகட்டைகளை கொண்டு விளையாடும் விளையாட்டுகளில் சாதகமான வாய்ப்புகளை ஊகித்து அறியவும், சீட்டுகளை விளையாடுபவர்களிடையே பகிர்ந்துக் கொள்வதற்கும் பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு-4. நன்கு குலுக்கப்பட்ட 52 சீட்டுக்களைக் கொண்ட சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது. அந்த சீட்டு பின்வரும் நிகழ்ச்சியாக இருக்கும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (i) ஏஸ்ஸாக இருப்பதற்கு (ii) ஏஸ்ஸாக இல்லாதிருப்பதற்கு

தீர்வு : நன்கு குலுக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒருசீட்டு எடுக்கப்படுகிறது.

(i) ஒரு சீட்டுக்கட்டில் 4 ஏஸ்கள் உள்ளன.

E என்பது எடுக்கப்பட்ட சீட்டு ஏஸ்ஸாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

E க்கு சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை = 4

சோதனை விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை = 52 (ஏன்?)

ஆகவே, $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) F என்பது எடுக்கப்பட்ட சீட்டு ஏஸ்ஸாக இல்லாதிருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. Fக்கு சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை $= 52 - 4 = 48$ (ஏன்?)

விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை = 52

ஆகவே, $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

மற்றொரு முறை : F என்பது E இல்லாத நிகழ்ச்சி ஆகும்.

அதாவது F என்பது $\overline{E}$ ஆகும்.

எனவே, P(F)ஐ கீழ்கண்டவாறு கணக்கிடலாம்

$$P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

முயற்சி செய்

உன்னிடம் நன்கு குலுக்கப்பட்ட சீட்டுக்கட்டு இருப்பதாக நினைத்துக்கொள்.

1. அதிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒருசீட்டை எடுத்தால் அது ராணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

2. முகப்பு சீட்டுக்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?
3. ஸ்பேடாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?
4. ஸ்பேடுகள், முகப்பு சீட்டுகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?
5. முகப்பு சீட்டாக இல்லாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

13.6 நிகழ்தகவின் பயன்கள்

நிகழ்தகவு பயன்படும் சில சந்தர்ப்பங்களை பார்க்கலாம். விளையாட்டுப் போட்டிகளில் சில நாடுகள் பலமாகவும், சில நாடுகள் பலமில்லாமலும் இருப்பதை நாம் அறிவோம். விளையாட்டுப் போட்டியில் இருவர் விளையாடும்போது இருவரும் வெற்றிபெறுவதற்கான வாய்ப்பு ஒரே சமயத்தில் இல்லை என நாம் அறிவோம்.

ஒருநபர் அல்லது ஒரு குழு வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு, போட்டியிடும் நபர் அல்லது போட்டியிடும் குழு வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவை விட அதிகம். நாம் பிறந்தநாட்களைப்பற்றி உரையாடுவோம். சில நபர்களுக்கு ஒரேநாளில் பிறந்தநாள் வரும் வாய்ப்பு உள்ளது. இவ்வாறு வருவது சாதாரண நிகழ்ச்சியா? அல்லது வாய்ப்புகள் எவ்வளவு உள்ளது என அறிய நிகழ்தகவு நமக்குப் பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு-5. சங்கீதாவும், ரேஷ்மாவும் டென்னிஸ் விளையாடிக் கொண்டிருக்கிறார்கள். சங்கீதா வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.62 எனில் ரேஷ்மா வெற்றிபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு : S மற்றும் R என்பன முறையே சங்கீதா மற்றும் ரேஷ்மா வெற்றிபெறுவதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

சங்கீதா வெற்றிபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு = P(S) = 0.62 (தரப்பட்டுள்ளது)

ரேஷ்மா வெற்றிப்பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு = P(R) = 1 - P(S)

= 1 -0.62 = 0.38 [R, S என்பவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புநிகழ்ச்சி]

எடுத்துக்காட்டு-6. சாரதாவும், அமுதாவும் தோழிகள். இருவருக்கும் (i) வேறுபட்ட பிறந்தநாள் வருவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (ii) ஒரேநாளில் பிறந்தநாள் வருவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (லீப் வருடம் தவிர்க்கவும்)

தீர்வு : இருதோழிகளில் சாரதாவுக்கு வருடத்தின் 365நாட்களில் ஏதோ ஒரு நாளில் பிறந்தநாள் வரலாம்.

அமுதாவுக்கும் வருடத்தில் 365நாட்களில் ஏதோஒருநாளில் பிறந்தநாள் வரலாம். இந்த 365 விளைவுகளும் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதாக எடுத்துக்கொள்வோம்.

(i) அமுதாவின் பிறந்தநாளும், சாரதாவின் பிறந்தநாளும் வேறுபட்ட நாட்களாக இருந்தால் அமுதாவின் பிறந்தநாளுக்கான சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை = 365–1=364

எனவே, P (அமுதாவின் பிறந்தநாளும் சாரதாவின் பிறந்தநாளும் வேறுபட்டிருந்தால்) = $\frac{364}{365}$

(ii) P(சாரதாவின் பிறந்தநாளும் அமுதாவின் பிறந்தநாளும் ஒரேநாளில் இருந்தால்) =
1 - P (இருவர்களுக்கு வேறுபட்ட நாட்களில் பிறந்தநாள்)

$$= 1 - \frac{364}{365} \quad [\ P(\overline{E}) = 1 - P(E) \text{ ன் படி}] = \frac{1}{365}$$

எடுத்துக்காட்டு-7. 40 மாணவ, மாணவிகள் உள்ள 10ஆம் வகுப்பில் 25 மாணவிகளும், 15 மாணவர்களும் உள்ளனர். வகுப்பாசிரியர், வகுப்புத்தலைவராக ஒரு மாணவனை தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். ஆசிரியர் அனைவரின் பெயர்களையும் தனித்தனி சீட்டில் எழுதி ஒருபெட்டியில் போட்டு, நன்றாக குலுக்கி சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டை எடுத்தார். எடுத்தசீட்டில் (i) மாணவி பெயர் வருவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (ii) மாணவன் பெயர் வருவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு : 40சீட்டுகள் உள்ள பெட்டியில் ஒரேஒரு சீட்டை எடுத்து வகுப்புத்தலைவரை தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை = 40

(i) சீட்டில் மாணவி பெயர் இருப்பதற்கான சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை = 25(ஏன்?)

$\therefore$ P (மாணவிபெயர் உள்ள சீட்டு) = P(சிறுமி) $= \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) 1 சீட்டில் மாணவன் பெயர் இருப்பதற்கான சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை = 15(ஏன்?)

எனவே, P(மாணவன் பெயர் உள்ள சீட்டு) = P(மாணவன்) $= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

அல்லது P(மாணவன்) = 1 - P(மாணவன் அல்ல) = 1 - P(மாணவி) $= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

பயிற்சி - 13.1

1. கீழ்கண்ட கூற்றுகளில் உள்ள காலியிடங்களை நிரப்புக:

   (i) E நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு + 'E அல்ல' நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு = ______________

   (ii) ஒரு நிகழ்ச்சி உறுதியாக நிகழாது எனில் அதன் நிகழ்தகவு__________. இந்த வகை நிகழ்ச்சியை __________ என்று அழைக்கப்படும்.

   (iii) உறுதியாக நிகழும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு __________. இந்தவகை நிகழ்ச்சியை ______ எனப்படும்.

   (iv) ஒரு சோதனையில் தனித்த நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளின் மொத்தம்__________

   (v) ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு __________க்கு சமமாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இருக்கும் மற்றும் ________க்கு சமமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ இருக்கும்.

2. கீழ்கண்ட சோதனைகளில் எவை சமவாய்ப்பு விளைவைக் கொண்டிருக்கிறது? விவரி.

   (i) காரை ஓட்டுநர் ஓட்ட முயலுகிறார். கார் ஓடலாம் அல்லது ஓடாமலும் போகலாம்.

   (ii) ஒரு கூடைப்பந்து விளையாட்டு வீரர் பந்தை போடும்போது அந்த பந்து கூடையில் விழலாம் அல்லது விழாமலும் போகலாம்.

   (iii) சரியா, தவறா வினாவில் அதன் விடை சரி அல்லது தவறு.

   (iv) ஒரு குழந்தை பிறக்கிறது. அது ஆண் குழந்தையாகவோ அல்லது பெண் குழந்தையாகவோ இருக்கலாம்.

3. $P(E) = 0.05$ எனில் 'E அல்ல' என்பதின் நிகழ்தகவு யாது?

4. ஒரு பையில் எலுமிச்சை மணமுள்ள சாக்லெட்டுகள் மட்டும் உள்ளன. மாலினி சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சாக்லெட்டை எடுத்தாள். அது பின்வருவனவாக இருக்க நிகழ்தகவுகளை காண்க. (i) ஆரஞ்சு மணமுள்ள சாக்லெட்டாக (ii) எலுமிச்சை மணமுள்ள சாக்லெட்டாக?

5. ரஹிம் அனைத்து இதயவடிவக் குறியிட்ட சீட்டுகளை ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து நீக்கிவிட்டான். மீதமுள்ளவற்றில் எடுத்த ஒரு சீட்டு பின்வருவனவாக இருக்க நிகழ்தகவுகளை காண்க.
   i. ஏஸாக இருப்பதற்கு (ஒருசீட்டை எடுக்கும்போது)
   ii. வைரவடிவகுறியிட்ட சீட்டாக இருப்பதற்கு
   iii. இதயவடிவக் குறியிட்ட சீட்டாக இல்லாமல் இருப்பதற்கு
   iv. இதயவடிவக் குறியுள்ள ஏஸாக இருப்பதற்கு

6. மூன்று மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவில் இரண்டு மாணவர்களின் பிறந்தநாள் ஒரேநாளாக இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.992 எனில் இரண்டு மாணவர்களின் பிறந்தநாள் ஒரேநாளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

7. ஒரு பகடையை ஒருமுறை உருட்டும்போது பின்வருவனவாக விழுவதற்கு நிகழ்தகவு காண்க.

   (i) பகா எண்ணாக இருப்பதற்கு (ii) 2 மற்றும் 6க்கிடையே உள்ள எண்ணாக இருப்பதற்கு (iii) ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருப்பதற்கு.

8. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து சிவப்புநிற ராஜா சீட்டை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
9. பகடை, சீட்டுகள் அல்லது பிறந்தநாள் ஆகியவற்றைக் கொண்டு 5 கணக்குகளை எழுது. அவற்றிற்கு உன்னுடைய நண்பர்கள் மற்றும் ஆசிரியருடன் கலந்து உரையாடி தீர்வு காண்க.

13.7 நிகழ்தகவின் மேலும் சில பயன்கள்

நாம் நிகழ்தகவு பயன்படும் சில உதாரணங்களை விவாதித்தோம். அந்த கணக்குகளுக்கு நிகழ்தகவு கணக்கிட நாம் பயன்படுத்திய கருத்துகளையும், பலவிதமான வழிமுறைகளையும் சிந்தித்துப்பார். ஒன்றுக்கொன்று நிரப்பு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளின் மொத்தம் 1 என அறிந்தோம். இதுவரை விவாதித்த உதாரணங்கள் மற்றும் பயிற்சி கணக்குகளில் நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் தனித்த நிகழ்ச்சிகளை கவனித்தீர்களா? உன்னுடைய நண்பர்கள் மற்றும் ஆசிரியருடன் கலந்துரையாடி ஆராய்க.
இப்பொழுது மேலும் சில முக்கிய உதாரணங்களை ஆராய்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு-8. ஒரு பெட்டியில் 3நீலம், 2வெள்ளை மற்றும் 4சிவப்புநிற கோலிகள் உள்ளன. பெட்டியிலிருந்து ஒரு கோலியை சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்டால் அந்தகோலி பின்வருவனவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(i) வெள்ளை (ii) நீலம் (iii) சிவப்பு

தீர்வு : பெட்டியிலிருந்து ஒருகோலி சமவாய்ப்புமுறையில் எடுக்கப்படுகிறது.

$\therefore$ விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $= 3 + 2 + 4 = 9$ (ஏன்?)

W என்பது வெள்ளைநிற கோலிவருவதற்கான நிகழ்ச்சி என்க, B என்பது நீலநிற கோலி வருவதற்கான நிகழ்ச்சி என்க மற்றும் R என்பது சிவப்புநிற கோலி வருவதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

(i) W ன் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை = 2

எனவே, $P(W) = \frac{2}{9}$

இவ்வாறே, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

$P(W) + P(B) + P(R) = 1$ என்பதை கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு-9. ஹரி இரண்டு வெவ்வேறு நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டினான் எனில் குறைந்தது ஒரு தலைவிழுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு : H என்பது தலை என்க. T என்பது பூ என்க. இரண்டு நாணயங்கள் (₹1நாணயம் மற்றும் ₹2 நாணயம்) ஒரே சமயத்தில் சுண்டும்போது கிடைக்கும் சமவாய்ப்பு விளைவுகள் (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) இங்கு (H, H) என்றால் முதல் நாணயத்திலும் தலை, இரண்டாவது நாணயத்திலும் தலை என்றும் பொருள்.

(H, T) என்றால் முதல் நாணயத்தில் தலை என்றும் இரண்டாவது நாணயத்தில் பூ என்றும் பொருள். குறைந்தது ஒரு தலை விழும் நிகழ்ச்சி Eக்கு சாதகமான விளைவுகள் (H, H), (H, T) மற்றும் (T, H).

நிகழ்ச்சி E சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை =3.

$\therefore P(E) = \frac{3}{4}$ [விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை =4]

குறைந்தது ஒரு தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{4}$

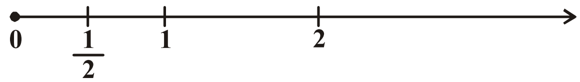
சரிபார் : இதுவரை கவனித்த ஒவ்வொரு பரிசோதனைகளிலும் சோதனை விளைவுகளின் எண்ணிக்கை எண்ணிடத்தக்கவையாகவே இருந்தன என்பதை கவனித்தீர்களா?

விளைவுகள் இரண்டு எண்களுக்கிடையே உள்ள எண்கள் அல்லது வட்டத்திற்குள்ளே உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி அல்லது செவ்வகத்திற்குள்ளே உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி என பல சோதனைகள் இருக்கின்றன. இந்தவகையான பரிசோதனைகளில் விளைவுகளின் எண்ணிக்கை எண்ணிடத்தக்கவையாக இருக்குமா? இது இயலாது. இரண்டு எண்களுக்கிடையே எண்ணற்ற எண்கள் இருக்கும். இவ்வாறே வட்டத்திற்குள்ளே அல்லது செவ்வகத்திற்குள்ளே எண்ணற்ற புள்ளிகள் இருக்கும். இந்தவகை பரிசோதனைகளில் நிகழ்தகவு தேற்றவிளக்கத்தின் வரையறையை பயன்படுத்த இயலாது.

இந்தவகை பரிசோதனைகளை எப்படி கணக்கிடலாம் என்பதை பின்வரும் உதாரணம் மூலம் அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-10. (தேர்வுக்கு அல்ல) இசைநாற்காலி விளையாட்டில் இசையை நிறுத்தினால் விளையாடுபவர்கள் ஓடுவதை நிறுத்திவிட வேண்டும். விளையாட்டு ஆரம்பித்த முதல் இரண்டு நிமிடத்திற்குள் எந்த சமயத்திலும் இசை நிறுத்தப்படலாம். இசைநாற்காலி விளையாட்டில் ஆரம்பித்த முதல் அரை நிமிடத்தில் நிறுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு : 0 மற்றும் 2களுக்கிடையே உள்ள எண்கள் அனைத்தும் விளைவுகள் ஆகும். இதை எண்கோட்டின்மீது குறித்துக்காட்டலாம்.

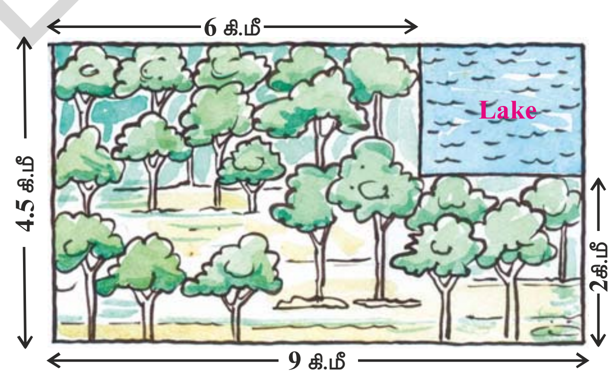


முதல் அரைநிமிடத்தில் இசையை நிறுத்தும் நிகழ்ச்சி E என்க. E நிகழ்ச்சிக்கு சாதகமான விளைவு எண்கோட்டில் 0விலிருந்து $\frac{1}{2}$ வரை உள்ள தூரம் $\frac{1}{2}$ ஆகும். சமவாய்ப்பு முறையில் விளைவுகளின் மொத்த தூரம் 2 மற்றும் Eக்கு சாதகமான விளைவுகளின் தூரம் $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

$$\text{எனவே } P(E) = \frac{\text{E நிகழ்ச்சிக்கு சாதகமான தூரம்}}{\text{விளைவுகளின் மொத்த தூரம்}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

இப்பொழுது நாம் ஓர் இடத்தின் சாதகமான பரப்பளவுக்கும், மொத்த பரப்பளவுக்கும் உள்ள விகிதத்தின் நிகழ்தகவை காண முயற்சிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-11. ஒரு ஹெலிகாப்டர், படத்தில் காட்டியவாறு ஒரு செவ்வக நிலப்பரப்பை கடக்கும்போது பழுதடைந்தது. அச்செவ்வக நிலப்பரப்பில் உள்ள ஒரு ஏரியில் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?



தீர்வு: ஹெலிகாப்டர் சமவாய்ப்பு முறையில் அந்த செவ்வக நிலப்பரப்பில் எந்தப்பகுதியிலும் விழுந்திருக்கலாம்.

ஹெலிகாப்டர் கடந்த செவ்வக நிலப்பரப்பின் மொத்த பரப்பு $= (4.5 \times 9)$ கி.மீ^{2} $= 40.5$ கி.மீ^{2}

அச்செவ்வகப் பகுதிக்குள் உள்ள சாதகமான ஏரியின் பரப்பு $= (2 \times 3)$ கி.மீ^{2} $= 6$ கி.மீ^{2}

$$\text{எனவே, } P\,(\text{ஹெலிகாப்டர் ஏரியில் விழுவதற்கு}) = \frac{6}{40.5} = \frac{4}{27}$$

எடுத்துக்காட்டு-12. ஒரு பெட்டியில் 100 சட்டைகள் உள்ளன. அவற்றில் 88 நன்றாக உள்ள சட்டைகளும் 8 சிறிய குறைபாடுள்ள சட்டைகளும் 4 பெரிய குறைபாடுள்ள சட்டைகளும் உள்ளன. ஜானி எனும் வியாபாரி நன்றாக உள்ள சட்டைகளை மட்டுமே ஏற்றுக்கொண்டார். ஆனால் சுஜாதா எனும் மற்றொரு வியாபாரி பெரிய குறைபாடுள்ள சட்டைகளை மட்டும் நிராகரித்தார். பெட்டியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சட்டை எடுக்கப்படுகிறது எனில் (i) ஜானி அச்சட்டையை ஏற்றுக்கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (ii) சுஜாதா அச்சட்டையை ஏற்றுக்கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு : 100 சட்டைகள் உள்ள பெட்டியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சட்டை எடுக்கப்படுகிறது.

∴ 100 சமவாய்ப்பு விளைவுகள் இருக்கின்றன.

(i) ஜானிக்கு சாதகமான விளைவுகளின் (ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டது) எண்ணிக்கை= 88 (ஏன்?)

எனவே, P (ஜானி ஏற்றுக்கொண்ட சட்டை) = $\frac{88}{100}$ = 0.88

(ii) சுஜாதாவுக்கு சாதகமான விளைவுகளின் (ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டது) எண்ணிக்கை = 88 + 8 = 96 (ஏன்?)

எனவே, P (சுஜாதா ஏற்றுக்கொண்ட சட்டை) = $\frac{96}{100}$ = 0.96

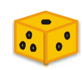
எடுத்துக்காட்டு-13. சிவப்பு மற்றும் வெள்ளை நிறமுள்ள இரண்டு பகடைகள் ஒரே சமயத்தில் உருட்டப்படுகிறது. மொத்த விளைவுகளை எழுதுக. இரண்டு பகடைகளின் மேற்புறம் காணப்படும் இரண்டு எண்களின் மொத்தம் (i) 8 (ii) 13 (iii) 12க்கு சமமான அல்லது குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

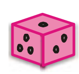
தீர்வு : சிவப்புநிற பகடை '1' காண்பிக்கும்போது வெள்ளைநிற பகடை 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகியவைகளில் எந்த ஒன்றையும் காண்பிக்கலாம். சிவப்புநிற பகடை '2', '3', '4', '5' அல்லது '6' ஆகியவைகளை காண்பிக்கும்போது வெள்ளைநிற பகடை முன்பு குறிப்பிட்ட எண்களையே காண்பிக்கும் சோதனையின் மொத்த விளைவுகளை அருகிலுள்ள அட்டவணை காட்டுகிறது.

ஒவ்வொரு வரிசை ஜோடியிலும் முதல்எண் சிவப்புநிற பகடை காட்டும் எண்ணையும், இரண்டாவது எண் வெள்ளைநிற பகடை காட்டும் எண்ணையும் குறிக்கிறது.

(1, 4) வரிசை ஜோடியும் (4, 1)வரிசை ஜோடியும் வேறுபட்டவை.

விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை n(S) = 6 × 6 = 36.





	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

(i) வரிசைஜோடியில் உள்ள இரண்டு எண்களின் மொத்தம் 8 என்ற நிகழ்ச்சி Eக்கு சாதகமான விளைவுகள் (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

Eன் சாதகமான வரிசை ஜோடிகளின் எண்ணிக்கை n(E) = 5.

ஆகவே, P(E) = $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{36}$

(ii) வரிசை ஜோடியில் உள்ள இரண்டு எண்களின் மொத்தம் 13 என்ற நிகழ்ச்சி Fக்கு சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை 0.

சாதகமான வரிசை ஜோடிகளின் எண்ணிக்கை n(F) = 0

அகவே, P(F) = $\frac{0}{36}$ = 0

(iii) வரிசை ஜோடியில் உள்ள இரண்டு எண்களின் மொத்தம் 12 என்ற நிகழ்ச்சி Gக்கு சாதகமான எண்ணிக்கை மொத்த விளைவுகளுக்கு சமம்.

ஆகவே, P(G) = $\frac{36}{36}$ = 1

பயிற்சி - 13.2

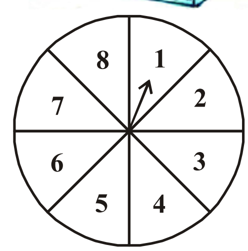
1. 3 சிவப்பு மற்றும் 5 கருப்புநிற பந்துகளைக்கொண்ட ஒரு பெட்டியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்தை எடுத்தால் அந்த பந்து (i) சிவப்பு பந்து (ii) சிவப்பு பந்து அல்ல என்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

2. 5 சிவப்பு, 8 வெள்ளை மற்றும் 4 பச்சை நிற கோலிகளைக் கொண்ட ஒரு பெட்டியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு கோலி எடுக்கப்படுகிறது. அக்கோலி (i) சிவப்பு? (ii) வெள்ளை? (iii) பச்சை அல்ல? என்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

3. ஒரு உண்டியில் நூறு 50பைசா நாணயங்களும், ஐம்பது ₹1 நாணயங்களும், இருபது ₹2 நாணயங்களும், பத்து ₹5 நாணயங்களும் உள்ளன. அந்த உண்டியை தலைகீழாக திருப்பினால் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒருநாணயம் கீழே விழுந்தால் அந்த நாணயம் (i) 50பைசா நாணயமாக இருப்பதற்கு (ii) ₹5 நாணயமாக இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

4. கோபி தன்னுடைய மீன்தொட்டிக்கு கடையிலிருந்து ஒரு மீனை வாங்கினான். கடைக்காரர் 5ஆண் மீன்களும், 8பெண் மீன்களும் உள்ள தொட்டியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு மீனை எடுத்து கொடுத்தார். அந்த மீன் ஆண் மீனாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (படத்தைப்பார்)

5. படத்தில் காட்டியவாறு சுழலும் அட்டையில் உள்ள அம்புக்குறி, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 என்ற ஏதாவது ஒரு எண்ணில் வந்து நிற்கிறது. அந்த எண்கள் சமவாய்ப்பு விளைவுகள் எனில் அம்புகுறி (i) 8 ? (ii) ஒற்றைப்படை எண்? (iii) 2ஐ விட பெரிய எண் (iv) 9ஐ விட சிறிய எண் நிற்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?



6. நன்கு குலுக்கப்பட்ட 52சீட்டுகளைக்கொண்ட சீட்டுக்கட்டிலிருந்து சமவாய்ப்பு சோதனை முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அந்தசீட்டு பின்வருமாறு இருக்கும் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு காண்க.
(i) சிவப்புநிற ராஜா (ii) முகப்பு சீட்டு (face card) (iii) சிவப்புநிற முகப்பு சீட்டு (iv) இதயகுறியிட்ட ஜாகி (v) ஸ்பேடு (vi) வைரகுறியிட்ட ராணி

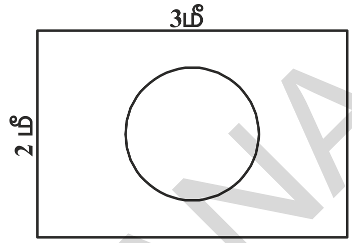
7. பத்து, ஜாகி, ராணி, ராஜா, ஏஸ் ஆகிய வைரகுறியிட்ட 5 சீட்டுகளை அவற்றின் முகங்கள் கீழ்பக்கமாக இருக்குமாறு வைத்து குலுக்கி சமவாய்ப்பு முறையில் ஒருசீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அது (i) ராணி சீட்டாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது? (ii) ராணி சீட்டை எடுத்து அப்புறப்படுத்திவிட்டு இரண்டாவது சீட்டை எடுத்தால் அது (a) ஏஸ் (b) ராணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

8. 132 நன்றாக உள்ள பேனாக்களுடன் 12 குறைபாடுள்ள பேனாக்கள் தற்செயலாக கலந்துவிட்டன. பேனாக்களை பார்த்தமாத்திரத்தில் குறைபாடுள்ள பேனாக்களை அடையாளம் காணஇயலாது. மொத்தப்பேனாக்களில் ஒருபேனாவை சமவாய்ப்புமுறையில் எடுக்கப்பட்டால் அந்த பேனா நன்றாக உள்ள பேனாவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

9. 20 பல்புகள் கொண்ட பெட்டியில் 4 குறைபாடுள்ள பல்புகள் அடங்கியுள்ளன. மொத்த பல்புகளிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பல்பு எடுக்கப்பட்டால் அது குறைபாடுள்ள பல்பாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? ஒரு வேளை அது நல்ல பல்பாக இருந்தால் அதை பெட்டியில் வைக்கப்படாமல் சமவாய்ப்பு முறையில் மற்றொரு பல்பு எடுக்கப்பட்டால் அது குறைபாடுஅல்லாத பல்பாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

10. 1 லிருந்து 90வரை எழுதப்பட்ட 90 வட்டுக்கள் (discs) அடங்கியுள்ள பெட்டியிலிருந்து ஒரு வட்டு சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது எனில் அது பின்வருவனவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது? (i) இரண்டு இலக்க எண் (ii) முழுவர்க்க எண் (iii) 5ஆல் வகுபடக்கூடிய எண்.

11. படத்தில் காட்டியபடி செவ்வகவடிவ பலகைமீது 1மீ விட்டமுள்ள வட்டம் ஒன்று வரையப்பட்டுள்ளது. எதேச்சையாக அப்பலகைமீது ஒரு பகடை தவறி விழுந்தால் அது வட்டத்திற்குள் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?



12. ஒரு பெட்டியில்உள்ள 144 பேனாக்களில் 20 பேனாக்கள் குறைபாடுள்ளவைகள். மற்றவை நல்ல பேனாக்கள். பேனா வாங்க வந்த சுதாவுக்கு கடைக்காரர் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பேனா எடுத்துக்கொடுத்தார். (i) அந்த பேனாவை சுதா வாங்குவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (ii) அந்த பேனாவை சுதா வாங்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

13. இரண்டு பகடைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்டும்போது விழும் எண்களை கூட்டினால் வரும் மொத்தத்தின் நிகழ்தகவை கீழ்கண்ட அட்டவணையில் நிரப்புக.

நிகழ்ச்சி : இரண்டு பகடைகளின் மேல்உள்ள எண்களின் மொத்தம்	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
நிகழ்தகவு	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{12}{36}$

(ii) ஒரு மாணவி இந்தப் பரிசோதனையில் 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 மற்றும் 12 என 11 சோதனைவிளைவுகள் உள்ளன. எனவே, ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவு $\frac{1}{11}$ என்று கூறினாள். இதை நீ ஏற்றுக்கொள்கிறாயா? உன்னுடைய கருத்தைகூறு.

14. ஒரு ரூபாய் நாணயத்தை மூன்றுமுறை சுண்டி ஒவ்வொரு முறையும் விளைவை (தலை அல்லது பூ) குறித்துக்கொள்ள வேண்டும் என்பது ஒருவிளையாட்டு மூன்று முறை சுண்டும்போது ஒரேமாதிரி 3 தலைகள் அல்லது 3 பூக்கள் விளைவு கிடைத்தால்தான் குமார் வெற்றி பெறுவான். குமார் வெற்றி பெறாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை காண்க.

15. ஒரு பகடை இரண்டுமுறை உருட்டப்படுகிறது. (i) இரண்டு முறைகளிலும் 5 வராமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (ii) குறைந்தது ஒருமுறையாவது 5 வருவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? [**குறிப்பு** : ஒரு பகடையை இருமுறை உருட்டுவதையும் மற்றும் இருபகடைகளை ஒரேசமயத்தில் உருட்டுவதையும் ஒரே சோதனையாக (same experiment) கருதப்படுகிறது.]

விருப்பப் பயிற்சி (தேர்வுக்குரிய வினாக்கள் அல்ல)

1. சிவா மற்றும் ரவி எனும் இரு வாடிக்கையாளர்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட கடையை ஒரே வாரத்தில் (செவ்வாய் முதல் சனிவரை) பார்வையிடுகின்றனர். அவ்விருவரும் தனித்தனியே எந்த ஒரு நாட்களிலும் பார்வையிடலாம். அவ்விருவரும் கடையை பின்வருவனவாறு பார்வையிடுவதற்கான நிகழ்தகவை காண்க. (i) ஒரே நாளில் (ii) அடுத்தடுத்த நாட்களில் (iii) வேறுபட்ட நாட்களில்

2. ஒருபையில் 5 சிவப்புநிற பந்துகளும், சிலநீலநிற பந்துகளும் உள்ளன. நீலநிற பந்து சமவாய்ப்பு முறையில் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு, சிவப்புநிற பந்து சமவாய்ப்பு முறையில் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவைப்போல் இரண்டு மடங்கு எனில் பையில் எத்தனை நீலநிற பந்துகள் இருக்கும்?

3. 12 பந்துகள் உள்ள ஒரு பெட்டியில் x கருப்பு நிற பந்துகள் உள்ளன. பெட்டியிலிருந்து ஒரு பந்தை சமவாய்ப்பு முறையில் எடுத்தால் அப்பந்து கருப்புநிற பந்தாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன? 6கருப்புநிற பந்துகளை பெட்டியில் கலந்தபிறகு ஒரு பந்தினை சமவாய்ப்பு முறையில் எடுத்தால் அப்பந்து கருப்பு பந்தாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு முன்பு கிடைத்த நிகழ்தகவைப்போல் இருமடங்கு எனில் x மதிப்பு காண்க.

4. 24 கோலிகள் உள்ள ஒரு ஜாடியில் பச்சைநிற கோலிகளும், நீலநிற கோலிகளும் உள்ளன. ஜாடியிலிருந்து ஒரு பச்சை நிற கோலியை சமவாய்ப்பு முறையில் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ எனில் நீலநிறபந்தினை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு கண்டுபிடி.

நாம் கற்றவை

இந்த அத்தியாயத்தில் கீழ்கண்ட கருத்துக்களை அறிந்துக்கொண்டோம்.

1. பரிசோதனை நிகழ்தகவு மற்றும் தொன்மை நிகழ்தகவுப்பற்றி அறிந்துக்கொண்டோம்.
2. E என்பது ஒரு நிகழ்ச்சி எனில் Eன் தொன்மை நிகழ்தகவை P(E) எழுதி கீழ்கண்டவாறு வரையறுக்கிறோம்.

$$P(E) = \frac{\text{Eன் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{சோதனையின் மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$ இங்கு சோதனையில் மொத்த விளைவுகளை சமவாய்ப்பு முறையில் பெறுவதாக எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

3. உறுதி நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 1.
4. இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 0.
5. நிகழ்ச்சி Eன் நிகழ்தகவு P(E), $0 \le P(E) \le 1$ என்றவாறு இருக்கும் ஓர் எண் மதிப்பாகும்.
6. ஒரு சோதனையின் ஒரே ஒரு விளைவு மட்டும் உள்ள நிகழ்ச்சியை தனித்த நிகழ்ச்சி என்கிறோம். ஒரு சோதனையில் உள்ள அனைத்து தனித்த நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்தகவுகளின் மொத்தம் 1.
7. E என்பது ஒரு நிகழ்ச்சி எனில் $P(E) + P(\overline{E}) = 1$, இங்கு $\overline{E}$ = 'E அல்ல' என்பதாகும். E மற்றும் $\overline{E}$ என்பன நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படுகின்றன.
8. இந்த அத்தியாயத்தில் கற்றுக்கொண்ட மேலும் சில கருத்துகள்.

சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சி	: இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளில் ஒவ்வொன்றும் நிகழ்வதற்கான வாய்ப்புகள் சமமாக இருக்குமானால் அந்நிகழ்ச்சிகள் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.
ஒன்றையொன்று விலக்கு நிகழ்ச்சிகள்	: ஏதேனும் ஒன்று நிகழ்வதால் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் நிகழாமல் விலக்கப்பட்டால் அந்நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.
நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள்	: இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் நிரப்பு நிகழ்ச்சிகளாக இருக்க வேண்டும் எனில் அவை ஒன்றையொன்று விளக்குபவையாகவும், நிறைவு செய்யும் நிகழ்சிகளாகவும் அமைய வேண்டும்.
நிறைவுசெய் நிகழ்ச்சிகள்	: இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒன்று சேர்ந்து கூறுவெளியை உருவாக்கினால் அத்தகைய நிகழ்ச்சிகள் நிறைவுசெய் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.
உறுதி நிகழ்ச்சிகள்	: ஒரு சமவாய்ப்புச்சோதனையின் கூறுவெளி உறுதி நிகழ்ச்சி எனப்படும். ஏனெனில் சோதனையின் ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் அதன் உறுப்புகளில் ஒன்று நிச்சயமாக நிகழும்.
இயலா நிகழ்ச்சி	: ஒருபோதும் நடைபெற முடியாத நிகழ்ச்சி இயலா நிகழ்ச்சி எனப்படும்.

அத்தியாயம்

14 புள்ளியியல்

(STATISTICS)

14.1 அறிமுகம்

கணேசன் தன்னுடைய வகுப்பிலுள்ள 26 மாணவர்கள் கணிதத் தொகுப்பு மதிப்பீடு - Iல் பெற்ற மதிப்பெண்களை தனது வகுப்புப் பதிவேட்டில் கீழ்கண்டவாறு பதிவு செய்தான்.

அர்ஜுன்	76	நாராயணன்	12
காமினி	82	சுரேஷ்	24
சபிக்	64	துர்கா	39
கேசவன்	53	சிவா	41
லதா	90	ரஹீம்	69
ராஜேந்திரன்	27	ராதா	73
ராமு	34	கார்த்திக்	94
சுதா	74	ஜோசப்	89
கிருஷ்ணன்	76	விக்ரம்	64
சோமு	65	லட்சுமி	46
கௌரி	47	சீதா	19
உபேந்திரா	54	ரெஹனா	53
ராமய்யா	36	அனிதா	69

மேலே கொடுக்கப்பட்ட விவரம் வகைப்படுத்தப்பட்டதா? இல்லையா? ஏன்?

கணித ஆசிரியர் கணேசனிடம் வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் கணிதத் தொகுப்பு மதிப்பீடு - Iல் பெற்ற திறன்கள் பற்றிய அறிக்கையைத் தருமாறு கூறினார்.

கணேசன் தன்னுடைய வகுப்பு மாணவர்கள் பெற்ற திறன்களை புரிந்துகொள்ள கீழ்கண்ட அட்டவணையை உருவாக்கினான்.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0 - 33	4
34 - 50	6
51 - 75	10
76 - 100	6

மேலே அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் வகைப்படுத்தப்பட்டதா? அல்லது வகைப்படுத்தப்படாததா?

இந்த அட்டவணையை தன்னுடைய ஆசிரியரிடம் காண்பித்தான். இதைப்பார்த்த ஆசிரியர் இது எளிதில் புரிந்துகொள்ளும்படி ஒருங்கிணைக்கப்பட்டுள்ளது என்று பாராட்டினார். இதை பார்க்கும் போது அதிகபட்ச மாணவர்கள் 51-75க்கு இடைப்பட்ட மதிப்பெண்களை பெற்றுள்ளனர் எனத்தெரிகிறது. கணேசன் குறைந்த பிரிவு இடைவெளி நீளங்களைப் பயன்படுத்தி இருந்தால் நன்றாக இருந்திருக்கும் என நீங்கள் நினைக்கிறீர்களா? ஏன்?

கீழ் வகுப்புகளில் நீங்கள் வகைப்படுத்தப்பட்ட, வகைப்படுத்தப்படாத விவரங்களுக்கு இடையே உள்ள வேறுபாட்டை கற்றுக்கொண்டீர்கள். அவ்வாறே இந்த விவரங்களை அட்டவணை வடிவில் காட்டுவதையும் கற்றுக்கொண்டீர்கள். மேலும் வகைப்படுத்தப்படாத விவரத்தின் கூட்டுசராசரி காண்பதையும் கற்றுக்கொண்டீர்கள். இப்பொழுது நாம் கற்றதை மீண்டும் நினைவுக்கு கொண்டுவந்து வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்தின் கூட்டுசராசரி, இடைநிலை அளவு மேலும் முகடு இவற்றை கணக்கிடுவதை தெரிந்துகொள்ளலாம்.

14.2 வகைப்படுத்தப்படாத விவரத்தின் கூட்டுசராசரி

கொடுக்கப்பட்ட ராசிகளின் (observations) மொத்தத்தை ராசிகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்தால் கூட்டுசராசரி கிடைக்கும் என நமக்குத் தெரியும். ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ ராசிகளின் நிகழ்வெண்கள் வரிசையாக $f_1, f_2, \ldots, f_n$ அதாவது x_1 எனும் ராசி f_1 முறையும், x_2 எனும் ராசி f_2 முறையும் இதுபோலவே $x_n, \ldots, f_n$ஆகும்.)

இப்போது ராசிகளின் மொத்தம் $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$, மேலும் ராசிகளின் எண்ணிக்கை $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் சராசரி $(\bar{x})$ எனில்

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n}$$

கிரேக்க எழுத்து $\sum$வை பயன்படுத்தி இதை சுருக்கமாக எழுதுவதை நினைவுகூறுவோம். $\sum$ என்பது மொத்தத்தை குறிக்கிறது. அதாவது $\bar{x} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

எடுத்துக்காட்டு-1. ஒரு பள்ளியில் உள்ள 10ஆம் வகுப்பு மாணவர்கள் 30பேர் கணிதத்தில் எடுத்த மதிப்பெண்கள் கீழ்உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் சராசரியைக் கண்டுபிடி.

பெற்ற மதிப்பெண்கள் (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

தீர்வு : மேலே கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தை மாற்றி அமைத்து எல்லா விவரங்களின் மொத்தத்தைக் கண்டுபிடிப்போம்.

பெற்ற மதிப்பெண்கள் (x_i)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
மொத்தம்	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 1779$

ஆதலால், $$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

எனவே, மதிப்பெண்களின் சராசரி = 59.3

அன்றாட வாழ்க்கையில் பெரும்பான்மையான சூழ்நிலைகளில் மிகப்பெரிய விவரங்களை எளிதில் புரிந்துகொள்வதற்காக அவ்விவரங்களை வகைப்படுத்தப்பட வேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகிறது. வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களின் சராசரியைக் கண்டறியும் சில முறைகளைப்பற்றி விவாதிப்போம்.

உதாரணம் 1ல் கொடுக்கப்பட்ட வகைப்படுத்தப்படாத விவரத்தை பிரிவு இடைவெளி நீளம் 15ஆகக் கொண்டு பிரித்துக்கொள்வோம். ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளிக்கும் நிகழ்வெண்களை ஒதுக்கீடு செய்யும்போது மாணவன் பெற்ற மதிப்பெண், பிரிவு இடைவெளியின் மேல் எல்லைக்கு சமமாக இருந்தால் அதை அடுத்த பிரிவில் குறிப்பிட வேண்டும் என்பதை நினைவுகூறுக. உதாரணமாக 40 மதிப்பெண்கள் பெற்ற 4 மாணவர்கள் 25-40 பிரிவு இடைவெளியில் காண்பிக்காமல் 40-55 பிரிவில் காண்பிப்போம். இதை நினைவில் கொண்டு வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணையைத் தயார்செய்வோம்.

பிரிவு இடைவெளி	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	2	3	7	6	6	6

இப்பொழுது ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியையும் அடையாளம்காட்ட ஒரு புள்ளி நமக்குத் தேவைப்படுகிறது. ஒவ்வொரு பிரிவின் நிகழ்வெண்ணும் அந்த பிரிவின் மையமதிப்பின் மீது ஆதாரப்பட்டுள்ளது என நினைத்துக்கொள்வோம். எனவே ஒவ்வொரு பிரிவின் மையமதிப்பையும் அந்த பிரிவினுடைய எல்லா மதிப்புகளுக்கும் அடையாளமாக எடுத்துக்கொள்வோம். இதையே வகுப்பு மதிப்பெண் அல்லது மைய மதிப்பெண் என்பர். இந்த வகுப்பு மதிப்பெண் என்பது அந்த பிரிவின் மேல் மற்றும் கீழ் வரம்புகளின் சராசரி என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

$$\text{வகுப்பு மதிப்பெண்} = \frac{\text{வகுப்பின் மேல்வரம்பு + வகுப்பின் கீழ்வரம்பு}}{2}$$

10-25 என்ற வகுப்பின் வகுப்பு மதிப்பெண் $= \frac{10+25}{2} = 17.5$. இதைப்போல மீதமுள்ள வகுப்புகளின் வகுப்பு மதிப்பெண்களையும் கண்டறியலாம். இந்த வகுப்பு மதிப்பை x_i என அட்டவணையில் குறிப்பிடுவோம். இப்பொழுது கூட்டுசராசரியைக் கண்டறிய முந்தைய எடுத்துக்காட்டில் உள்ள முறையைப் பின்பற்றுவோம்.

பிரிவு இடைவெளி	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f_i)	பிரிவின் மையமதிப்பு (x_i)	f_ix_i
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
மொத்தம்	$\sum f_i = 30$		$\sum f_ix_i = 1860.0$

மேலுள்ள அட்டவணையில் கடைசி நிரலில் உள்ள மதிப்புகளின் மொத்தம் $\sum f_ix_i$. எனவே கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் கூட்டுசராசரி.

$$\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

கூட்டுசராசரியை கண்டறியும் இந்த புதிய முறையை நேர்முறை என்பர்.

மேலுள்ள இரண்டு முறைகளிலும் ஒரு விவரத்திற்கு ஒரே சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கூட்டுசராசரி கணக்கிடும் போது கிடைத்த முடிவுகள் வெவ்வேறாக உள்ளன. உதாரணம் ⑴ல் சரியான கூட்டுசராசரி 59.3ஆகவும் மேலும் 62 என்பது தோராயமான கூட்டு சராசரியாகவும் கிடைத்தது. இந்த இரண்டு முறைகளிலும் கூட்டு சராசரியில் ஏன் வேறுபாடு ஏற்பட்டது? என்பதை ஆலோசியுங்கள்.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

1. வகைப்படுத்தப்படாத மற்றும் வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்தின் கூட்டுசராசரியை கணக்கிடலாம். இவற்றில் எது சரியான கூட்டுசராசரி என்று நீ நினைக்கிறாய்? ஏன்?
2. விவரங்களை பகுப்பாய்வதற்கு வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்கள் எப்பொழுது ஏற்றதாக இருக்கும்?

சில சமயங்களில் x_1 , f_1 மதிப்புகள் மிகவும் பெரியதாக இருந்தால் x_1, f_1 ன் பெருக்கற்பலனை கண்டறிவது கடினம் மேலும் அதிக நேரத்தை எடுத்துக்கொள்ளும். இத்தகைய சூழ்நிலைகளில் கணக்கிடுதலை குறைக்க மற்றொரு முறையைக் குறித்து ஆலோசிக்கலாம்.

நாம் f_i'ஐ எதுவும் செய்ய இயலாது. ஆனால் ஒவ்வொரு x_i ஐயும் சிறிய எண்ணாக மாற்றி கணக்கிடுவதை எளிதாக்கலாம். நாம் இதை எப்படி செய்வது? x_i லிருந்து ஒரு நிரந்தரமான எண்ணை கழிக்கவேண்டும். எடுத்துக்காட்டு 1ல் கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கு இந்தமுறை மூலம் முயன்று பார்க்கலாம்.

படி1ல் x_iல் உள்ள ஒரு மதிப்பை ஊகித்த சராசரியாக எடுத்துக்கொள். இதை 'a' என குறித்துக்காட்டுவோம். கணக்கிடுதலை மேலும் எளிதாக்க $x_1, x_2, \ldots, x_n$ களின் மதிப்புகளில் மையமதிப்பு aவாக இருக்குமாறு எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே நாம் $a = 47.5$ அல்லது $a = 62.5$ஐ தேர்ந்தெடுக்கலாம். இப்பொழுது $a = 47.5$ என தேர்ந்தெடுப்போம்.

படி2ல் ஒவ்வொரு x_iலிருந்தும் aன் விலகலைக் கண்டுபிடி, இதை d_i ஆகக் காட்டுவோம்.

$$d_i = x_i - a = x_i - 47.5$$

படி3ல் d_i மற்றும் இதற்கு ஒத்த நிகழ்வெண் f_iன் பெருக்கற்பலன் மேலும் $f_i d_i$ களின் மொத்தத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இந்த கணக்கீடு பின்வரும் அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

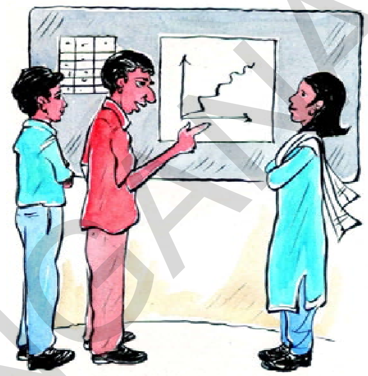
பிரிவு இடைவெளி	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f_i)	மையமதிப்பு (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$ $x_i = a$	$f_i d_i$
10-25	2	17.5	-30	-60
25-40	3	32.5	-15	-45
40-55	7	47.5 (a)	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
மொத்தம்	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

எனவே, மேலுள்ள அட்டவணையிலிருந்து விலகல்களின் கூட்டுசராசரி $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

இப்பொழுது $\bar{d}$ மேலும் $\bar{x}$ களுக்கு இடைப்பட்ட உறவைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

d_i ஐ பெறுவதற்கு நாம் ஒவ்வொரு x_i லிருந்து 'a'ஐ கழித்தோம். ஆகையால் சராசரி $\bar{x}$ ஐ பெறுவதற்கு 'a'வை $\bar{d}$ உடன் கூட்டவேண்டிய அவசியம் உள்ளது. இதை கணிதமூலமாக விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

விலகல்களின் சராசரி $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$



எனவே
$$\bar{d} = \frac{\sum f_i(x_i - a)}{\sum f_i}$$
$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$$
$$= \bar{x} - a\frac{\sum f_i}{\sum f_i}$$
$$\bar{d} = \bar{x} - a$$
$$\therefore \quad \bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

அட்டவணையில் $a, \sum f_i d_i$ மேலும் $\sum f_i$ ன் மதிப்புகளை பிரதியிட்டால் நமக்கு கிடைப்பது
$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

$\therefore$ மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் கூட்டுசராசரி = 62. மேலே விவாதித்த முறையை விலகல் முறை அல்லது ஊகித்த சராசரிமுறை என்று அழைப்பர்.

முயற்சி செய்

உதாரணம்-1ல் கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தை எடுத்துக்கொண்டு x_i ன் அடுத்துவரும் மதிப்புகளை அதாவது $17.5, 32.5, \ldots$ இவற்றை ஊகித்த சராசரியாக எடுத்துக்கொண்டு விலகல் முறையில் கூட்டுசராசரியை கணக்கிடுங்கள். இப்பொழுது கீழ்கண்டவற்றை கலந்துரையாடலாம்.

1. மேலே உள்ள எல்லா முறைகளிலும் கூட்டுசராசரியின் மதிப்புகள் சமமாக உள்ளதா?
2. ஒருவேளை நாம் உண்மையான சராசரியையே ஊகித்த சராசரியாக எடுத்துக்கொண்டால் அப்பொழுது $\sum f_i d_i$ ன் மதிப்பு எவ்வளவு?
3. எந்த ஒரு மைய மதிப்பையும் (வகுப்பு மதிப்பெண்) ஊகித்த சராசரியாக எடுத்துக்கொள்வதற்கான காரணம் என்ன?

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் 4வது நிரலில் உள்ள மதிப்புகளைக் கவனித்தால் அவை 15ன் மடங்குகளாக உள்ளன. எனவே நாம் 4வது நிரலில் உள்ள மதிப்புகளை 15ஆல் வகுத்தால் நமக்கு சிறிய எண்கள் கிடைக்கும். அப்பொழுது அந்த மதிப்புகளை f_i ஆல் பெருக்குவது எளிதாக இருக்கும். (இங்கு 15 என்பது ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் அளவு)

எனவே, $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ என எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு a என்பது ஊகித்த சராசரி மேலும் h என்பது பிரிவின் அளவு ஆகும்.

இப்பொழுது, நாம் முன்பு கூறியவாறு u_i மதிப்பை வரிசையாகக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். (அதாவது $f_i u_i$ கண்டுபிடிக்க வேண்டும் பிறகு $\sum f_i u_i$ன் மதிப்பை கண்டுபிடிக்க வேண்டும்). $h = 15$ என எடுத்துக்கொண்டு [பொதுவாக பிரிவின் நீளத்தை h என எடுத்துக்கொள்வோம். ஆனால் h என்பது எப்போதும் பிரிவின் நீளமாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை].

Let $\bar{u} = \dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

பிரிவு இடைவெளி	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f_i)	மைய மதிப்பு (x_i)	$d_i = x_i - a$	$u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10-25	2	17.5	-30	-2	-4
25-40	3	32.5	-15	-1	-3
40-55	7	47.5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77.5	30	2	12
85-100	6	92.5	45	3	18
மொத்தம்	$\sum f_i$=30				$\sum f_i u_i$=29

இங்கு, மீண்டும் $\bar{u}$ மேலும் $\bar{x}$க்கு இடையே உள்ள உறவை கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$u_i = \frac{x_i - a}{h}$$

எனவே
$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i \dfrac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}\right\}$$

$$= \frac{1}{h}(\bar{x} - a)$$

அல்லது
$$h\bar{u} = \bar{x} - a$$

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = a + h\left\{\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right\}$$

அல்லது
$$\overline{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

$a, \sum f_i u_i$ மேலும் $\sum f_i$ ன் மதிப்புகளை அட்டவணையில் இருந்து பெற்று, பிரதியிட்டால் நமக்கு கிடைப்பது

$$\overline{x} = 47.5 + 15 \times \frac{29}{30}$$
$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

எனவே மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் கூட்டுசராசரி 62 ஆகும். மேலே விவாதித்த முறையை படி-விலகல் முறை என்று அழைக்கப்படும்.

நாம் கவனித்தவை :

- d_i களின் மதிப்புகள் பொதுவான காரணியை பெற்றிருந்தால் இந்த படி-விலகல் முறையை பயன்படுத்துவது ஏற்றதாக இருக்கும்.
- மேற்கண்ட மூன்று முறைகளிலுமிருந்து கிடைத்த கூட்டுசராசரியின் மதிப்புகள் ஒரே மாதிரியாக உள்ளன.
- ஊகித்த கூட்டுசராசரிமுறை மேலும் படி-விலகல் முறை ஆகியவை நேர்முறையை எளிமையாக்க செய்யப்பட்டவை.
- a மேலும் h மதிப்புகள் மேற்கண்டவாறாக இல்லாமலும், மேலும் அவை கொடுக்கப்படவில்லையெனில் பூஜ்ஜியமற்ற எண்களாகவும் இருந்தால் $\overline{x} = a + h\overline{u}$ எனும் சூத்திரம் உருவாகிறது. ஏனெனில் $u_i = \frac{x_i - a}{h}$

இந்த முறைகளை மற்றொரு உதாரணங்களில் பயன்படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டு-2. இந்தியாவிலுள்ள வெவ்வேறு மாநிலங்கள் மற்றும் யூனியன் பிரதேசத்தைச் சேர்ந்த கிராமப்புற ஆரம்பப் பள்ளிகளிலுள்ள ஆசிரியைகளின் சதவீதங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மூன்று முறைகளையும் பயன்படுத்தி ஆசிரியைகளின் கூட்டுசராசரி சதவீதத்தைக் கண்டுபிடி.

ஆசிரியைகளின் சதவீதம்	15 - 25	25 - 35	35 – 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 – 85
மாநிலங்கள்/யூனியன் பிரதேசங்களின் எண்ணிக்கை	6	11	7	4	4	2	1

மூலாதாரம் : *NCERT* நடத்திய 7வது அனைத்திந்திய பள்ளிக்கல்வி கணக்கெடுப்பின்படி.

தீர்வு : ஒவ்வொரு பிரிவின் மையமதிப்பு x_i கண்டுபிடித்து அதை அட்டவணையில் இடு. இங்கு $a = 50, h = 10$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

எனவே, $d_i = x_i - 50$ மேலும் $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$

இப்பொழுது நாம் d_i மேலும் u_i மதிப்பை கண்டுபிடித்து அட்டவணையில் நிரப்பவும்

ஆசிரியைகளின் சதவீதம்	மாநிலங்களின்/ யூனியன் பிரதேசங்களின் எண்ணிக்கை	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \dfrac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 – 25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25 – 35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35 – 45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45 – 55	4	50	0	0	200	0	0
55 – 65	4	60	10	1	240	40	4
65 – 75	2	70	20	2	140	40	4
75 – 85	1	80	30	3	80	30	3
மொத்தம்	35				1390	-360	-36

மேலுள்ள அட்டவணையில் இருந்து நாம் பெறுவது

$\sum f_i = 35, \sum f_i x_i = 1390, \sum f_i d_i = -360, \sum f_i u_i = -36$.

நேர்முறையை பயன்படுத்தினால் $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{1390}{35} = 39.71$

ஊகித்த கூட்டுசராசரி முறையை பயன்படுத்தினால்

$$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{-360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$$

படிவிலகல் முறையை பயன்படுத்தினால் $\bar{x} = a + \left(\dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 50 + \dfrac{-36}{35} \times 10 = 39.71$

கிராமப்புற பள்ளிகளிலுள்ள ஆசிரியைகளின் கூட்டுசராசரி சதவீதம் 39.71ஆகும்.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

1. மூன்று முறைகளிலுமிருந்து கிடைத்த முடிவுகள் ஒரே மாதிரியாக உள்ளதா?
2. x_i மேலும் f_i ஆகியவை போதுமான அளவு சிறியதாக இருந்தால் எந்தமுறையை தேர்ந்தெடுப்பது சிறந்தது?
3. x_i மேலும் f_i ன் மதிப்புகள் பெரிய எண்களாக இருந்தால் எந்த முறையை உபயோகிப்பது?

ஒருவேளை பிரிவின் அளவு வெவ்வேறாகவும் மேலும் x_i ன் மதிப்புகள் பெரிய எண்ணாகவும் இருந்தால் d_i களை பொதுவாக வகுக்கக்கூடிய எண்ணை h என எடுத்துக்கொண்டு படி–விலகல் முறையை பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-3. ஒருநாள் கிரிக்கெட் போட்டிகளில் பந்துவீச்சாளர்கள் எடுத்த விக்கெட்டுகளின் விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. சரியான முறையை பயன்படுத்தி விக்கெட்டுகளின் எண்ணிக்கையின் கூட்டு சராசரியைக் கண்டுபிடி. இந்த கூட்டுசராசரியின் சிறப்பு என்ன?

விக்கெட்டுகளின் எண்ணிக்கை	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 – 450
பந்து வீச்சாளர்களின் எண்ணிக்கை	7	5	16	12	2	3

தீர்வு : இங்கு பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் வெவ்வேறாக உள்ளது, மேலும் x_i மதிப்புகள் பெரிய எண்களாக உள்ளது. ஆகையால் கூட்டுசராசரி கண்டறிவதற்கு படி-விலகல் முறையே பயன்படுத்துவோம். $a = 200$ மேலும் $h = 20$ எனில் நமக்கு கிடைத்த தகவல்கள் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

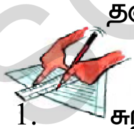
விக்கெட்டுகளின் எண்ணிக்கை	பந்து வீச்சாளர்களின் எண்ணிக்கை (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ $(h = 20)$	$f_i u_i$
20 – 60	7	40	-160	-8	-56
60 – 100	5	80	-120	-6	-30
100 – 150	16	125	-75	-3.75	-60
150 – 250	12	200 (a)	0	0	0
250 – 350	2	300	100	5	10
350 – 450	3	400	200	10	30
மொத்தம்	45				-106

எனவே, $$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 200 + \frac{-106}{45} X 20 = 200 - 47.11 = 152.89$$

45பந்துவீச்சாளர்கள் ஒருநாள் கிரிக்கெட் போட்டியில் பெற்ற விக்கெட்டுகளின் கூட்டுசராசரி= 152.89

வகுப்பறை செயல்திட்டம் :

1. உங்கள் பள்ளியில் அண்மையில் நடைபெற்ற கணிதத் தேர்வில் உன்னுடைய வகுப்பு மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண் விவரங்களை சேகரிக்கவும். இதற்கு வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் அட்டவணையை தயாரிக்கவும். இதைப்போல மற்ற பாடங்களுக்கும் தயார்செய்து ஒப்பிடு. ஒவ்வொரு வகைக்கும் சம்பந்தப்பட்ட முறையைப் பயன்படுத்தி கூட்டு சராசரியைக் கண்டுபிடி.
2. உன்னுடைய நகரத்தில் 30நாட்களில் பதிவான அதிகபட்ச வெப்பநிலை விவரங்களை சேகரிக்கவும். இந்த விவரத்தை வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் அட்டவணையில் காட்டு. தகுந்த முறையைப் பயன்படுத்தி விவரத்தின் கூட்டுசராசரியைக் கண்டுபிடி.
3. உன்னுடைய வகுப்பிலுள்ள, அனைத்து மாணவர்களின் உயரங்களை அளந்து இதை வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணையாக உருவாக்கு. தகுந்த முறையை பயன்படுத்தி விவரத்தின் கூட்டுசராசரியைக் கண்டுபிடி.



பயிற்சி - 14.1

1. சுற்றுப்புற விழிப்புணர்வு நிகழ்ச்சியின் ஒருபாகமாக ஒரு குழுமாணவர்கள் ஒரு கணக்கெடுப்பை எடுத்தனர். இதை 20 வீடுகளில் கணக்கெடுத்து எத்தனை செடிகளை நட்டனர் என்ற விவரத்தை சேகரித்து கீழே உள்ள அட்டவணையில் பதிவு செய்தனர். ஒவ்வொரு வீட்டிலுள்ள செடிகளின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி.

செடிகளின் எண்ணிக்கை	0 - 2	2 - 4	4 – 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 – 14
வீடுகளின் எண்ணிக்கை	1	2	1	5	6	2	3

2. ஒரு தொழிற்சாலையிலுள்ள 50தொழிலாளர்களின் தினசரிக்கூலி கீழுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

தினசரிக்கூலி ரூபாய்களில்	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400– 450
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	12	14	8	6	10

தகுந்த முறையைப் பயன்படுத்தி தொழிற்சாலையிலுள்ள தொழிலாளர்களின் தினசரி கூலியின் கூட்டுசராசரியைக் கண்டுபிடி.

3. ஒரு இருப்பிடத்தில் சிறுவர்களின் தினசரி கைச்செலவுகள் (pocket allowance) கீழே உள்ள பங்கீட்டு அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது. சிறுவர்களின் சராசரி கைச்செலவு ₹ 18 எனில் கீழேஉள்ள அட்டவணையில் விடுபட்ட நிகழ்வெண் (f)ஐக் கண்டுபிடி.

தினசரி கைச்செலவு (ரூபாய்களில்)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை	7	6	9	13	f	5	4

4. ஒரு மருத்துவமனையில் மருத்துவர்கள் 30பெண்களுக்கு மருத்துவ பரிசோதனை மேற்கொண்டனர். அவர்களின் இதயத்துடிப்பு நிமிடத்திற்கு எத்தனை முறைகள் என்பதை கீழே காட்டியவாறு பதிவுசெய்யப்பட்டது. தகுந்த முறையை தேர்ந்தெடுத்து பெண்களின் இதயத்துடிப்பின் சராசரியைக் (ஒருநிமிடத்திற்கு) கண்டுபிடி.

இதயத்துடிப்புகளின் எண்ணிக்கை/நிமிடம்	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
பெண்களின் எண்ணிக்கை	2	4	3	8	7	4	2

5. ஒரு சில்லறை பழஅங்காடியில் பழவியாபாரிகள் ஆரஞ்சு பழங்களை கூடையில் வைத்து விற்கின்றனர். இந்த கூடைகளில் உள்ள ஆரஞ்சு பழங்கள் வெவ்வேறு எண்ணிக்கையில் உள்ளன.

ஆரஞ்சுபழங்களின் எண்ணிக்கை	10-14	15–19	20-24	25-29	30–34
கூடைகளின் எண்ணிக்கை	15	110	135	115	25

ஒவ்வொரு கூடையில் உள்ள ஆரஞ்சு பழங்களின் கூட்டுசராசரியைக் கண்டுபிடி. கூட்டுசராசரியை கண்டறிய எந்த முறையை தேர்ந்தெடுப்பாய்?

6. ஒரு இருப்பிடத்தில் உள்ள 25 குடும்பங்களுக்கு சம்பந்தப்பட்ட தினசரி உணவுக்கான செலவு விவரங்கள் கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தினசரி உணவுச்செலவுகள் (ரூ)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	4	5	12	2	2

தகுந்த முறையைப் பயன்படுத்தி தினசரி உணவுச் செலவுக்கான கூட்டுசராசரியைக் கண்டுபிடி.

7. ஒரு நகரத்தில் 30இருப்பிடத்தில் காற்றிலுள்ள SO_2 ன் அடர்த்தி (in parts per million, i.e., ppm) பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

SO_2 ன் அடர்த்தி (in ppm)	0.00-0.04	0.04-0.08	0.08-0.12	0.12-0.16	0.16-0.20	0.20-0.24
நிகழ்வெண்	4	9	9	2	4	2

காற்றிலுள்ள SO_2 ன் அடர்த்தி கூட்டுசராசரியைக் கண்டுபிடி.

8. ஒரு வகுப்பு ஆசிரியர் ஒரு பருவத்தில் தனது வகுப்பைச் சேர்ந்த 40 மாணவர்களின் வருகை விவரங்களை கீழுள்ளவாறு அட்டவணையில் பதிவு செய்தார். இந்தப் பருவத்தில் (56 நாட்கள்) ஒரு மாணவனின் சராசரி வருகை எவ்வளவு?

நாட்களின் எண்ணிக்கை	35-38	38-41	41-44	44-47	47-50	50-53	53-56
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	1	3	4	4	7	10	11

9. 35 நகரங்களுக்கான எழுத்தறிவு வீதம் (சதவீதத்தில்) கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எழுத்தறிவு வீதத்தின் சாரசரியைக் கண்டுபிடி.

எழுத்தறிவு %	45–55	55-65	65-75	75-85	85-95
நகரங்களின் எண்ணிக்கை	3	10	11	8	3

14.3 முகடு (MODE)

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தில் அதிகமுறை திரும்பத்திரும்ப வரும் ராசி அதாவது அதிக நிகழ்வெண்ணைக் கொண்ட ராசி முகடு எனப்படும்.

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்திற்கு முகடு காணுவதற்கு முன்பு நாம் வகைப்படுத்தப்படாத விவரத்தின் முகடு காணும் முறையை கீழ்காணும் எடுத்துக்காட்டின் மூலமாக அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-4. 10 கிரிக்கெட் போட்டிகளில் ஒரு பந்து வீச்சாளர் எடுத்த விக்கெட்டுகள் கீழ்கண்டவாறு உள்ளன. 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3 இந்த விவரத்திற்கு முகடு காண்க.

தீர்வு : விவரங்களை ஒரு வரிசைக்கிரமத்தில் அமைத்தால் அதாவது $0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6$

அதிகமான போட்டிகளில் பந்து வீச்சாளர் 2 விக்கெட்டுகளை எடுத்தது தெளிவாகத் தெரிகிறது (அதாவது 3முறை). எனவே இந்த விவரத்தின் முகடு 2 ஆகும்.

முயற்சி செய்

1. பின்வரும் விவரங்களின் முகடை கண்டுபிடி.
   a) 5, 6, 9, 10, 6, 12, 3, 6, 11, 10, 4, 6, 7.
   b) 20, 3, 7, 13, 3, 4, 6, 7, 19, 15, 7, 18, 3.
   c) 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6.
2. முகடு எப்பொழுதும் விவரத்தின் மையத்தில் இருக்குமா?
3. எடுத்துக்காட்டு-4ல் உள்ள விவரத்துடன் ஒரு ராசியை சேர்த்தால் முகடு மாறுபடுமா? உன்னுடைய கருத்து என்ன?
4. எடுத்துக்காட்டு-4ல் ராசிகளில் உள்ள அதிகபட்ச மதிப்பு 8 ஆக மாற்றினால் இதன் பாதிப்பு விவரத்தின் முகடின் மீது இருக்குமா? உன் கருத்து என்ன?

வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பங்கீட்டில் நிகழ்வெண்களை உற்றுநோக்கி முகடு காண்பது முடியாது. இங்கு நாம் மிக உயர்ந்த நிகழ்வெண் கொண்ட பிரிவை அடையாளம் காட்டலாம் இதையே நாம் முகடு பிரிவு என்கிறோம். முகடு பிரிவில் உள்ள ஒரு மதிப்பு முகடு ஆகும். மேலும் இந்த முகடை சூத்திரமாக கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

முகடு $$= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

இங்கு, l = முகடு பிரிவின் கீழ் வரம்பு,
h = முகடு பிரிவு இடைவெளியின் அளவு,
f_1 = முகடு பிரிவின் நிகழ்வெண்,
f_0 = முகடு பிரிவிற்கு உடனே மேலே உள்ள வகுப்பின் நிகழ்வெண்,
f_2 = முகடு பிரிவிற்கு உடனே கீழே உள்ள வகுப்பின் நிகழ்வெண்.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் மூலமாக இந்த சூத்திரம் எவ்வாறு பயன்படும் என்பதைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-5. ஒரு குடியிருப்புப் பகுதியில் மாணவர்குழு 20 குடும்பங்களின் உறுப்பினர்கள் பற்றிய கணக்கெடுப்பை செய்து முடிவுகளை பின்வரும் நிகழ்வெண் அட்டவணையில் பதிவு செய்தது.

குடும்ப அளவு	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	7	8	2	2	1

இந்த விவரத்தின் முகடை கண்டுபிடி.

தீர்வு : இங்கு மிக உயர்ந்த நிகழ்வெண் 8. இந்த நிகழ்வெண்ணுக்கு ஒத்த பிரிவு இடைவெளி 3-5. எனவே, முகடு பிரிவு 3-5. இப்பொழுது

முகடு பிரிவு = 3-5, முகடு பிரிவின் கீழ்வரம்பு $(l) = 3$, பிரிவின் நீளம் $(h) = 2$

முகடு பிரிவின் நிகழ்வெண்$(f_1) = 8$,

முகடு பிரிவிற்கு உடனே மேலே உள்ள வகுப்பின் நிகழ்வெண் $(f_0) = 7$,

முகடு பிரிவிற்கு உடனே கீழேஉள்ள வகுப்பின் நிகழ்வெண் $(f_2) = 2$.

இப்பொழுது மேலுள்ள மதிப்புகளை சூத்திரத்தில் பிரதியிடலாம்,

முகடு $$= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2\times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

மேலுள்ள விவரத்தின் முகடு = 3.286

எடுத்துக்காட்டு-6. 30 மாணவர்கள் ஒரு கணிதத்தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே உள்ள பங்கீட்டு அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த விவரத்திற்கு முகடைக் கண்டுபிடி. மேலும் முகடு மற்றும் கூட்டு சராசரியை ஒப்பிட்டு விளக்குக.

பிரிவு இடைவெளி	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f_i)	மையமதிப்பு (x_i)	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
மொத்தம்	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860.0$

தீர்வு : இங்கு அதிகமான மாணவர்கள் (அதாவது 7பேர்) 40-55 பிரிவு இடைவெளியிலுள்ள மதிப்பெண்களை பெற்றுள்ளனர். எனவே முகடு பிரிவு 40-55 ஆகும்.

பிரிவு முகடின் கீழ்வரம்பு (l) $= 40$,
வகுப்பு பிரிவு இடைவெளி அளவு (h) $= 15$,
முகடு பிரிவின் நிகழ்வெண் (f_1) $= 7$,
முகடு பிரிவின் முன்உள்ள வகுப்பின் நிகழ்வெண் (f_0) $= 3$,
முகடு பிரிவின் பின்உள்ள வகுப்பின் நிகழ்வெண் (f_2) $= 6$.
இப்போது சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம்

$$\text{முகடு} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{2\times 7 - 6 - 3}\right) \times 15 = 40 + 12 = 52$$

விளக்குதல் : இந்த விவரத்தின் முகடு 52. இப்போது எடுத்துக்காட்டு 1லிருந்து கூட்டுசராசரி 62என நமக்குத் தெரியும். எனவே 52 மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவர்கள் அதிக எண்ணிக்கையில் உள்ளனர். ஒவ்வொரு மாணவனின் சராசரி மதிப்பெண் 62ஆகும்.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

1. சூழ்நிலையைப் பொறுத்து நாம் வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் அனைவரின் சராசரி மதிப்பெண்கள் அல்லது அதிகமான மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்ணையும் கண்டறியலாம்.
   a. முதல் சூழ்நிலையில் நாம் கண்டறிந்தது என்ன?
   b. இரண்டாவது சூழ்நிலையில் நாம் கண்டறிய வேண்டியது என்ன?
2. வெவ்வேறான பிரிவு இடைவெளியைக் கொண்ட விவரத்திற்கும் முகடைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

பயிற்சி - 14.2

1. ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் ஒரு மருத்துவமனையில் சேர்க்கப்பட்ட நோயாளிகளின் வயதுவிவரங்கள் கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வயது (வருடங்களில்)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	6	11	21	23	14	5

மேலுள்ள விவரத்திற்கு முகடு மேலும் கூட்டுசராசரி கண்டுபிடி. இந்த இரண்டு மையப்போக்கு அளவைகளை ஒப்பிட்டு விளக்குக.

2. கீழே உள்ள அட்டவணையில் 225 மின்சார உபகரணங்களின் ஆயுட்காலம் (மணிகளில்) விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஆயுட்காலம் (மணிகளில்)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
நிகழ்வெண்	10	35	52	61	38	29

மின்சார உபகரணங்களின் ஆயுட்கால முகடைக் கண்டுபிடி.

3. ஒரு கிராமத்திலுள்ள 200 குடும்பங்களின் மாத வீட்டுச்செலவு விவரங்கள் கீழுள்ள பங்கீட்டு அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. குடும்பங்களின் மாதச்செலவுக்கான முகடைக் கண்டுபிடி. அவ்வாறே மாதச்செலவுக்கான கூட்டுசராசரியையும் கண்டுபிடி.

மாதச்செலவு (ரூபாய்களில்)	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	24	40	33	28	30	22	16	7

4. மாநிலவாரியாக மேல்நிலைப் பள்ளிகளிலுள்ள ஆசிரியர்–மாணவர்களின் விகிதங்கள் கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த விவரத்தின் முகடு மேலும் கூட்டுசராசரியைக் கண்டுபிடி. இந்த இரண்டு அளவுகளையும் விளக்குக.

மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
மாநிலங்களின் எண்ணிக்கை	3	8	9	10	3	0	0	2

5. ஒருநாள் கிரிக்கெட் போட்டிகளில் உலகின் தலைசிறந்த மட்டைவீரர்கள் எடுத்த ஓட்டங்கள் பற்றிய விவரங்கள் கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஓட்டங்கள்	3000-4000	4000-5000	5000-6000	6000-7000	7000-8000	8000-9000	9000-10000	10000-11000
மட்டைவீரர்களின் எண்ணிக்கை	4	18	9	7	6	3	1	1

மேலுள்ள விவரத்திற்கு முகடு கண்டுபிடி.

6. ஒரு மாணவன் ஒரு சாலையோரத்தில் நின்றுகொண்டு அதன் வழியே செல்லும் கார்களின் எண்ணிக்கையை ஒவ்வொரு மூன்று நிமிடத்திற்கு ஒருமுறை 100 பிரிவுகளாகக் குறித்து விவரங்களை பின்வரும் அட்டவணையில் பதிவுசெய்தான்.

கார்களின் எண்ணிக்கை	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
நிகழ்வெண்	7	14	13	12	20	11	15	8

14.4 வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்தின் இடைநிலை அளவு

இடைநிலை அளவு என்பது மையப்போக்கு அளவைகளுள் ஒன்று. இது கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திலுள்ள ராசிகளின் மைய அளவைத் தருகிறது. வகைப்படுத்தப்படாத விவரத்தின் இடைநிலை அளவைக் காணும் முறையை நினைவு கூர்வோம். விவரத்தில் உள்ள ராசிகளின் மதிப்பை முதலில் நாம் ஏறுவரிசையில் எழுதவேண்டும்.

n என்பது ஒற்றை எனில் இடைநிலைஅளவு $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ ராசி ஆகும்.

n என்பது இரட்டை எனில் இடைநிலை அளவு $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ மற்றும் $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ ராசிகளின் சராசரி ஆகும்.

50மதிப்பெண்களுக்கு வைக்கப்பட்ட தேர்வில் 100 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கு இடைநிலை அளவை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது என்பதை கவனிப்போம்.

பெற்ற மதிப்பெண்கள்	20	29	28	33	42	38	43	25
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	6	28	24	15	2	4	1	20

முதலில் நாம் மதிப்பெண்களை ஏறுவரிசையில் மாற்றி நிகழ்வெண் அட்டவணையை தயார் செய்ய வேண்டும்.

பெற்ற மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (நிகழ்வெண்)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
மொத்தம்	100

இங்கு $n = 100$, இது ஒரு இரட்டைஎண். எனவே இடைநிலை அளவு $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ மற்றும் $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ ராசிகளின் சராசரி ஆகும். அதாவது 50வது மேலும் 51வது ராசிகளாகும். இந்த மையமதிப்பைக் கண்டறிய நாம் குவிவு நிகழ்வெண்ணை அமைக்கவேண்டும்.

பெற்ற மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	குவிவு நிகழ்வெண்
20	6	6
25வரை	6 + 20 = 26	26
28 வரை	26 + 24 = 50	50
29 வரை	50 + 28 = 78	78
33 வரை	78 + 15 = 93	93
38 வரை	93 + 4 = 97	97
42 வரை	97 + 2 = 99	99
43 வரை	99 + 1 = 100	100

இப்பொழுது நாம் இந்த தகவல்கள் ஆதாரமாக நிகழ்வெண் அட்டவணைக்கு அடுத்து மற்றொரு நிரலை சேர்ப்பதன் மூலம் கிடைக்கும் புதிய அட்டவணையை குவிவு நிகழ்வெண் நிரை என்பர். மேலுள்ள அட்டவணையிலிருந்து நாம் காண்பது

50வது ராசி 28 (ஏன்?)

51வது ராசி 29

இடைநிலை அளவு $= \frac{28+29}{2} = 28.5$

குறிப்பு : மேலுள்ள அட்டவணையில் 1வது மற்றும் 3வது நிரல்களைச் சேர்த்து குவிவு நிகழ்வெண் அட்டவணை எனப்படும். இடைநிலை அளவு மதிப்பெண் 28.5 என்பது 50% மாணவர்களுக்கு 28.5 மதிப்பெண்களை விட குறைவாகவும் 50% மாணவர்களுக்கு 28.5 மதிப்பெண்களைவிட அதிகமாக உள்ளது என்ற தகவலைத் தருகிறது.

பக்கத்திலுள்ள படத்தில் வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்தின் 100 மதிப்பெண்களுக்கு வைக்கப்பட்ட தேர்வில் 53மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0-10	5
10-20	3
20-30	4
30-40	3
40-50	3
50-60	4
60-70	7
70-80	9
80-90	7
90-100	8

இந்த அட்டவணையிலிருந்து பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்க முயற்சி செய்வோம்.

10 மதிப்பெண்களைவிட குறைவாக பெற்ற மாணவர்கள் எத்தனைபேர்? 5பேர் என்பது தெளிவாகத் தெரிகிறது. 20 மதிப்பெண்களைவிட குறைவாக பெற்ற மாணவர்கள் எத்தனைபேர்? 20 மதிப்பெண்களைவிடக் குறைவாக பெற்ற மாணவர்களை உற்றுநோக்கினால் இதில் 0-10 மதிப்பெண் பெற்றவர்களும் 10-20 மதிப்பெண் பெற்றவர்களும் அடங்குவர். எனவே 20மதிப்பெண்களை விடக்குறைவாக பெற்றவர்கள் 5+3, அதாவது 8பேர். இதை நாம் 10-20எனும் பிரிவு இடைவெளியின் குவிவு நிகழ்வெண் 8 எனக் கூறலாம்.

பெற்ற மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (குவிவு நிகழ்வெண்)
10க்கு குறைவாக	5
20க்கு குறைவாக	5 + 3 = 8
30க்கு குறைவாக	8 + 4 = 12
40க்கு குறைவாக	12 + 3 = 15
50க்கு குறைவாக	15 + 3 = 18
60க்கு குறைவாக	18 + 4 = 22
70க்கு குறைவாக	22 + 7 = 29
80க்கு குறைவாக	29 + 9 = 38
90க்கு குறைவாக	38 + 7 = 45
100க்கு குறைவாக	45 + 8 = 53

இதைப்போலவே நாம் மற்ற பிரிவுகளைச் சேர்ந்த குவிவு நிகழ்வெண்களையும் நிரப்பலாம். அதாவது 30மதிப்பெண்களைவிட குறைவாக பெற்ற மாணவர்கள் எண்ணிக்கை, 40ஐவிட குறைவான .... 100ஐவிட குறைவான.

இந்த அட்டவணை கீழின குவிவு நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணை எனப்படும். இங்கு 10,20,30,.... 100 ஆகியவை வரிசையாக உள்ள பிரிவு இடைவெளியின் மேல் வரம்புகள் ஆகும்.

இதைப்போலவே நாம் 0 அல்லது அதைவிட அதிகமான மதிப்பெண் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை (இது மொத்த நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் ஆகும்) 10 அல்லது அதைவிட அதிகமான மதிப்பெண் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை (இது மொத்த நிகழ்வெண்ணிலிருந்து முதல்பிரிவின் நிகழ்வெண்ணை கழித்தால் கிடைப்பது) 20அல்லது அதைவிட அதிகமான மதிப்பெண் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை (இது நிகழ்வெண்ணின் மொத்தத்திலிருந்து முதல் இரண்டு பிரிவின் நிகழ்வெண் மொத்தத்தை கழித்தால் கிடைப்பது) இவ்வாறு செய்துக் கொண்டே போகலாம். 0 அல்லது அதைவிட அதிகமான மதிப்பெண் பெற்றவர்கள் 53பேர் என உற்றுநோக்கலாம். 0-10 பிரிவு இடைவெளியில் 5 மாணவர்கள் உள்ளனர்.

பெற்ற மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (குவிவு நிகழ்வெண்)
0க்கு சமமான அல்லது அதிகமான	53
10க்கு சமமான அல்லது அதிகமான	53 - 5 = 48
20க்கு சமமான அல்லது அதிகமான	48 - 3 = 45
30க்கு சமமான அல்லது அதிகமான	45 - 4 = 41
40க்கு சமமான அல்லது அதிகமான	41 - 3 = 38
50க்கு சமமான அல்லது அதிகமான	38 - 3 = 35
60க்கு சமமான அல்லது அதிகமான	35 - 4 = 31
70க்கு சமமான அல்லது அதிகமான	31 - 7 = 24
80க்கு சமமான அல்லது அதிகமான	24 - 9 = 15
90க்கு சமமான அல்லது அதிகமான	15 - 7 = 8

அதாவது 10 அல்லது அதைவிட அதிகமான மதிப்பெண் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை 53-4=48 பேர். இதை தொடர்ந்து செய்தால் 20 அல்லது அதைவிட அதிகமான மதிப்பெண் பெற்றவர்கள் 48-3=45பேர். 30 அல்லது அதைவிட அதிகமானவர்கள் 45-4=41பேர் இவ்வாறு அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

இந்த அட்டவணை மேலின குவிவு நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணை எனப்படும். இங்கு 0,10,20...90 ஆகியவை பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லையை குறிக்கிறது.

இப்பொழுது வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்தின் இடைநிலை அளவு காணுவதில் இந்த குவிவு நிகழ்வெண் அட்டவணையிலிருந்து ஏதாவது ஒன்றை பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம்.

இப்பொழுது வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்தின் குவிவு நிகழ்வெண் அட்டவணையை பார்த்த உடனே நாம் மைய மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க முடியாது. ஏனெனில் மையமதிப்பு என்பது ஏதாவது ஒரு பிரிவு இடைவெளியில் உள்ள ஒரு பதிப்பாகும். எனவே இந்த மொத்தத்தை இரண்டு சமமான பாகங்களாக பிரிக்கும் பிரிவில் உள்ள ஒரு மையமதிப்பை நாம் காணவேண்டிய அவசியம் உள்ளது. ஆனால் அது எந்த பிரிவை சேர்ந்தது என்று எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது? இந்த பிரிவு இடைவெளியைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு நாம் $\frac{n}{2}$ ன் மதிப்பு மற்றும் அனைத்து பிரிவு இடைவெளிகளின் குவிவு நிகழ்வெண்களையும் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். நாம் இப்போது எந்தப்பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண் $\frac{n}{2}$ ன் மதிப்பிற்கு அடுத்து உள்ளதோ அந்த பிரிவை இடைநிலை பிரிவாக குறித்துக்கொள்வோம்.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f)	குவிவு நிகழ்வெண் (cf)
0-10	5	5
10-20	3	8
20-30	4	12
30-40	3	15
40-50	3	18
50-60	4	22
60-70	7	29
70-80	9	38
80-90	7	45
90-100	8	53

மேலுள்ள அட்டவணையிலிருந்து $n = 53$, எனவே $\frac{n}{2} = 26.5$. இப்போது $\frac{n}{2}$ ன் மதிப்பு அதாவது 26.5ஐவிட அதிகமாகவும் (அருகாமையிலும்) உள்ள குவிவு நிகழ்வெண் 29ஆகும். இதற்கான பிரிவு இடைவெளி 60-70. எனவே இடைநிலைப்பிரிவு 60-70 ஆகும்.

இடைநிலைப் பிரிவை கண்டறிந்த பின்னர் பின்வரும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி இடைநிலை அளவைக் காணலாம்.

$$\text{இடைநிலை அளவு, M} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

இங்கு l = இடைநிலைப்பிரிவின் கீழ்வரம்பு,

n = பதிவுகளின் எண்ணிக்கை,

cf = இடைநிலை பிரிவுக்கு உடனே மேலே உள்ள பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண்,

f = இடைநிலை பிரிவின் நிகழ்வெண்,

h = பிரிவு இடைவெளியின் நீளம்.

$\frac{n}{2} = 26.5,\quad l = 60,\quad cf = 22,\quad f = 7,\quad h = 10$ ஆகிய மதிப்பெண்களை சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டால் நாம் பெறுவது

$$\text{இடைநிலை அளவு, M} = 60 + \left[\frac{26.5 - 22}{6}\right] \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

எனவே, வகுப்பிலுள்ள பாதி மாணவர்களுக்கு 66.4க்கு குறைவான மதிப்பெண்களும் மீதி பாதி மாணவர்களுக்கு 66.4ஐவிட அதிகமான மதிப்பெண்களும் கிடைத்திருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு-7. ஒரு பள்ளியிலுள்ள 10ஆம் வகுப்பு மாணவிகளின் உயரங்கள் பற்றிய கணக்கெடுப்பு விவரங்கள் அருகிலுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் இடைநிலை அளவைக் கண்டுபிடி.

உயரம் செ.மீகளில்	மாணவிகளின் எண்ணிக்கை
140க்கு குறைவான	4
145க்கு குறைவான	11
150க்கு குறைவான	29
155க்கு குறைவான	40
160க்கு குறைவான	46
165க்கு குறைவான	51

தீர்வு : உயரங்களின் இடைநிலை அளவை கணக்கிடுவதற்கு பிரிவு இடைவெளியும் அதற்கு ஒத்த நிகழ்வெண்ணும் காணவேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணை குறைந்தவகையை சார்ந்தது (lessthan type), எனவே பிரிவு இடைவெளியின் மேல்வரம்புகள் 140, 145, 150, . . ., 165 ஆகும். எனவே பிரிவுகள் 140க்கு குறைவாக, 140, 140 - 145, 145 - 150, . . ., 160 - 165 ஆக இருக்கும்.

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்	குவிவு நிகழ்வெண்
140க்கு குறைவாக	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையை உற்றுநோக்கினால் 140க்கு குறைவான உயரமுடைய மாணவிகளின் எண்ணிக்கை 4 அதாவது 140க்கு குறைவாக உள்ள பிரிவின் நிகழ்வெண் 4. 145க்கு குறைவான உயரமுடைய மாணவிகள் 11பேர், அதாவது 140-145பிரிவு இடைவெளியில் உள்ள மாணவிகளின் எண்ணிக்கை 11-4=7பேர். இவ்வாறு மீதமுள்ள நிகழ்வெண்களை அட்டவணையில் காட்டியவாறு கணக்கிடலாம்.

ராசிகளின் எண்ணிக்கை, $n = 51$

$\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ வது ராசி. இது 145-150 பிரிவில் அடங்கும்

$\therefore$ இடைநிலைப் பிரிவு 145-150 ஆகும்.

எனவே, இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ்வரம்பு, $l = 145$,

இடைநிலைப் பிரிவுக்கு (145-150)முன் பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண், $cf = 11$,

இடைநிலைப் பிரிவின் நிகழ்வெண் (145-150), $f = 18$,

பிரிவு இடைவெளியின் நீளம், $h = 5$.

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால் இடைநிலை அளவு $= l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$

$$= 145 + \frac{(25.5 - 11)}{18} \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

எனவே மாணவிகளின் உயரங்களின் இடைநிலை அளவு 149.03செ.மீ. அதாவது வகுப்பிலுள்ள 50% மாணவிகள் 149.03செ.மீக்கு குறைவான உயரத்தையும் 50% மாணவிகள் 149.03செ.மீஐ விட அதிகமான உயரத்தையும் கொண்டுள்ளனர்.

எடுத்துக்காட்டு-8. கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் இடைநிலை அளவு 525. விவரத்திலுள்ள ராசிகளின் மொத்தம் 100 எனில், x, y மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி. இங்கு CI என்பது பிரிவு இடைவெளி மேலும் Fr என்பது நிகழ்வெண்.

CI	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
Fr	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4

தீர்வு :

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்	குவிவு நிகழ்வெண்
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	$7+x$
300-400	12	$19+x$
400-500	17	$36+x$
500-600	20	$56+x$
600-700	y	$56+x+y$
700-800	9	$65+x+y$
800-900	7	$72+x+y$
900-1000	4	$76+x+y$

ராசிகளின் எண்ணிக்கை $n = 100$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

எனவே, $76 + x + y = 100$, அதாவது $x + y = 24$ (1)

இடைநிலை அளவு 525 என்பது பிரிவு இடைவெளி 500-600ல் அடங்கும்.

எனவே, $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால்,

இடைநிலை அளவு, $$\mathrm{M} = l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$525 = 500 + \frac{50-36-x}{20} \times 100$$

$$525 - 500 = (14 - x) \times 5$$

$$25 = 70 - 5x$$

$$5x = 70 - 25 = 45$$

$$\therefore \quad x = 9$$

சமன்பாடு (1)லிருந்து நாம் பெறுவது $9 + y = 24$

$$\therefore \quad y = 15$$

குறிப்பு : வெவ்வேறு பிரிவு இடைவெளிகளைக் கொண்ட வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களுக்கும் நாம் இவ்வாறு இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடலாம்.

14.5 மையப்போக்கு அளவைகளின் பயன்பாடுகள், குறிப்பிட்ட தேவைகளுக்கு ஏற்ற பொருத்தமான மையப்போக்கு அளவை.

மையப்போக்கு அளவைகளின் கூட்டுசராசரி மிகவும் அதிகமாக பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஏனெனில் இது எல்லா ராசிகளையும் (மிகச்சிறிய, மிகப்பெரிய) கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளும். இது மிகச்சிறிய, மிகப்பெரிய ஆகிய இரண்டு ராசிகளுக்கு நடுவில் இருக்கும். இதை பயன்படுத்தி இரண்டு அல்லது அதைவிட அதிகமான ராசிகளை அல்லது தொகுப்பை சுலபமாக ஒப்பிடலாம். உதாரணமாக வெவ்வேறு பள்ளியிலுள்ள ஒருகுறிப்பிட்ட தேர்வு முடிவுகளை கூட்டுசராசரி மூலம் ஒப்பிட்டு எந்தப்பள்ளி சிறப்பாக செயல்பட்டது என அறியலாம்.

சிலசமயங்களில் கோடி மதிப்புகள் கூட்டு சராசரியின் மீது பாதிப்பை ஏற்படுத்தும். எடுத்துக்காட்டாக நிகழ்வெண்கள் அனைத்தும் ஏறத்தாழ சரிசமமாக உள்ள பிரிவு இடைவெளிகளுடன் கூடிய விவரத்தின் கூட்டுசராசரி அந்த விவரத்திற்கு சரியானதாக இருக்கும். ஆனால் ஒரு பிரிவின் நிகழ்வெண் 2. இதன் மற்ற நிகழ்வெண்கள் 30,5,30,21,18 என இருக்கும்போது விவரத்தின் கூட்டுசராசரி கண்டுபிடிப்பது சரியானதாக இருக்காது.

விவரத்திலுள்ள தனித்தனி ராசிகள் முக்கியத்துவம் இல்லாதபோது குறிப்பாக கோடி உறுப்புகளின் மதிப்புகளுக்கு உதாரணமாக ஒருராசியை காணவேண்டி உள்ளது. இதற்கு இடைநிலை அளவு மிகவும் பொருத்தமானதாக இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு நாட்டிலுள்ள அனைத்து தொழிலாளர்களின் சராசரி சம்பளங்களைக் காணவேண்டுமெனில் மற்ற ராசிகளைவிட அதிக வித்தியாசத்துடன் மிகச்சிறிய, மிகப்பெரிய மதிப்புகளைக் கொண்ட ராசிகள் இருக்குமாறு இடைநிலை அளவை சரியான மையப்போக்கு அளவையாக எடுத்துக்கொள்ளப்படும்.

அதிகமாக அடிக்கடி வரக்கூடிய மிகமுக்கியமான ராசிகளை குறிப்பிட வேண்டிய சூழ்நிலைகளில் மையப்போக்கு அளவான முகடை பயன்படுத்துவது சரியானதாக இருக்கும். அளவான முகடை பயன்படுத்துவது சரியானதாக இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக அதிகமான மக்கள் பார்க்கக்கூடிய புகழ்பெற்ற தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சியை கண்டுபிடிப்பதற்கும், தேவை அதிகமாக உள்ள பொருளை கண்டுபிடிப்பதற்கும், அதிகமான மக்கள் பயன்படுத்தும் வாகனங்களின் வண்ணத்தை கணக்கிடுவதற்கும் முகடைப் பயன்படுத்துவோம்.

பயிற்சி - 14.3

1. ஒரு குடியிருப்புப் பகுதியில் உள்ள 68 வாடிக்கையாளர்களின் மாதாந்திர மின்சார விநியோகம் கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த விவரத்திற்கு கூட்டுசராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடித்து இவற்றை ஒப்பிடு.

மாதாந்திர மின்சார விநியோகம் (யூனிட்)	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை	4	5	13	20	14	8	4

2. கீழே கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையில் 60 ராசிகளின் இடைநிலை அளவு 28.5 எனில் x, y மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
நிகழ்வெண்	5	x	20	15	y	5

3. ஒரு ஆயுள் காப்பீட்டு நிறுவன ஊழியர், 100 வாடிக்கையாளர்களின் வயதைப் பொறுத்து தயார் செய்த பங்கீட்டு அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. வயதுகளின் இடைநிலை அளவைக் கண்டுபிடி. (18 வயது முதல் 60 வயதுக்கு உட்பட்டவர்களுக்கு மட்டுமே காப்பீடு அளிக்கப்படும்)

வயது (வருடங்களில்)	20க்கு குறைவான	25க்கு குறைவான	30க்கு குறைவான	35க்கு குறைவான	40க்கு குறைவான	45க்கு குறைவான	50க்கு குறைவான	55க்கு குறைவான	60க்கு குறைவான
காப்பீட்டாளர்களின் எண்ணிக்கை	2	6	24	45	78	89	92	98	100

4. ஒரு செடியினுடைய 40 இலைகளின் நீளங்களை மி.மீக்கு அருகாமையில் வரை அளந்து தயாரித்த விவரங்கள் கீழ்கண்ட அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

நீளம்(மி.மீ)	118-126	127-135	136-144	145-153	154-162	163-171	172-180
இலைகளின் எண்ணிக்கை	3	5	9	12	5	4	2

இலைகளின் நீளங்களின் இடைநிலை அளவைக் கண்டுபிடி.

குறிப்பு : இடைநிலை அளவை கணக்கிடும் போது பிரிவு இடைவெளியின் வரம்புகளை நிர்ணயிக்க வேண்டும். அதாவது பிரிவுகளை 117.5-126.5, 126.5-135.5.....171.5-180.5 என மாற்றிக்கொள்ளவேண்டும்.

5. ஒரு பரிசோதனையில் 400நியான் விளக்குகளின் ஆயூட்காலம் கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆயுட்காலம் (மணிகளில்)	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
விளக்குகளின் எண்ணிக்கை	14	56	60	86	74	62	48

விளக்குகளின் ஆயுட்காலத்திற்கு இடைநிலை அளவைக் கண்டுபிடி.

6. ஒரு தொலைபேசி விவரங்கள் உள்ளடக்கிய புத்தகத்திலிருந்து தற்செயலாக 100வீட்டுப்பெயர்களை எடுத்துக்கொண்டு இதிலுள்ள எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து கீழ்கண்ட நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணை தயார் செய்யப்பட்டுள்ளது.

எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
வீட்டுப்பெயர்களின்எண்ணிக்கை	6	30	40	16	4	4

வீட்டுப்பெயர்களிலுள்ள எழுத்துகளின் எண்ணிக்கைக்கு இடைநிலை அளவு, கூட்டுசராசரி, முகடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. ஒரு வகுப்பிலுள்ள 30மாணவர்களின் எடைகள் கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மாணவர்கள் எடைகளின் இடைநிலை அளவைக் கண்டுபிடி.

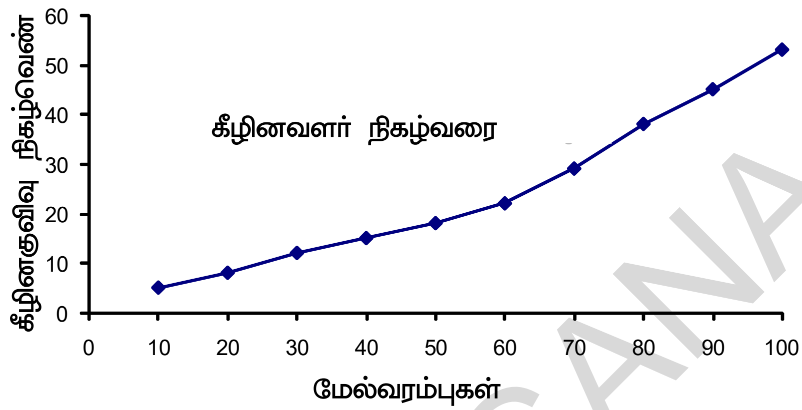
எடை (கி.கி.ல்)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	2	3	8	6	6	3	2

14.6 குவிவு நிகழ்வெண் பங்கீட்டை வரைபடத்தில் குறித்துக்காட்டுதல்

சொற்களை விட படங்களை புரிந்துகொள்வது எளிது என நம் அனைவருக்கும் தெரியும். வரைபடங்கள் கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தை வேகமாக புரிந்துகொள்ள பயன்படுகிறது. கம்பி வரைபடங்கள், செவ்வக வரைபடங்கள் மேலும் நிகழ்வெண் பலகோணங்கள் ஆகியவற்றை நாம் ஒன்பதாம் வகுப்பில் குறித்துக்காட்டியிருப்போம். இப்போது குவிவு நிகழ்வெண் பங்கீட்டை வரைபடத்தில் குறித்துக்காட்டுவதைப் பற்றி பார்ப்போம்.

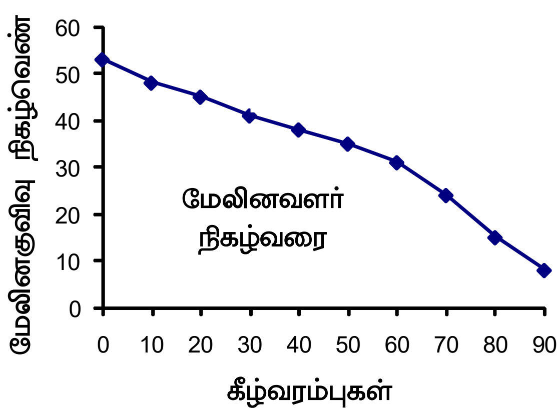
எடுத்துக்காட்டில் உள்ள குவிவு நிகழ்வெண் பங்கீட்டை ஆலோசிப்போம். இதை வரைவதற்கு பிரிவு இடைவெளிகள் தொடர்ச்சியானதாக இருக்க வேண்டும். ஏனெனில் குவிவு நிகழ்வெண்கள் வரம்புகளுடன் தொடர்புடையவை. ஆனால் எல்லைகளுடன் அல்ல.

வரைபடத்தில் குறித்து காட்டப்பட்டுள்ள வரிசையான பிரிவு இடைவெளிகளின் மேல் வரம்புகள் 10,20,30....100 என்பதைக் கவனியுங்கள். பிரிவு இடைவெளியின் மேல் வரம்பை கிடைமட்டமாக X அச்சிலும் இதற்கு ஒத்த கீழின குவிவு நிகழ்வெண்ணை நிலைக்கோடான Y அச்சிலும் குறிக்கவும். வசதிக்கேற்ப அளவு திட்டத்தைத் தேர்ந்தெடு. ஒவ்வொரு பிரிவின் மேல்வரம்பு, இதற்கு ஒத்த குவிவு நிகழ்வெண்களால் ஏற்படும் வரிசை ஜோடிகள் (10, 5), (20, 8), (30,, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) ஆகியவற்றை வரைபடத்தாளில் குறித்து, இந்த புள்ளிகளை கைகளினால் இணைக்கவும். நமக்குத் கிடைத்த இந்த வளைவை கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைவு அல்லது ஓஜிவ் என்று அழைப்பர்.



ஓஜிவ் எனும் பிரெஞ்சு வார்த்தையிலிருந்து ஓஜிவ் எனும் சொல் உருவானது. ஓஜி என்பது குழிவளைவாக ஆரம்பித்து குவி வடிவில் சென்று முடியும் ஒரு வடிவம் ஆகும். இது ஏறத்தாழ ஆங்கில எழுத்து S வடிவம் போன்று இருக்கும். 14 மேலும் 15ஆம் நூற்றாண்டின் கட்டிடக்கலையில் கோதிக் வடிவமைப்புகளில் இது ஒரு சிறப்பான வடிவம் ஆகும்.

மீண்டும் குவிவு நிகழ்வெண் பங்கீடு மேலும் ஓஜிவ் (மேலின வளர்நிகழ்வரை) வரைவதைப் பார்ப்போம். இங்கு 0, 10, 20, ..., 90 ஆகிய பிரிவு இடைவெளிகளின் கீழ்வரம்புகள் 0-10, 10-20, ..., 90-100 என்பதை நினைவுபடுத்துவோம். கீழ்வரம்பை X அச்சிலும் இதற்கு ஒத்த மேலின குவிவு நிகழ்வெண்ணை Y அச்சிலும் குறிக்கவும். வசதிக்கேற்ப அளவு திட்டத்தைத் தேர்ந்தெடுத்து, கீழ்வரம்புகள் இதற்கு ஒத்த நிகழ்வெண்களால் ஏற்படும் வரிசை ஜோடிகள் அதாவது (0, 53), (10, 48), (20, (45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8) ஆகியவை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும். இந்த புள்ளிகளை கைகளினால் இணைக்கவும். நமக்கு கிடைத்த இந்த வளைவு மேலின குவிவு நிகழ்வெண் வளைவு அல்லது ஓஜிவ் (மேலின வளர் நிகழ்வரை) என்பர்.

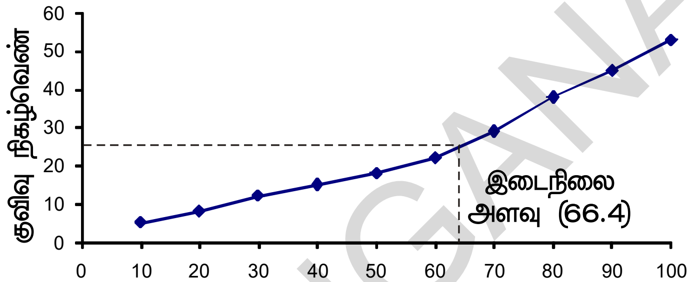


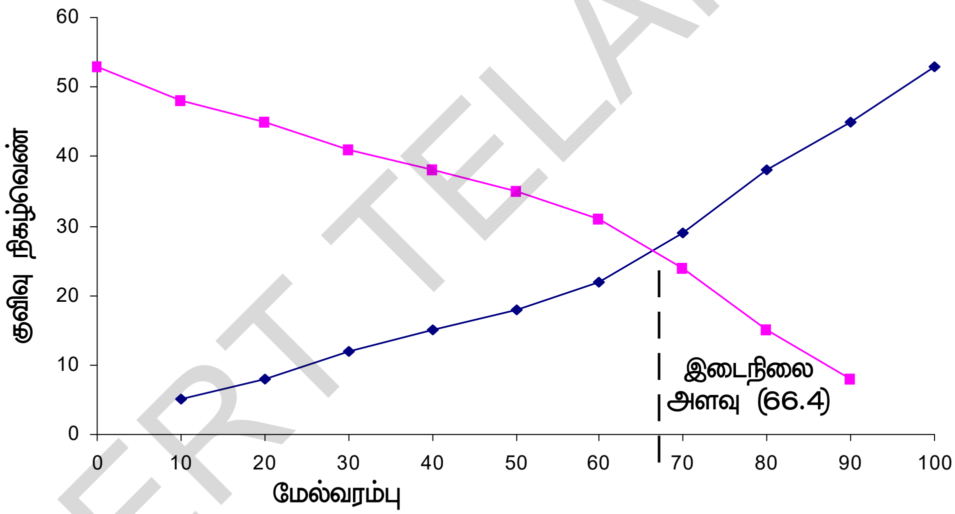
14.6.1 கொடுக்கப்பட்ட வளைவி×ருந்து இடைநிலை அளவைப் பெறுதல்

மேற்கண்ட இரண்டு குவிவு நிகழ்வெண் வளைவுகளிலிருந்தும் இடைநிலை அளவை பெறமுடியும். Yஅச்சின் மீது $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$ ஐ குறிக்கும் புள்ளியைக் குறிக்கவும். இந்த புள்ளியிலிருந்து X அச்சுக்கு ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரைந்தால் அது Xஅச்சை வெட்டும் புள்ளி இடைநிலை அளவைக் குறிக்கும்.

இடைநிலை அளவை பெறும் மற்றொரு முறை :

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் மேலின, கீழின குவிவு நிகழ்வெண் வளைவுகளை வரையவும். இந்த இரண்டும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியிலிருந்து Xஅச்சுக்கு ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரைந்தால் அது Xஅச்சை வெட்டும் புள்ளி இடைநிலை அளவைக் குறிக்கும்.



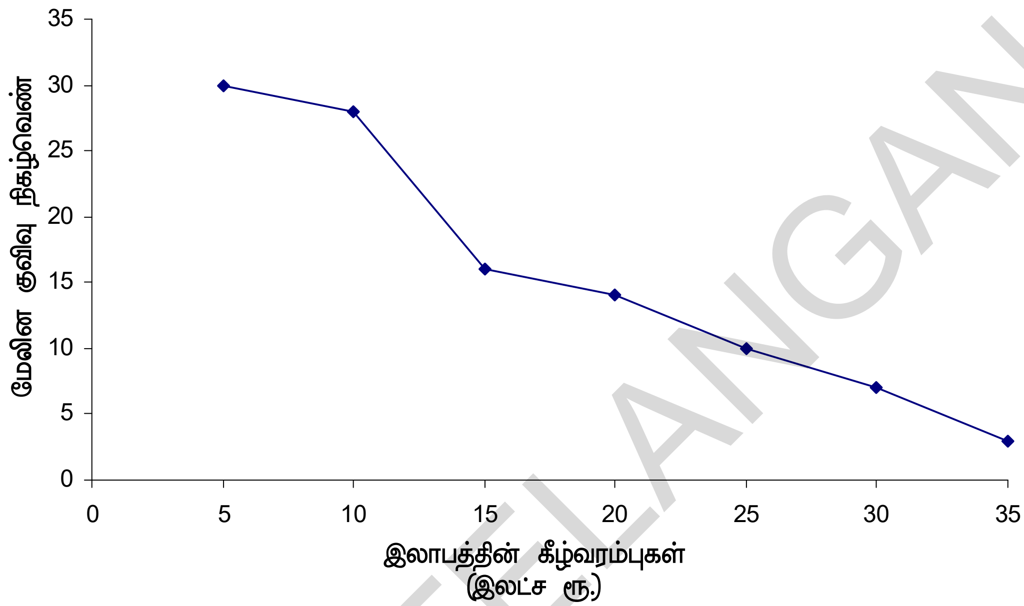


எடுத்துக்காட்டு-9. ஒரு இருப்பிடத்திலுள்ள 30 கடைகளின் வருட இலாபம் கீழே அட்டவணை வடிவில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

இலாபம் (இலட்ச ரூபாய்களில்)	கடைகளின் எண்ணிக்கை நிகழ்வெண்
5 அல்லது அதைவிடஅதிகம்	30
10 அல்லது அதைவிடஅதிகம்	28
15 அல்லது அதைவிடஅதிகம்	16
20 அல்லது அதைவிடஅதிகம்	14
25 அல்லது அதைவிடஅதிகம்	10
30 அல்லது அதைவிடஅதிகம்	7
35 அல்லது அதைவிடஅதிகம்	3

இந்த விவரத்திற்கு இரண்டு ஓஜிவ்களை வரையவும். இதிலிருந்து இலாபத்தின் இடைநிலை அளவைப் பெறவும்.

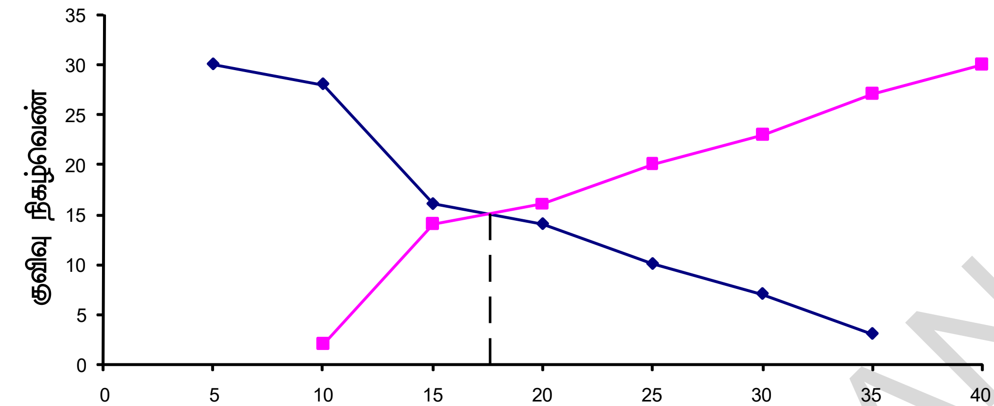
தீர்வு : முதலில் இரண்டு அச்சுதூரங்களை வரைந்து இதில் Xஅச்சின் மீது கீழ்வரம்புகளையும், Yஅச்சின் மீது குவிவு நிகழ்வெண்களையும் குறிக்கவும். இதனால் கிடைக்கும் வரிசை ஜோடிகளை $(5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7)$ மற்றும் $(35, 3)$ கைகளினால் இணைக்கவும். நமக்குக் கிடைத்த மேலின வளர்நிகழ்வரை கீழ்வரும் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.



இப்பொழுது கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையிலிருந்து பிரிவு இடைவெளி, இதற்கு ஒத்த நிகழ்வெண், குவிவு நிகழ்வெண் ஆகியவற்றைப் பெறலாம்.

பிரிவு இடைவெளி	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
கடைகளின் எண்ணிக்கை	2	12	2	4	3	4	3
மேலின குவிவு எண்ணிக்கை	2	14	16	20	23	27	30

மேலுள்ள விவரத்திலிருந்து கிடைக்கும் புள்ளிகள் $(10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30)$ ஆகியவற்றை அதே அச்சின் மீது குறித்து இவற்றை இணைத்தால் நமக்கு கீழின வளர்நிகழ்வெண் கீழ்வரும் படத்தில் உள்ளவாறு கிடைக்கும். இந்த இரண்டு வளைவரைகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி ஏறத்தாழ 17.5ஆக இருக்கும். இதுவே இடைநிலை அளவு ஆகும். இதை சூத்திரத்தை பயன்படுத்தியும் சரிபார்க்கலாம். எனவே இலாபத்தின் இடைநிலை அளவு (இலட்சத்தில்) ₹ 17.5.



வரம்புகள் இலாப இடைநிலை
அளவு 17.5(இலட்சங்களில்)

பயிற்சி - 14.4

1. ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலைசெய்யும் 50தொழிலாளர்களின் தினசரி வருமானம் கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தினசரிவருமானம்(₹களில்)	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	12	14	8	6	10

மேலுள்ள விவரத்திற்கு கீழின குவிவு நிகழ்வெண் பங்கீட்டு அட்டவணையை தயாரித்து ஓஜிவ் வளைவை வரையவும்.

2. ஒரு பள்ளியில் நடைபெற்ற மருத்துவ பரிசோதனையில் ஒரு வகுப்பிலுள்ள 35 மாணவர்களின் எடைகள் கீழுள்ள அட்டவணையில் பதிவு செய்யப்பட்டுள்ளது.

எடை (கி.கி)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
38க்கு குறைவாக	0
40க்கு குறைவாக	3
42க்கு குறைவாக	5
44க்கு குறைவாக	9
46க்கு குறைவாக	14
48க்கு குறைவாக	28
50க்கு குறைவாக	32
52க்கு குறைவாக	35

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கு கீழின வளர் நிகழ்வரையை வரையவும். இதிலிருந்து எடையின் இடைநிலை அளவைக் குறிக்கவும். மேலும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி விடையை சரிபார்க்கவும்.

3. ஒரு கிராமத்திலுள்ள 100 விவசாயிகளின் நிலங்களில் 1ஹெக்டாருக்கு அறுவடை செய்த கோதுமையின் அளவு கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கோதுமை சாகுபடி (குவிண்டால்/ஹெக்டார்)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
விவசாயிகளின் எண்ணிக்கை	2	8	12	24	38	16

மேலுள்ள அட்டவணைக்கு மேலின வகை பங்கீட்டை தயாரிக்கவும் மேலும் இதன் ஓஜிவ் வரையவும்.

செயல்திட்டம்

கூட்டசராசரி, இடைநிலை, முகடு கண்டறிதல்

- அன்றாட நிகழ்ச்சிகளை பயன்படுத்தி கண்டறிதல்
- கிடைக்கக்கூடிய ஆதாரங்களைக் கொண்டு செய்திகளை திரட்டல்
- சேகரித்த தகவல்களைக் கொண்டு சராசரி, இடைநிலை, முகடு கண்டறிதல், வரைபபடத்தில் வரைதல்.

நாம் கற்றவை

1. வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்தின் கூட்டுசராசரி கணக்கிடும் முறை:

   (i) நேர்முறை : $\overline{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

   (ii) ஊகித்த கூட்டு சராசரிமுறை $\overline{x} = a + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

   (iii) படிவிலகல் முறை $\overline{x} = a + \left(\dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

2. வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்தின் முகடு காணும் சூத்திரம்

   முகடு $= l + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

3. வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்தின் இடைநிலை அளவைக் காணும் சூத்திரம்

   இடைநிலை அளவு $= l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

4. இடைநிலை அளவை காண்பதற்கு பிரிவு இடைவெளிகள் தொடர்ச்சியானதாக இருக்கவேண்டும்.
5. குவிவு நிகழ்வெண் பங்கீட்டை வடிவியல் முறையில் குறித்துக்காட்ட குவிவு நிகழ்வெண் வளைவு அல்லது கீழின வளர் நிகழ்வரை, மேலின வளர்நிகழ்வரை பயன்படுகிறது.
6. ஓஜிவ் வளைவை வரையும் போது X-அச்சின் மீது வரம்புகளையும் Y-அச்சின் மீது குவிவு நிகழ்வெண்களையும் எடுத்துக்கொள்வோம்.
7. இரண்டு அச்சுகளின் அளவுத்திட்டங்களும் சமமாக இருக்கத் தேவையில்லை.
8. வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்தின் இரண்டு ஓஜிவ் வளைவுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியிலிருந்து X-அச்சுக்கு ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரைந்தால் அது Xஅச்சை வெட்டும் புள்ளி இடைநிலை அளவை குறிக்கிறது.

பின்இணைப்பு

கணித மாதிரிகள்
(MATHEMATICAL MODELLING)

A.I.1 அறிமுகம்

2013ஆம் ஆண்டு பிப்ரவரி 25ஆம் தேதி ISRO ஆனது PSLV C20ஐ விண்ணில் செலுத்தி SARAL என்ற செயற்கைகோளை கிரகத்தின் சுற்றுப்பாதையில் விட்டது. அந்த செயற்கைகோளின் எடை 407கி.கி. அதன் உயரம் 781கி.மீ மற்றும் அதன் சுற்று பாதையின் சாய்வு கோணம் 98.5^{o} ஆகும்.

மேல் உள்ள தகவல்களை படிக்கும்போது நமக்கு வியப்பாக இருக்கிறது.

(i) விஞ்ஞானிகள் அதன் உயரம் 781கி.மீ என்று எப்படி கணக்கிட்டனர்? அவர்கள் விண்வெளிக்கு சென்று அளந்தார்களா?

(ii) சுற்றுபாதையின் கோணம் 98.5^{o} என அவர்கள் அளக்காமலேயே எப்படி கண்டறிந்தனர்?

விஞ்ஞானிகளும் கணிதமேதைகளும் இந்த முடிவுகளை எவ்வாறு மதிப்பிடுகிறார்கள்? வியக்கத்தக்க மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் நம் அன்றாட வாழ்க்கையில் இருக்கின்றன.

(i) சூரியனின் புறபரப்பின் வெப்பநிலை ஏறத்தாது $6{,}000^{o}C$ ஆகும்.

(ii) ஒரு மனிதனின் இதயம் ஒவ்வொரு நிமிடத்திற்கும் 5லிருந்து 6லிட்டர் இரத்தத்தை அழுத்தம் செய்கிறது.

(iii) சூரியனுக்கும், பூமிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் 1,49,000கி.மீ என நமக்குத் தெரியும்.

மேலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில், நாம் அறிவது என்னவென்றால் யாரும் சூரியனிடம் சென்று அதன் வெப்பநிலையை அளக்கவில்லை (அ) பூமியிலிருந்து சூரியனுக்கு உள்ள தூரத்தை கணக்கிடவில்லை. அல்லது நாம் மனித உடலில் இருந்து இதயத்தை வெளியே எடுத்து அதன் இரத்த அழுத்தத்தை கணக்கிடவில்லை. இது போன்ற கேள்விகளுக்கு இதே வழியில் நாம் பதில் அளிப்பதே கணித மாதிரியாக்கம் என்கிறோம்.

கணித மாதிரிகளை விஞ்ஞானிகள் மட்டும் பயன்படுத்தவில்லை. நாமும் பயன்படுத்துகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக ரூ.100ஐ 10%வட்டிக்கு முதலீடு செய்து ஒரு வருடம் கழித்த பிறகு நமக்கு எவ்வளவு பணம் கிடைக்கும்? (அ) ஒரு அறையை வெள்ளையடிக்க நமக்கு எத்தனை லிட்டர் வண்ணம் தேவைப்படும்? இவ்வாறான கணக்குகளை கணித மாதிரிகள் மூலம் தீர்க்கலாம்.

சிந்தித்து கலந்துரையாடு

நம்மால் நேரிடையாக அளக்க முடியாத மற்றும் கணித மாதிரிகளை பயன்படுத்த கூடிய நம் அன்றாட வாழ்வில் நிகழும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை உன் நண்பர்களுடன் கலந்துரையாடு.

A.I.2 கணித மாதிரிகள்

முக்கோணத்தின் பரப்பளவை கண்டுபிடிப்பதற்கான சூத்திரம் உனக்கு நினைவிருக்கிறதா?

$$\text{முக்கோணத்தின் பரப்பளவு} = \frac{1}{2} \times \text{அடிப்பக்கம்} \times \text{உயரம்}$$

இவ்வாறே தனி வட்டி காணசூத்திரம் $I = \frac{PTR}{100}$. இந்த சூத்திரம் (அ) சமன்பாடு தனிவட்டி (I); அசல் (P); காலம் (T); வட்டிவீதம் (R) ஆகியவற்றிற்கு இடையே தொடர்புடையாதாகும். இந்த சூத்திரங்கள் கணித மாதிரிக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

மேலும் கணித மாதிரிக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $\text{வேகம் (S)} = \frac{\text{தூரம் (d)}}{\text{காலம் (t)}}$

(ii) $\text{கூட்டு வட்டியில் மொத்தம் (A)} = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

இங்கு P = அசல், r = வட்டிவீதம்

n = வட்டி கணக்கிடப்படும் காலங்களின் எண்ணிக்கை

> எனவே, கணித மாதிரி என்பது கணிதத்தின் விளக்கம் (அ) அன்றாட வாழ்க்கை சூழ்நிலைக்கு தொடர்புடையதை விவரிப்பதே ஆகும்.

இதை செய்

நீ முன் வகுப்பில் பயின்ற சில கணித மாதிரிகளை எழுதுக.

A.I.3 கணித மாதிரியாக்கம்

நாம் அன்றாட வாழ்வில் நிறைய சிக்கல்களை சந்திக்கிறோம். அதை தீர்க்க, இதற்கு சமான கணித கணக்குகளாக எழுதி அதற்கான தீர்வை காண்கிறோம். அடுத்து நாம் நமக்கு கிடைத்த தீர்வு, நம் சிக்கல்களுக்கு சரியாக இருக்கிறதா என்று சரிபார்க்கிறோம். இவ்வாறான கணித மாதிரிகளை அமைத்து அதைபயன்படுத்தி விடைகாண்பதே கணிதமாதிரி முறைகள் எனப்படுகிறது.

நாம் மேலும் கணிதமாதிரி முறைகளுக்கு தொடர்பான எடுத்துக்காட்டுகளை பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-1. வாணி, ரூ.19,000 மதிப்புள்ள ஒரு டி.வி. வாங்க நினைத்தாள். ஆனால் அவளிடம் உள்ள தொகை ரூ.15,000. எனவே அவள் அந்த தொகையை 1 வருடத்திற்கு 8% வட்டிவீதம் முதலீடு செய்தாள். எத்தனை வருடங்கள் கழித்து அவள் டி.வி. வாங்க இயலும்?

படி:1 (கணக்கினை புரிந்து கொள்ளுதல்) இந்த நிலையில், நாம் கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை தெரிந்துகொள்கிறோம். வட்டிவீதம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. நாம் எத்தனை வருடங்கள் கழித்து அந்த தொகை ரூ.19,000 ஆகும் என்று கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

படி:2 (கணித விளக்கம் மற்றும் உருவாக்குதல்) இந்த படியில், நாம் கணிதமொழியில் விவரிக்கிறோம். கணக்கிற்கு தேவைபடுகின்ற சமன்பாடு அல்லது சமன்பாடுகளை எழுதிகொண்டு, மேலும் தேவையான விவரங்களை சேகரிக்கிறோம்.

இங்கு நாம் தனி வட்டிக்கான சூத்திரத்தை பயன்படுத்துகிறோம்.

$$I=\frac{PTR}{100}$$ (மாதிரி)

இங்கு P = அசல், T = காலம், R = வட்டிவீதம், I = தனிவட்டி

நாம் காலத்தை கணக்கிட வேண்டும் = $T=\frac{100I}{RP}$

படி–3: (கணித கணக்கை தீர்த்தல்) இந்த படியில், படி2ல் உருவாக்கிய சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி கணக்கினை தீர்க்கிறோம்.

வாணியிடம் ஏற்கனவே ரூ.15,000 உள்ளது. அது அசல் P என்று நமக்குத் தெரியும். கடைசித் தொகை ரூ.19,000 அவளுக்கு தேவையானது

(19000-15000) = ₹4000. இது வட்டி I ல் இருந்து கிடைக்க வேண்டும்.

$$\text{P} = ₹15{,}000,\ \text{Rate} = 8\%,\ \text{ then } \text{I} = 4000;\ \text{T}=\frac{100\times 4\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{150\cancel{0}\cancel{0}\times 8}=\frac{40\cancel{0}}{12\cancel{0}}$$

$$\text{T}=3\frac{4}{12}=3\frac{1}{3}$$ வருடங்கள்

படி–4 : (தீர்வுக்கான விளக்கம்) முன்படியில் கிடைக்கப்பெற்ற தீர்வு இங்கு விளக்கப்படுகிறது.

இங்கு $\text{T} = 3\frac{1}{3}$. இதன் பொருள் 3 மற்றும் ஒரு வருடத்தில் மூன்றில் ஒரு பாகம் (அ) 3 வருடம் 4 மாதங்கள். எனவே வாணி டி.வி.ஐ 3 வருடம் 4 மாதங்கள் கழித்து வாங்கமுடியும்.

படி–5: **(மாதிரியை சரிபார்த்தல்)** கணக்கின் தீர்வு அன்றாட வாழ்கைக்கு எப்பொழுதும் சரியாக இருக்கும் என்று கூறமுடியாது. ஒருவேளை தீர்வு நமக்கு சரியில்லை என்று நினைத்தால் மீண்டும் மீண்டும் நமது மாதிரியை தொடர்ந்து கொண்டே இருக்கலாம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டில் வட்டி வீதம் மாறாது என்று நினைத்துக் கொள்கிறோம். வட்டிவீதம் மாறினால் நம் மாதிரி $\frac{PTR}{100}$ பயன்படாது. டி.வி.யின் விலை ரூ.19,000 மாறாமல் அப்படியே இருக்கும் என்று நினைத்துக்கொள்கிறோம்.

நாம் மற்றொரு எடுத்துக்காட்டை பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு-2. லோக்கேஸ்வரம் உயர்நிலை பள்ளியிலிருந்து 10ஆம் வகுப்பில் உள்ள 50 மாணவர்கள் அவர்கள் கணித ஆசிரியருடன் ஐதராபாத்திற்கு வாகனத்தில் சுற்றுலா செல்ல விரும்பினார்கள். ஒவ்வொரு வாகனத்திலும் ஓட்டுனரை தவிர 6பேர் அமரலாம். வாடகைக்கு எத்தனை வாகனங்கள் தேை=வப்படும்?

படி–1: ஒவ்வொரு வாகனத்திலும் ஓட்டுனரை தவிர 6பேர் அமரலாம் என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. நாம் 51 பேர் செல்ல தேவையான வாகனங்களின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடிக்கவேண்டும்.

படி–2: வாகனங்களின் எண்ணிக்கை = நபர்களின் எண்ணிக்கை / ஒருஜீப்பில் அமரும் நபர்கள்

படி–3: வாகனங்களின் எண்ணிக்கை $= 51/6 = 8.5$

படி–4: விளக்கம்

8.5 வாகனங்கள் தேவை என்பது சாத்தியமல்ல எனவே வாகனங்களின் எண்ணிக்கை அதற்கு அருகில் உள்ள முழுஎண்ணாகிய 9.

∴ தேவையான வாகனங்களின் எண்ணிக்கை 9.

படி–5: மதிப்பிடுதல்

மாதிரியில் நாம் மெலிந்த மற்றும் குண்டாக உள்ள குழந்தைகள் ஒரே இடத்தில் நிரப்புவதாக நினைத்துக்கொள்கிறோம்.

இதை செய்

1. உன்னுடைய பாடபுத்தகத்திலிருந்து ஏதேனும் ஒரு வழி கணக்கை எடுத்துக்கொள், அதை கணித மாதிரியாக கொண்டு அதன் தீர்வு காண்க.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கிற்கு கணித மாதிரியை உண்டாக்கி அதற்கு தீர்வு காண்க.

ஒரு கார் A என்ற இடத்தில் இருந்து 40கி.மீ/ம வேகத்தில் B என்ற இடத்தை நோக்கி பிரயாணிக்கிறது. அதே நேரத்தில் B என்ற இடத்தில் இருந்து Aஐ நோக்கி 30கி.மீ/ம வேகத்தில் மற்றொரு கார் பிரயாணம் செய்கிறது. A மற்றும் B இடைப்பட்ட தூரம் 100கி.மீ எனில் எவ்வளவு நேரம் கழித்து அந்த இரண்டு கார்களும் சந்திக்கும்?

இதுவரை நாம் சுலபமான வழி கணக்குகளுக்கு கணித மாதிரிகளை தயாரித்தோம். நாம் நிஜவாழ்க்கையில் நிகழும் எடுத்துக்காட்டுகளை எடுத்துக்கொண்டு, அதற்கு மாதிரியை தாயர் செய்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு-3. 2000ஆம் ஆண்டு ஐ.நா சபையின் 191 உறுப்பு நாடுகள் சேர்ந்து பாலினத்தின் சமத்துவத்தை மேம்படுத்துவதற்கான அறிக்கையை கையெழுத்திட்டு வெளியிட்டனர். அதில் ஒரு பாகமாக ஆரம்ப மற்றும் உயர்நிலைபள்ளிகளில் சிறுமிகளின் விகிதத்தை அதிகரிக்கவேண்டும் என்று குறிகோளாக கொண்டனர். அந்த உடன்படிக்கையில் இந்தியாவும் கையெழுத்திட்டது. ஆரம்ப பள்ளியில் பதிவு செய்யப்பட்ட சிறுமிகளின் விகித குறிப்பு கீழே உள்ள அட்டவணையில் **A.I.1.**ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை **A.I.1**

வருடம்	பதிவு (%ல்)
1991 – 92	41.9
1992 – 93	42.6
1993 – 94	42.7
1994 – 95	42.9
1995 – 96	43.1
1996 – 97	43.2
1997 -98	43.5
1998 – 99	43.5
1999 – 2000	43.6
2000 – 01	43.7
2001 - 02	44.1

மேலுள்ள அட்டவணையில் இருந்து சிறுமிகளின் வரம்பு எந்த விகிதத்தில் அதிகரிக்கிறது என்று விவரி. மேலும் எந்த வருடத்தில் சிறுமிகளின் பதிவு 50% தொடும் என்று மதிப்பிடுக.

தீர்வு :

படி-1: உருவாக்குதல் : நாம் முதலில் இந்த கணக்கை கணிதவியல் கணக்காக மாற்றிக்கொள்வோம். பட்டியல் நமக்கு 1991 – 92, 1992- 93 ஆண்டுகளில் இருந்த பதிவு A.I.1சதவீதத்தை தெரிவிக்கிறது. இதில் நாம் 1991, 1992களை கல்வி ஆண்டாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். பட்டியல் A.I.1.ல் உள்ளபடி ஆரம்ப பாடசாலையில் சிறுமிகளின் பதிவு சதவீதம் ஒரே விதத்தில் அதிகரிக்கிறது என்று நினைத்து கொள்ளலாம். எனவே நமக்கு எத்தனை வருடங்கள் என்பது முக்கியம். குறிப்பிட்ட வருடம் அல்ல (இதைபோல் சூழ்நிலைக்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டை பார்ப்போம். ரூ.15,000ஐ 8% வட்டிவீதம் 3 வருடத்திற்கு தனிவட்டிக்கு கொடுத்தால், தனிவட்டி காணும் போது அந்த 3 வருடம் என்பது 1999-2000 (அ) 2001-2004 என்பது தேவையற்றது. இங்கு வட்டிவீதம், எத்தனை வருடத்திற்கு வட்டிக்கு கொடுக்கிறோம் என்பதே முக்கியம்)

இவ்வாறே இந்த கணக்கிலும் 1991ஆம் வருடத்துடன் ஒப்பிட்டால் மீதமுள்ள ஆண்டுகளில் பதிவுநிலை எவ்வாறு உயர்ந்தது என்று பார்க்க வேண்டும். இதற்கு நாம் 1991ஆண்டை 0 ஆண்டாகவும் 1992 ஐ 1 ஆகவும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஏனென்றால் 1991 அடுத்த 1 வருடம் கழித்து அதேப்போல் 1993 ஆண்டை 3 ஆகவும் 1994ஐ 4ஆகவும் எடுத்துக்கொள்ளலாம். அப்போது அட்டவணை கீழே காட்டியவாறு மாறுகிறது.

அட்டவணை A.I.2

வருடம்	பதிவு (%ல்)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

ஒவ்வொரு வருடத்திலும் பதிவு சதவீதம் எவ்வளவு உயர்ந்தது என்பதை கீழே உள்ள அட்டவணையில் A.I.3 கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை A.I.3

வருடம்	பதிவு (%ல்)	உயர்வு
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991-1992ஆம் ஆண்டின் முதல் வருடத்தின் மத்தியில் பதிவு 41.9% லிருந்து 42.6% ஆக உயர்ந்துள்ளது. அதாவது 0.7% உயர்ந்துள்ளது. இரண்டாம் வருட கடைசியில் 42.6% லிருந்து 42.7%. அதாவது 0.1% உயர்ந்துள்ளது. மேலுள்ள அட்டவணையின் படி வருடங்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் சதவீதத்திற்கும் இடையே எந்தஒரு தொடர்பையும் விவரிக்க முடியாது. உயர்வு என்பது முதல் கடைசி வருடங்கள் தவிர மீதமுள்ள வருடங்களில் நிலையானதாக உள்ளது. இந்த மதிப்புகளின் சராசரியை நாம் பார்க்கலாம்.

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10}=0.22 \quad .... (1)$$

இந்த பதிவுகளின் நிலையான உயர்வு சராசரியாக 0.22% உயர்ந்துள்ளது என கொள்வோம்.

படி-2: (கணித விளக்கம்) ஒவ்வொரு வருடமும் பதிவுகளின் நிலையான உயர்வு சராசரியாக 0.22% என எடுத்துக்கொள்வோம்.

எனவே முதல் வருடத்தின் பதிவுகளின் சதவீதம் (EP) $= 41.9 + 0.22$

இரண்டாம் வருடத்தின் பதிவுகளின் சராசரி $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

மூன்றாம் வருடத்தின் பதிவுகளின் சராசரி $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

எனவே, nவது வருடத்தின் பதிவுகளின் சராசரி $= 41.9 + 0.22n, \quad n \geq 1. \quad .... (2)$

மேலுள்ளவற்றில் நாம் 50% பதிவு எத்தனை வருடத்தில் அடைவோம் என்று கண்டுக்கொள்ளவேண்டும். எனவே சமன்பாட்டில் உள்ள n ன் மதிப்பை கண்டுக்கொள்ளவேண்டும்.

$$50 = 41.9 + 0.22n$$

படி-3: தீர்வு : n மதிப்பிற்கான தீர்வை காணும்போது நமக்கு

$$n = \frac{50-41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

படி-4: விளக்கம் : ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை தசம மதிப்பில் உள்ளதால் நாம் அதற்கு அடுத்த மதிப்பான 37ஐ எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். எனவே 50%ஐ $1991 + 37 = 2028$ல் அடையமுடியும்.

படி-5: (மதிப்பிடுதல்) நாம் அன்றாட வாழ்வில் நிகழும் கணக்கை தீர்க்கிறோம், எனவே இந்த மதிப்பு இந்த கணக்கிற்கு எந்த அளவிற்கு ஒத்துபோகிறது என்பதை பார்க்கலாம்.

படி2ல் கிடைத்த தீர்வை உண்மை எனக் கொள்வோம். மதிப்பு சூத்திரம் (2)க்கிறான மதிப்புடன் ஒப்பிடலாம். இந்த மதிப்பை அட்டவணை A.I.4.ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்போடு, படி2ல் கிடைத்த மதிப்பை ஒப்பிடலாம். இந்த மதிப்புகள் கீழே அட்டவணை **A.I.4**ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை A.I.4

வருடங்கள்	பதிவு (%)	படி(2)ல் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் (%)	வேறுபாடு (%)ல்
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	-0.06
9	43.7	43.88	-0.18
10	44.1	44.10	0.00

மேலுள்ள அட்டவணையின் அடிப்படையாக உண்மை மதிப்புகளைவிட படி(2)ல் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் 0.3% (அ) 0.5%விட குறைவாக உள்ளதை நாம் கவனிக்கலாம். இதனால் ஏற்படும் சிக்கல் என்னவென்றால் நமக்கு தேவையான வருடங்களின் எண்ணிக்கை 3லிருந்து 5 வருடத்திற்கான வேறுப்பாட்டை கொடுக்கிறது. உண்மை உயர்வு 1% லிருந்து 2% வரை மட்டுமே உள்ளது. இந்த வேறுபாட்டை நாம் ஏற்றுக்கொண்டால் படி(2)ல் கிடைத்ததே நமக்கு தேவையான கணித மாதிரி ஆகும். அவ்வாறில்லாமல் இந்த வேறுபாட்டை இன்றும் குறைக்க நினைத்தால் இந்த மாதிரியை மீண்டும் மேம்படுத்த வேண்டும். நாம் திரும்பவும் படி2க்குச் சென்று அந்த சமன்பாட்டை மாற்ற வேண்டும். நாம் இதை செய்யலாம்.

படி-1: (புதிய சூத்திரம்) : பதிவு செய்த மதிப்புகள் 0.22% நிலையானது என நினைத்துக் கொள்வோம். ஆனால் இங்கு நாம் பிழையை குறைப்பதற்கு அதை திருத்துவதற்கான காரணியை அறிமுகம் செய்வோம். இந்த பிழைகளின் சராசரியை கண்டுபிடிப்போம் அவை,

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10}=0.18$$

இந்த வேறுபாட்டின் சராசரியின் உதவியோடு மீண்டும் நம்முடைய சூத்திரத்தை சரிபடுத்திக்கொள்ளலாம் அல்லது மேம்படுத்தலாம்.

படி(2)ல் கிடைத்த அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் நமக்கு கிடைத்த சராசரியை கூட்டினால், பின்வரும் சரியான சூத்திரம் கிடைக்கிறது.

nவது வருடத்திற்கான பதிவு சதவீதம்

$$= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n,\ n \geq 1 \quad ...\ (3)$$

முதலில் கிடைத்த சமன்பாடு (2) இவ்வாறு கிடைக்கிறது?

$$50 = 42.08 + 0.22n \quad ...\ (4)$$

மாற்றியமைத்த தீர்வு : n ற்கான சமன்பாடு (4)ஐ தீர்க்கும் போது நமக்கு கிடைப்பது

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

விளக்கம் : n = 36 என்பதால் ஆரம்ப பள்ளியில் உள்ள சிறுமிகளின் பதிவு 1991 + 36 = 2027 ஆம் வருடத்தில் 50%த்தை அடையும்.

சரிபார்த்தல் : நாம் மீண்டும் ஒருமுறை உண்மையான மதிப்புடன் சமன்பாடு (4) மூலம் கிடைக்கும் மதிப்போடு ஒப்பிடலாம். அட்டவணை A.I.5 கிடைக்கிறது.

Table A.I.5

வருடம்	பதிவு(%ல்)	சமன்பாடு(2)ன் மூலம் கிடைத்த மதிப்புகள்	மதிப்புகளின் வேறுபாடு	சமன்பாடு கொடுக்கப் பட்டமதிப்புகள்	மதிப்புகளின் வேறுபாடுகள்
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.20	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	-0.12
8	43.6	43.66	-0.06	43.84	-0.24
9	43.7	43.88	-0.18	44.06	-0.36
10	44.1	44.10	0.00	44.28	-0.18

அட்டவணையை கவனிக்கும்போது (2)ஆல் கிடைக்கபெற்ற மதிப்புகளைவிட (4)ஆல் கிடைக்கபெற்ற மதிப்புகள் உண்மையான மதிப்புகளுக்கு அருகில் இருப்பதை அறியலாம். இங்கு வேறுபாட்டின் சராசரி 0எனக் கூறலாம்.

A.I.4 கணித மாதிரியின் நன்மைகள்

1. கணித மாதிரிகளின் முக்கிய நோக்கம் நிஜ வாழ்க்கையின் பிரச்சனைகளை கணித பிரச்சனையாக மாற்றி அதிலிருந்து பயனுள்ள தகவல்களை அறிவதே ஆகும். நேரடி கண்காணிப்பு மூலமாகவோ (அ) சோதனைகள் மூலமாகவோ அதிகமாக செலவாகும் போது செய்திகளை சேகரிப்பது கடினமாக இருக்கும் போது இது மிகவும் பயன்உடையதாகும். எடுத்துக்காட்டாக நாம் தாஜ்மகாலின் மேல் மதுரா எண்ணையினால் உண்டான அரிப்பின் விளைவுகளைப் பற்றி அறியவேண்டுமானால் நம்முடைய சோதனையை நேரடியாக தாஜ்மகாலின் மீது உபயோகிக்க முடியாது. ஏனெனில் அது மிகஅற்புதமான நினைவுசின்னத்தை சேதப்படுத்தும் வாய்ப்பு உள்ளது. இவ்வாறான சூழ்நிலைகளில் கணித மாதிரிமுறையை பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம்.
2. பல வகைப்பட்ட நிறுவனங்கள், துறைகள் முன்கணிப்பு திட்டத்துடன் வேலையை செய்யும். ஏனினல் எதிர்காலத்தில் நிகழும் நிகழ்வுகளுக்கான முன்கணிப்பு செய்து கொள்வது அவசியமாகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக :

(i) விற்பனை துறையில் எந்ததெந்த பொருளுக்கு அதிக தேவை இருக்கும் என்று முன்கணிப்பு செய்து கொண்டு விற்பனையை அதிகரிப்பார்கள்.

(ii) மாவட்டங்களில் பள்ளிகளில் மாணவர்களின் பதிவுகளின் சதவீதத்தை அதிகரிக்க, எந்த பகுதியில் பள்ளி செல்லும் வயதுள்ள மாணவர்கள் அதிகமாக இருக்கிறார்கள் என்று முன்னதாகவே கணித்து அந்த பகுதியில் புதிய பள்ளிகள் துவங்குவதற்கான திட்டத்தை கல்விதுறை முடிவுசெய்யும்.

3. காட்டில் உள்ள மரங்களின் எண்ணிக்கை, ஏரியில் உள்ள மீன்களின் எண்ணிக்கை, போன்ற பல சூழ்நிலைகளில் நாம் மதிப்பீடு செய்து கொண்டிருக்கிறோம்.

கணித மாதிரிகளுக்கான மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்ப்பபோம்.

(i) எதிர்காலத்தில் சில வருடங்களுக்கு பின் இருக்கும் ஜனத்தொகையின் மதிப்பீடு.

(ii) சேரபோகும் பருவநிலை குறித்து முன்கணிப்பு .

(iii) எதிர்காலத்தில் வரபோகும் வருடங்களில் இருக்கும் எழுத்தறிவு விகிதம்.

(iv) மரத்தில் உள்ள இலைகளின் எண்ணிக்கை மதிப்பிடுதல்.

(v) கடலின் ஆழத்தை கண்டுபிடித்தல்.

A.I.5 கணித மாதிரிகளின் எல்லைகள்

எல்லா கணக்குகளுக்கும் கணித மாதிரிகள் ஒரு தீர்வாகுமா? நிச்சயமாக இல்லை. அதற்கும் எல்லைகள் உண்டு. ஆகவே இதை நிஜவாழ்கையில் பிரச்சனைகளின் சுருக்கமே ஆகும் என்பதை நினைவில் கொள்ளவேண்டும். இரண்டும் ஒன்றாகாது, அதாவது ஒரு நாட்டிற்கு சம்பந்தப்பட்ட ஒரு படத்திற்கு உண்மையான நாட்டிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் எவ்வாறு இருக்குமோ அவ்வாற இருக்கும். இந்த படத்தின் உதவியுடன் ஒரு இடம் கடல் மட்டத்தில் இருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளது என்று கண்டறியலாம் ஆனால் அங்கு வாழும் மக்களின் இயல்புகளை கண்டறிய இயலாது. எனவே எங்கு கணித மாதிரிகள் தேவைப்படுதோ அங்கு மட்டுமே பயன்படுத்த முடியும். மற்றவற்றை நாம் புறக்கணிக்க வேண்டும். எனவே கணித மாதிரியை தேவைப்படும்போது எல்லைக்குள் பயன்படுத்தவேண்டும்.

A.I.6 நாம் நமது மாதிரியை எந்த அளவிற்கு மேம்படுத்த முடியும்?

ஒரு மாதிரியை மேம்படுத்த வேண்டும் எனில் நாம் கூடுதலாக பல அம்சங்களை கணக்கிடவேண்டும். நாம் செய்யும்போது கணித சமன்பாட்டிற்கு அதிகமான மாறிகளை சேர்க்கிறோம். பின்பு சமன்பாடுகள் சிக்கலாகிவிடும். மாதிரிகளை பயன்படுத்துவது கடினமாகிவிடும். ஒரு மாதிரி மிகவும் சுலபமாக இருந்தால்தான் மிக துல்லியமாக கணக்கிடமுடியும். ஒரு நல்ல மாதிரி என்பது உண்மைக்கு மிக அருகில் உள்ள ஒன்றாகும்.

இதை செய்

13ஆம் நூற்றாண்டின் லியோனார்டோ ப்பிபோநாசி சம்மந்தப்பட்ட கணக்கு இது. அவர் கேட்ட கேள்வியானது இரண்டு முயல்களை கொண்டு இனபெருக்கம் செய்யும் போது ஒரு வருடத்தில் எத்தனை முயல்கள் கிடைக்கும். ஒரு முயல்களின் ஜோடி ஒவ்வொரு மாதத்தின் கடைசியில் மற்றொரு முயல்களின் ஜோடி இனபெருக்கம் செய்தால், மறுபடியும் இந்த ஜோடியானது இரண்டு மாதத்தில் மற்றொரு ஜோடியை உருவாக்குகிறது என நினைத்து கொள்வோம். ஒவ்வொரு மாதமும் இந்த ஜோடியின் எண்ணிக்கை என்பது முதல் 2 மாதத்தை தவிர மீதமுள்ள மாதங்களின் அவற்றின் முன்உள்ள 2 மாதங்களில் உள்ள முயல்களின் ஜோயின் எண்ணிக்கைக்கு சமம்.

கீழ் உள்ள அட்டவணை ஒவ்வொரு மாதமும் முயலின் எண்ணிக்கை உயர்வதை காட்டுகிறது.

மாதம்	முயல்களின் ஜோடி
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

ஒருவருடம் கழித்து நமக்கு 233ஜோடி முயல்கள் கிடைக்கும். 16 மாதங்கள் கழித்து நமக்கு கிட்டதட்ட 1600 ஜோடி முயல்கள் கிடைக்கும்.

கணித மாதிரியை பயன்படுத்தி மேலுள்ள கணக்கின் வெவ்வேறு நிலைகளை விளக்குக.

மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு-4. (ஒரு ஜோடி பகடையை உருட்டுதல்) தீபா மற்றும் ஆகாஷ் பகடைகளை வைத்து விளையாடிக்கொண்டிருக்கிறார்கள். ஆகாஷ் தீபாவிடம் பகடைகளை உருட்டும் போது கிடைக்கும் எண்களின் மொத்தத்தையும் முன்பே ஊகித்து கூறினால் ஒவ்வொரு விடைக்கும் பரிசு தருவதாக கூறினான். எண்கள் மொத்தம் எவ்வளவு என்று சொன்னால் தீபாவிற்கு பரிசு கிடைக்கும் வாய்ப்பு அதிகமாக கிடைக்கும்.

தீர்வு :

படி-1: (கணக்கினை புரிந்து கொள்ளுதல்) பகடைகளை உருட்டும்போது எந்த எண்கள் அதிகமாக விழும் வாய்ப்பு இருக்கும் என்று தெரிந்துகொள்ள வேண்டும்.

படி-2: (கணித விளக்கம்) இரண்டு பகடைகளை உருட்டும் போது அவற்றின் முகப்பில் எந்தெந்த எண்கள் இருக்கமுடியும் என்று முன்பே ஊகித்தால் இந்த கணக்கிற்கு சுலபமான மாதிரியை தயாரிக்கலாம். இரண்டு பகடைகளை உருட்டும் போது நமக்கு 36ஜோடி எண்கள் கிடைக்கிறது.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ஒவ்வொரு ஜோடியிலும் உள்ள முதல் எண், முதல் பகடையின் முகஎண்ணையும் இரண்டாம் எண் இரண்டாவது பகடையின் முகஎண்ணையும் குறிக்கிறது.

படி-3: (கணித கணக்கினை தீர்த்தல்) ஒவ்வொரு ஜோடியில் உள்ள எண்களை கூட்டும்போது கிடைக்கும் மொத்தம் 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 மற்றும் 12. இந்த 36 ஜோடிகளில் ஏதேனும் ஒன்று நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவை காணவேண்டும். இந்த நிகழ்தகவு பின்வரும் அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

மொத்தம்	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
நிகழ்தகவு	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

அட்டவணையில் இருந்து, மொத்தம் 7 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$. இது மற்ற எண்களின் மொத்தம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு விட பெரியது.

படி-4 (தீர்வுக்கான விளக்கம்) மொத்தம் 7 வருவதற்கான நிகழ்தகவு அதிகமாக உள்ளதால் எண்களின் மொத்தம் 7 என்று அதிகமுறை கூறுவதின் மூலம் தீபா பரிசு பெறும் வாய்ப்பு அதிகம் உள்ளது.

படி-5: (மாதிரியை சரிபார்த்தல்) பகடைகளை அதிகமுறை உருட்டும்போது அதற்கான நிகழ்வெண் அட்டவணையை தயார் செய்யவேண்டும். இந்த நிகழ்வெண்களை ஒத்த நிகழ்தகவுடன் ஒப்பிடவேண்டும். இவை ஒன்றாக இல்லை எனில் பகடைகள் ஒருதலைபட்சமாக உள்ளது என்று பொருள். முயன்றுபார் ல் உள்ள கணக்கை தீர்ப்பதற்கு முன் நாம் தெரிந்துகொள்ள வேண்டியவை.

நமக்கு பணம் தேவையானபோது நம்மிடம் இருக்காது என்பது பல மனிதர்களுக்கு பொதுவாக நிகழும் அனுபவம். அது அன்றாட வாழ்கைக்கு தேவையான பொருட்களை வாங்க போதுமான பணமோ (அ) வசதியாக வாழ்வதற்கு தேவையான பொருட்களை வாங்குவதற்கான பணமாகவோ இருக்கலாம். வாடிக்கையாளர்கள் தங்களிடம் உள்ள சிறிய தொகையை கொண்டு இருசக்கர வண்டி, பிரிட்ஜி, டி.வி, கார் ஆகியவற்றை தவணை முறையில் வாங்க வியாபாரிகள் இத்திட்டத்தை அறிமுகபடுத்தினர்.

சிலநேரங்களில் வியாபாரிகள் பொருட்களை அதிகமாக விற்பனை செய்வதற்கு இந்த முறையில் வாங்க வாடிக்கையாளர்களுக்கு அறிமுகபடுத்தினார்கள். இந்த தவணை முறைத் திட்டத்தின் மூலம் ஒரு பொருளை வாங்கும் போது மொத்த தொகையை செலுத்தவேண்டிய அவசியம் இல்லை. அவன்/அவள் ஒரு சிறு தொகையை பொருளை வாங்கும் போது செலுத்தி பின் மீதமுள்ள தொகையை மாதமாதமோ, காலாண்டு, அரையாண்டு (அ) வருடத்திற்கு ஒருமுறையோ தவணை முறையில் செலுத்தலாம். இந்த தவணைமுறை திட்டத்தால் வாடிக்கையாளர் அந்த பொருளுக்கான தொகையுடன் வட்டியும் செலுத்தவேண்டி வரும் (பின் செலுத்தும் பணம்). இந்த கருத்திற்காக அடிக்கடி உபயோகிக்கும் வார்த்தைகள் உனக்கு நன்றாக அறிமுகமானதாக இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, ரொக்க பணம் என்பது ஒரு வாடிக்கையாளர் ஒரு பொருளை வாங்கும்போது அதற்கான பணத்தை ரொக்கமாக (முழுவதுமாக) செலுத்துவது. தவணை முறை என்பது ஒரு பொருளை வாங்கும்போது சிறிது பணம் செலுத்தி வாங்குவது.

கீழ் உள்ள கணக்கை கணித மாதிரியை பயன்படுத்தி தீர்க்க.

இதை செய்

ரவி ஒரு சைக்கிள் வாங்க விரும்பினான். அவன் மார்கெட் சென்று விலையை விசாரித்தபோது அதன் விலை ₹2,400 என இருந்தது. அவனிடமோ ₹1,400 மட்டும் இருந்தது. கடைக்காரர் அவனுக்கு உதவி செய்ய விரும்பினார். அவனிடம் இருக்கும் ₹1400 ஐ கட்டி மாத தவணையாக ₹550 கட்ட சொன்னார். ரவி கடைகாரரின் சலுகையையோ (அ) வங்கிக்கு சென்று ஒரு வருடத்திற்கு 12% வட்டிவீதம் கடனாகவோ வாங்க வேண்டும். இந்த 2 வாய்ப்பில் எது சிறந்தது என்று ரவிக்கு உதவுங்கள்.

விடைகள்

பயிற்சி - 1.1

1. (i) 90 (ii) 196 (iii) 127

   (iv) முடிவுறு (v) முடிவுறா

பயிற்சி - 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$

   (iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i) மீ.பொ.ம = 420, மீ.பொ.க = 3 (ii) மீ.பொ.ம = 11339, மீ.பொ.க = 1

   (iii) மீ.பொ.ம = 1800, மீ.பொ.க = 1 (iv) மீ.பொ.ம = 216, மீ.பொ.க = 36

   (v) மீ.பொ.ம = 22338, மீ.பொ.க = 9 6. 6

பயிற்சி - 1.3

1. (i) 0.375 (முடிவுறு) (ii) 0.5725 (முடிவுறு) (iii) 4.2 (முடிவுறு)

   (iv) $0.\overline{18}$ (முடிவுறா, சுழல்) (v) 0.064 (முடிவுறு)

2. (i) முடிவுறு (ii) முடிவுறா, சுழல்

   (iii) முடிவுறா, சுழல் (iv) முடிவுறு

   (v) முடிவுறா, சுழல் (vi) முடிவுறு (vii) முடிவுறா, சுழல்

   (viii) முடிவுறு (ix) முடிவுறு (x) முடிவுறு, சுழல்

3. (i) 0.52 (ii) 0.9375 (iii) 0.115 (iv) 32.08 (v) 1.3

4. (i) விகிதமுறு qன் பகாக் காரணிகள் 2(அ)5(அ) இரண்டையும் கொண்டதாக இருக்கும். (ii) விகிதமுறு அல்ல

   (iii) விகிதமுறு qன் பகாக்காரணிகள் 2(அ)5ஐ மற்றவற்றை காரணிகளாக கொண்டிருக்கும்.

பயிற்சி - 1.5

1. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) -4 (iv) 0

   (v) $\frac{1}{2}$ (vi) 9 (vii) -2 (viii) 3

2. (i) $\log 10, 1$ (ii) $\log_2 8, 3$ (iii) $\log_{64} 64, 1$ (iv) $\log\left(\frac{9}{8}\right)$

   (v) $\log 45$

3. (i) $x+y$ (ii) $x+y-1$ (iii) $x+y+2$ (iv) $3x+3y+1$

4. (i) $4\log 10$ (ii) $7\log 2 - 4\log 5$ (iii) $2\log x + 3\log y + 4\log z$

   (iv) $2\log p + 3\log q - \log r$ (v) $\frac{3}{2}\log x - \log y$

6. 7

7. $\frac{1}{3}$

8. $\dfrac{\log\left(\frac{3}{2}\right)}{\log 6}$

பயிற்சி - 2.1

1. (i) கணம் (ii) கணம் அல்ல (iii) கணம் அல்ல

   (iv) கணம் (v) கணம்

2. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (iv) $\notin$

   (v) $\in$ (vi) $\in$

3. (i) $x \notin A$ (ii) $B = \{d\}$ (iii) $1 \in N$ (iv) $8 \notin P$

4. (i) தவறு (ii) தவறு (iii) சரி (iv) தவறு

5. (i) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $C = \{17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80\}$

(iii) $D = \{2,3,5\}$

(iv) $E = \{B, E, T, R\}$

6. (i) $A = \{x : x$ என்பது 3ன் மடங்கிகள் மேலும் 13ஐ விட குறைவு $\}$

(ii) $B = \{x : x = 2^a,\ a \in N, a < 6\}$

(iii) $C = \{x : x = 5^a,\ a \in N, a < 5\}$

(iv) $D = \{x : x$ என்பது வர்க்க எண் மேலும் $x \leq 10, x \in N\}$

7. (i) $A = \{51, 52, 53, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, 98, 99\}$

(ii) $B = \{+2, -2\}$

(iii) $D = \{L,O,Y,A\}$

8. (i) (c)

(ii) (a)

(iii) (d)

(iv) (b)

பயிற்சி - 2.2

1. ஆம், $A \cap B$ மேலும் $B \cap B$ ஒன்றே

2. $A \cap \phi = \phi$

$A \cap A = A$

3. $A - B = \{2, 4, 8, 10\}$

$B - A = \{3, 9, 12, 15\}$

4. $A \cup B = B$

5. $A \cap B = \{$இரட்டை இயல் எண்கள்$\}$

$\{2, 4, 6, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

$A \cap C = \{$ஒற்றை இயல் எண்கள்$\}$

$A \cap D = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 100\}$

$B \cap C = \phi$

$B \cap D = \{$இரட்டை இயல் எண்கள்$\}$

$C \cap D = \{3,5,7, 11, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

6. (i) A – B = {3, 6, 9, 15, 18, 21}
   (ii) A – C = {3, 9, 15, 18, 21}
   (iii) A – D = {3, 6, 9, 12, 18, 21}
   (iv) B – A = {4, 8, 16, 20}
   (v) C – A = {2, 4, 8, 10, 14, 16}
   (vi) D – A = {5, 10, 20}
   (vii) B – C = {20}
   (viii) B – D = {4, 8, 12, 16}
   (ix) C – B = {2, 6, 10, 14}
   (x) D – B = {5, 10, 15}

7. (i) தவறு, ஏனெனில் அவை 3 எனும் பொது உறுப்பை பெற்றுள்ளன.
   (ii) தவறு,ஏனெனில் இரண்டு கணங்களும் a எனும் பொது உறுப்பை பெற்றுள்ளன.
   (iii) சரி, ஏனெனில் அக்கணங்களுக்கு பொதுஉறுப்பு இல்லை.
   (iv) சரி, ஏனெனில் அக்கணங்களுக்கு பொதுஉறுப்பு இல்லை.

பயிற்சி - 2.3

1. ஆம், சம கணங்கள்

2. (i) சமம் (ii) சமமல்ல (iii) சமம் (iv) சமமல்ல
   (v) சமமல்ல (vi) சமமல்ல (vii) சமமல்ல

3. (i) A = B (ii) A ≠ B (iii) A ≠ B (iv) A ≠ B

4. (i) (i) {1, 2, 3, ... 10} ≠ {2, 3, 4, ... 9}
   (ii) $x = 2x + 1$ அதாவது x ஒற்றை
   (iii) x என்பது 15ன் மடங்கு எனவே 5 உறுப்பாக இருக்காது.
   (iv) x என்பது பகா எண் ஆனால் 9 என்பது பகா எண் அல்ல

5. (i) $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \phi$
   (ii) $\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}, \{x, y, z\}, \phi$
   (iii) $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}$, $\{b$, c, $d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d)$
   (iv) ϕ, {1}, {4}, {9}, {16}, {1, 4}, {1, 9}, {1, 16}, {4, 9}, {4, 16}, {9, 16}, {1, 4, 9}, {1, 9, 16}, {4, 9, 16}, {1, 4, 16}, {1, 4, 9, 14)
   (v) ϕ, {10}, {100}, {1000}, {10, 100}, {100, 1000}, {10, 1000}, {10, 100, 1000}

பயிற்சி - 2.4

1. (i) வெற்றல்ல (ii) வெற்று (iii) வெற்று

   (iv) வெற்று (v) வெற்றல்ல

2. (i) முடிவுறு (ii) முடிவுறு (iii)

3. (i) முடிவுறு (ii) முடிவுறா (iii)

பயிற்சி - 3.1

1. (a) (i) -6 (ii) 7 (iii)

2. (i) தவறு ($\sqrt{2}$, x^2 ன் கெழு படி அல்ல)

   (ii) தவறு (x^2 ன் குணம் -4)

   (iii) சரி (எந்த மாறிலி உறுப்பிற்கும் படி பூஜ்ஜியம்)

   (iv) தவறு (இது பல்லுறுப்பு கோவையே அல்ல)

   (v) தவறு (பல்லுறுப்பு கோவையின் படி உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை சார்ந்ததல்ல)

3. $p(1) = 0$, $p(-1) = -2$, $p(0) = -1$, $p(2) = 7$, $p(-2) = -9$

4. ஆம், -2 மேலும் -2 பல்லுறுப்புகோவை x^4-16ன் பூஜ்ஜியங்கள்

5. ஆம், 3 மேலும் -2 பல்லுறுப்புகோவை $x^2 - x - 6$ ன் பூஜ்ஜியங்கள்

பயிற்சி - 3.2

1. (i) பூஜ்ஜியங்கள் இல்லை (ii) 1 (iii) 3

   (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

2. (i) 0 (ii) $-2, -3$ (iii) $-2, -3$ (iv) $-2, 2, \pm\sqrt{-4}$

3. (i) $4, -3$ (ii) 3, 3 (iii) பூஜ்ஜியங்கள் இல்லை

   (iv) $-4, 1$ (v) $-1, 1$

4. $p\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ மேலும் $p(-1) = 0$

பயிற்சி - 3.3

1. (i) $4, -2$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}, \frac{-1}{3}$

   (iv) $0, -2$ (v) $\sqrt{15}, -\sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$
(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

3. (i) $x^2 - x - 2$ (ii) $x^2 - 3$ (iii) $4x^2 + 3x - 1$
(iv) $4x^2 - 8x + 3$

4. $-1, +1$ மற்றும் 3 ஆகியவை கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களாகும்.

பயிற்சி - 3.4

1. (i) ஈவு $= x - 3$ மேலும் மீதி $= 7x - 9$
(ii) ஈவு $= x^2 + x - 3$ மேலும் மீதி $= 8$
(iii) ஈவு $= -x^2 - 2$ மேலும் மீதி $= -5x + 10$

2. (i) ஆம் (ii) ஆம் (iii) இல்லை

3. $-1, -1$

4. $g(x) = x^2 - x + 1$

5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14$, $g(x) = 2$, $q(x) = x^2 - x + 7$, $r(x) = 0$
(ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 1$, $r(x) = 2x + 2$
(iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 2$, $r(x) = 4$

பயிற்சி - 4.1

1. (a) புள்ளியில் வெட்டுகிறது
(b) ஒன்றும் கோடுகள்
(c) இணை கோடுகள்

2. (a) இசைந்த (b) ஒவ்வா (c) இசைந்த
(d) இசைந்த (e) இசைந்த (f) இசைந்த
(g) ஒவ்வா (h) இசைந்த (i) ஒவ்வா

3. பேன்ட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= 1$; சட்டைகளின் எண்ணிக்கை $= 0$

4. சிறுமிகளின் எண்ணிக்கை $= 7$; சிறுவர்களின் எண்ணிக்கை $= 3$

5. பென்சிலின் விலை = ₹ 3; பேனாவின் விலை = ₹ 5

6. நீளம் = 20 மீ; அகலம் = 16 மீ

7. (i) $6x - 5y - 10 = 0$
   (ii) $4x + 6y - 10 = 0$
   (iii) $6x + 9y - 24 = 0$

8. நீளம் = 40 அலகுகள் அகலம் = 30 அலகுகள்

9. மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 16 விசுப்பலகைகளின் எண்ணிக்கை = 5

பயிற்சி - 4.2

1. முதலாம் நபரின் வருவாய் = ₹ 18000 ; இரண்டாம் நபரின் வருவாய் = ₹ 14000
2. 42 மேலும் 24
3. கோணங்கள் 81^o மேலும் 99^o
4. குறைந்தபட்ச கட்டணம் = ₹ 40;ஒரு கி.மீக்கு கட்டணம் = ₹ 18 (ii) ₹ 490
5. $\frac{7}{9}$
6. 60 கி.மீ/ம ; 40 கி.மீ/ம.
7. 59^o மேலும்31^o
8. 659 மேலும் 723
9. 40 மி.லி மேலும் 60 மி.லி
10. ₹ 7200 மேலும் ₹ 4800

பயிற்சி - 4.3

1. (i) (4, 5) (ii) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (iii) (4, 9)
   (iv) (1, 2) (v) (3, 2) (vi) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
   (vii) (3, 2) (viii) (1, 1)

2. (i) படகின் வேகம் = 8கி.மீ/ம நீரோடையின் வேகம் = 3கி.மீ/ம
   (ii) இரயிலின் வேகம் = 60கி.மீ/ம காரின் வேகம் = 80கி.மீ/ம
   (iii) ஆண்களுக்கு தேவைப்படும் நாட்கள் = 18, பெண்களுக்கு தேவைப்படும் நாட்கள் = 36

பயிற்சி - 5.1

1. (i) ஆம் (ii) ஆம் (iii) இல்லை (iv) ஆம்
   (v) ஆம் (vi) இல்லை (vii) இல்லை (viii) ஆம்

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$ (x = அகலம்)

(ii) $x^2 + x - 306 = 0$ (சிறிய முழு$=x$)

(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$ (ரோகன் வயது $= x$)

(iv) $x^2 - 8x - 1280 = 0$ (இரயிலின் வேகம் $=x$)

பயிற்சி - 5.2

1. (i) $-2; 5$ (ii) $-2; \frac{3}{2}$ (iii) $-\sqrt{2}; \frac{-5}{\sqrt{2}}$

(iv) $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}; \frac{1}{10}$ (vi) $-6; 2$

(vii) $1, \frac{2}{3}$ (viii) $-1; 3$ (ix) $7, \frac{8}{3}$

2. 13, 14
3. 17, 18
4. 5 செ.மீ, 12 செ.மீ
5. பொருட்களின் எண்ணிக்கை = 6 ஒவ்வொரு பொருளின் விலை = ₹15
6. 4 மீ; 10 மீ
7. அடிபக்கம் = 12 செ.மீ; குத்துயரம் = 8 செ.மீ
8. 15 கி.மீ, 20 கி.மீ
9. 20 அல்லது 40
10. 9 கி.மீ/ம

பயிற்சி - 5.3

1. (i) $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ (ii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(iii) $\frac{-3}{5}, 2$ (iv) $-1, -5$

. (i) $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ (ii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(iii) $2, \frac{-3}{5}$ (iv) $-1, -5$

3. (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1, 2

4. 7 வருடங்கள்
5. கணிதம் = 12 ஆங்கிலம் = 18 (அல்லது) கணிதம் = 13 ஆங்கிலம் = 17
6. 120 மீ; 90 மீ

7. 18, 12; -18, -12

8. 40 கி.மீ/ம

9. 15 மணி நேரம் ; 25 மணிநேரம்

10. பயணிகள் இரயிலின் வேகம் = 33கி.மீ/ம

விரைவு இரயிலின் வேகம் = 44கி.மீ/ம

11. 18 மீ; 12 மீ

12. 4 வினாடிகள்

13. 13 பக்கங்கள் ; இல்லை

பயிற்சி - 5.4

1. (i) மெய் மூலங்கள் இருக்காது

(ii) மெய் மற்றும் சமமான மூலங்கள் $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(iii) மெய் மற்றும் வெவ்வேறான மூலங்கள் ; $\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$

3. ஆம்; 40மீ ; 20மீ

4. வாய்ப்பில்லை

5. ஆம்; 20மீ ; 20மீ

பயிற்சி - 6.1

1. (i) கூட்டுத்தொடர் (ii) கூட்டுத்தொடர் அல்ல (iii)கூட்டுத்தொடர் (iv) கூட்டுத்தொடர்அல்ல

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) $-2, -2, -2, -2$

(iii) $4, 1, -2, -5$ (iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$

(v) $-1.25, -1.5, -1.75, -2$

3. (i) $a_1 = 3; \quad d = -2$ (ii) $a_1 = -5; \quad d = 4$

(iii) $a_1 = \frac{1}{3}; \quad d = \frac{4}{3}$ (iv) $a_1 = 0.6; \quad d = 1.1$

4. (i) கூட்டுத்தொடரில் இல்லை

(ii) கூட்டுத்தொடர், அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் = $4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) கூட்டுத்தொடர், அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் = $-9.2, -11.2, -13.2$

(iv) கூட்டுத்தொடர், அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் = $6, 10, 14$

(v) கூட்டுத்தொடர் அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் = $3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$

(vi) கூட்டுத்தொடரில் இல்லை

(vii) கூட்டுத்தொடர், அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் = $-16, -20, -24$

(viii) கூட்டுத்தொடர், அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் = $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$

(ix) கூட்டுத்தொடரில் இல்லை

(x) கூட்டுத்தொடர், அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் = $5a, 6a, 7a$

(xi) கூட்டுத்தொடரில் இல்லை

(xii) கூட்டுத்தொடர், அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் = $\sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) கூட்டுத்தொடரில் இல்லை

பயிற்சி - 6.2

1. (i) $a_8 = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$
   (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$
2. (i) -77 (ii) 22
3. (i) $a_2 = 14$
   (ii) $a_1 = 18$; $a_3 = 8$
   (iii) $a_2 = \frac{13}{2}$; $a_3 = 8$
   (iv) $a_2 = -2$; $a_3 = 0$; $a_4 = 2$; $a_5 = 4$
   (v) $a_1 = 53$; $a_3 = 23$; $a_4 = 8$; $a_5 = -7$
4. 16வது உறுப்பு
5. (i) 34 (ii) 27
6. இல்லை 7. 178 8. 5 9. 1

10. 100 11. 128 12. 60 13. 13

14. கூட்டுத்தொடர் = 4, 10, 16, ... 15. 158

16. $-13, -8, -3$ 17. 11

பயிற்சி - 6.3

1. (i) 245 (ii) -180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20} = 1\frac{13}{20}$

2. (i) $\frac{2093}{2} = 1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) -8930

3. (i) $n = 16, S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}, \quad S_{13} = 273$

   (iii) $a = 4, S_{12} = 246$ (iv) $d = -1, \; a_{10} = 8$

   (v) $n = 5; \quad a_5 = 34$ (vi) $n = 7; \quad a = -8$

   (vii) $a = 4$

4. $n = 38;$ $S_{38} = 6973$ 5. 5610 6. n^2

7. (i) 525 (ii) -465

8. $S_1 = 3;$ $S_2 = 4;$ $a_2 = 1;$ $a_3 = -1;$ $a_{10} = -15$

   $a_n = 5 - 2n$

9. 4920 10. 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40

11. 234 12. 143 13. 16 14. 370 மீ.

பயிற்சி - 6.4

1. (i) ஆம் (ii) இல்லை (iii) ஆம்

2. (i) 4, 12, 36, ... (ii) $\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{25}, \ldots$

   (iii) $81, -27, 9, \ldots$ (iv) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots$

3. (i) ஆம்; 32, 64, 128 (ii) ஆம், $\frac{-1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{-1}{96}$

   (iii) இல்லை (iv) ஆம் -54,-162,-486 (v) இல்லை

   (vi) ஆம்; $-81, 243, -729$ (vii) ஆம்; $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, \ldots\ldots$

(viii) ஆம்; $-16,\ 32\sqrt{2},\ -128$ (ix) ஆம்; 0.0004, 0.00004, 0.000004

4. -4

பயிற்சி - 6.5

1. (i) $r = \frac{1}{2}$; $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(ii) $r = -3$; $a_n = 2(-3)^{n-1}$

(iii) r = 3; $a_n = (-1)(3)^{n-1}$

(iv) $r = \frac{2}{5}$; $a_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

2. $a_{10} = 5^{10}$; $a_n = 5^n$ 3. (i) $\frac{1}{3^4}$ (ii) $\frac{-4}{3^4}$

4. (i) 5வது (ii) 12வது (iii) 7வது

5. $3 \times 2^{10} = 3072$ 6. $\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1, ...$ 7. 5

பயிற்சி - 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{2}$ (iv) $2\sqrt{a^2+b^2}$
2. 39
3. ஒரு கோட்டு புள்ளிகள் அல்ல 4. $AB = BC = \sqrt{37}$; $AC = 2$
5. $AB = BC = CD = DA = 3\sqrt{2}$ $AC = BD = 6$ (சதுரத்தின் உச்சிகள்)
6. $AB = BC = CA = 2a$ (சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள்)
7. $AB = CD = \sqrt{313}$, $BC = AD = \sqrt{104}$, $AC \neq BD$ (இணைகரத்தின் உச்சிகள்)
8. $AB = BC = CD = DA = \sqrt{90}$, $AC \neq BD$ (சாய்சதுரத்தின் உச்சிகள்), 72 Sq. units
9. (i) சதுரம் (ii) சரிவகம் (iii) இணைகரம்
10. (-7, 0) 11. 7 அல்லது -5
12. 3 அல்லது -9 13. $2\sqrt{5}$ அலகுகள் 15. $x + 13y = 17$

பயிற்சி - 7.2

1. $(1, 3)$

2. $\left(2, \frac{-5}{3}\right)$ மற்றும் $\left(0, \frac{-7}{3}\right)$

3. $2 : 7$

4. $x = 6$; $y = 3$

5. $(3, -10)$

6. $\left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}\right)$

7. $\left(-3, \frac{3}{2}\right), (-2, 3), \left(-1, \frac{9}{2}\right)$

8. $\left(1, \frac{13}{2}\right), \left(-1, \frac{7}{2}\right), (0, 5)$

9. $\left(\frac{5a-b}{5}, \frac{5a+b}{5}\right)$

10. (i) $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ (ii) $\left(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}\right)$ (iii) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

பயிற்சி - 7.3

1. (i) $\frac{21}{2}$ ச.அலகுகள் (ii) 32 ச.அலகுகள் (iii) 3 ச.அலகுகள்

2. (i) $K = 4$ (ii) $K = 3$ (iii) $K = \frac{7}{3}$

3. 1 ச.அலகுகள் ; 1 : 4

4. 28 ச.அலகுகள்

5. 6 ச.அலகுகள்

பயிற்சி - 7.4

1. (i) 6 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) $\frac{4b}{a}$ (iv) $\frac{-b}{a}$

   (v) -5 (vi) 0 (vii) $\frac{1}{7}$ (viii) -1

பயிற்சி - 8.2

1. (ii) DE = 2.8 செ.மீ   2. 8 செ.மீ

3. x=5செ.மீ மற்றும் $y=2\frac{13}{16}$ செ.மீ அல்லது 2.8125 செ.மீ

4. 1.6 மீ   8. 16 மீ

பயிற்சி - 8.3

3. 1:4   4. $\sqrt{2}-1$ 6. 96 செ.மீ^{2} 8. 3.5 செ.மீ

பயிற்சி - 8.4

8. $6\sqrt{7}$ மீ   9. 13 மீ   12. 1:2

பயிற்சி - 9.1

1. (i) ஒன்று   (ii) வட்டத்தின் வெட்டும் கோடு   (iii) முடிவிலி
   (iv) தொடுப்புள்ளி   (v) முடிவிலி   (v) இரண்டு

2. PQ = 12 செ.மீ   4. 12 செ.மீ

பயிற்சி - 9.2

1. (i) d   (ii) a   (iii) b   (iv) a   (v) c

2. 8 செ.மீ   4. AB = 15 செ.மீ, AC = 9 செ.மீ

5. ஒவ்வொன்றும் 8 செ.மீ   6. $2\sqrt{5}$ செ.மீ   9. இரண்டு

பயிற்சி - 9.3

1. (i) 28.5 செ.மீ^{2} (ii) 285.5 செ.மீ^{2}

2. 88.368 செ.மீ^{2} 3. 1254.96 செ.மீ^{2} 4. 57 செ.மீ^{2}

5. 10.5 செ.மீ^{2} 6. 6.125 செ.மீ^{2} 7. 102.67 செ.மீ^{2}

8. 57 செ.மீ^{2}

பயிற்சி - 10.1

1. 5500 செ.மீ^{2} 2. 184800 செ.மீ^{2} (15.4 மீ^{2})   3. 264 க.செ.மீ

4. 1 : 2   5. 21   7. 21.175 செ.மீ^{3}

8. 188.57 மீ^{2}

9. 37 செ.மீ

பயிற்சி - 10.2

1.	103.62 செ.மீ^{2}	2.	1156.57 செ.மீ^{2}	3.	298.57 மி.மீ^{2}
4.	96 செ.மீ^{2}	5.	₹ 827.20	6.	2 : 3 : 1

7. $x^2\left(\frac{\pi}{4}+6\right)$ ச.அலகுகள் 8. 374 செ.மீ^{2}

பயிற்சி - 10.3

1. 693 கி.கி 2. கூம்பின் உயரம் = 21.14 செ.மீ ;

பொம்மையின் பக்கதளப்பரப்பு = 795.08 செ.மீ^{2} 3. 89.83 செ.மீ^{3} 4. 616 செ.மீ^{3}

5. 309.57 செ.மீ^{3} 6. 150 7. 523.9 செ.மீ^{3}

பயிற்சி - 10.4

1.	2.74 செ.மீ	2.	12 செ.மீ	3.	2.5 மீ
4.	5 மீ	5.	10	6.	400
7.	100	8.	672		

பயிற்சி - 11.1

1. $\sin A=\frac{15}{17}$; $\cos A=\frac{8}{17}$; $\tan A=\frac{15}{8}$

2. $\frac{527}{168}$ 3. $\cos\theta=\frac{7}{25}$; $\tan\theta=\frac{24}{7}$

4. $\sin A=\frac{5}{13}$; $\tan A=\frac{5}{12}$

5. $\sin A=\frac{4}{5}$; $\cos A=\frac{3}{5}$

7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{8+\sqrt{113}}{7}$

8. (i) 1 (ii) 0

பயிற்சி - 11.2

1. (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ (iii) 1

(iv) 2 (v) 1

2. (i) c (ii) d (iii) c
3. 1 4. சரி
5. QR = $6\sqrt{3}$ செ.மீ; PR = 12 செ.மீ
6. $\angle YXZ = 60^o$; $\angle YZX = 30^o$ 7. தவறு

பயிற்சி - 11.3

1. (i) 1 (ii) 0 (iii) 0
   (iv) 1 (v) 1
3. $A = 36^o$ 6. $\cos 15^o + \sin 25^o$

பயிற்சி - 11.4

1. (i) 2 (ii) 2 (iii) 1
6. 1 8. 1 9. $\frac{1}{p}$

பயிற்சி - 12.1

1. 15 மீ 2. $6\sqrt{3}$ மீ 3. 4 மீ
4. 30^o 5. 34.64 மீ 6. $4\sqrt{3}$ மீ
7. 4.1568 மீ 8. $300\sqrt{3}$ மீ 9. 15 மீ 10. 7.5 செ.மீ^{2}

பயிற்சி - 12.2

1. கோபுரத்தின் உயரம் = $5\sqrt{3}$ மீ ; சாலையின் அகலம் = 5மீ
2. 32.908 மீ 3. 1.464 மீ 4. 19.124 மீ
5. 7.608 மீ 6. 10 மீ 7.51.96 அடிகள் ; 30 அடிகள்; 90 அடிகள்
8. 6 செ.மீ 9. 200 மீ/வி 10. 1 : 3

பயிற்சி - 13.1

1. (i) 1 (ii) 0, சாத்தியமில்லா நிகழ்வு (iii) 1, நிச்சயிக்கப்பட்ட நிகழ்வு
   (iv) 1 (v) 0, 1
2. (i) ஆம் (ii) ஆம் (iii) ஆம் (iv) ஆம்
3. 0.95 4. (i) 0 (ii) 1 5. $\frac{1}{13}, \frac{1}{3}, 1, 0$

6. 0.008 7. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$ 8. $\frac{1}{26}$

பயிற்சி - 13.2

1. (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

2. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{4}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$

3. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$ 4. $\frac{5}{13}$

5. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

6. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{1}{26}$
   (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

7. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) a) $\frac{1}{4}$ b) 0

8. $\frac{11}{12}$ 9. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$

10. (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

11. $\frac{11}{84}$ 12. (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

13.

2 பகடையின் மீது மொத்தம்	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
நிகழ்தகவு	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

14. $\frac{3}{4}$ 15. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

பயிற்சி - 14.1

1. 8.1 செடிகள் x மேலும் A ன் மதிப்புகள் மிகச்சிறியது எனவே நேரடி முறையை பயன்படுத்துகிறோம்.

2. ₹ 313 3. $f = 20$ 4. 75.9

5. 22.31 6. ₹ 211 7. 0.099 ppm

8. 49 நாட்கள் 9. 69.43%

பயிற்சி - 14.2

1. முகடு = 36.8 வருடங்கள் சராசரி = 35.37 வருடங்கள், மருத்துவமனையில் சேர்க்கப்பட்ட பெரும்பாலான நோயாளிகளின் வயது 36.8 வருடங்கள் தோராயமாக மருத்துவமனையில் சேர்க்கப்பட்ட நோயாளிகளின் சராசரி வயது 35.37 வருடங்கள்.
2. 65.625 மணி நேரங்கள்
3. மாதந்திர செலவின் முகடு = ₹ 1847.83, மாதாந்திர செலவின் சராசரி = ₹ 2662.5.
4. முகடு = 30.6 சராசரி = 29.2 பெரும்பாலான மாநிலங்கள்/யூனியன் பிரதேசங்களின் மாணவ, ஆசிரிய விகிதங்கள் 30:6 மேலும் இதன் சராசரியின் விகிதம் 29:2
5. முகடு = 4608.7 ரன்கள்
6. முகடு = 44.7 கார்கள்

பயிற்சி - 14.3

1. இடைநிலை = 137 அலகுகள் ; சராசரி = 137.05 அலகுகள், முகடு = 135.76அலகுகள் இவ்வகையில் தோராயமாக மூன்று அளவைகளும் சமமாக உள்ளது.

2. $x = 8, y = 7$

3. இடைநிலை வயது = 35.76 வருடங்கள்

4. இடைநிலை நீளம் = 146.75 மி.மீ

5. இடைநிலை வாழ்நாள் = 3406.98 மணிகள்

6. இடைநிலை = 8.05, சராசரி = 8.32, முகட்டின் அளவு = 7.88

7. இடைநிலை எடை = 56.67 கி.கி

பயிற்சி - 14.4

1.

தினசரி வருமானம் (₹)	குவிவு நிகழ்வெண்
300ஐ விட குறைவு	12
350ஐ விட குறைவு	26
400ஐ விட குறைவு	34
450ஐ விட குறைவு	40
500ஐ விட குறைவு	50

கீழ்காணும் புள்ளிகளை பயன்படுத்தி வளர்நிகழ்வரையை வரைக. (300, 12), (350, 26), (400,34), (450, 40) மேலும் (500, 50)

2. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை பயன்படுத்தி வளர்நிகழ்வரையை வரைக : (38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46, 14), (48, 28), (50, 32) மற்றும்(52, 35). இங்கு $\frac{n}{2}$=17.5. வளர்நிகழ்வரையின் மீது 17.5 புள்ளியைக் குறிப்பிடு. இப்புள்ளியின் x-அச்சுதூரமே இதன் இடைநிலை.

3.

கோதுமை சாகுபடி (குவி/ஹெ)	குவிவு நிகழ்வெண்
50 ஐ விட அதிகம் (அல்லது) சமம்	100
55ஐ விட அதிகம் (அல்லது) சமம்	98
60ஐ விட அதிகம் (அல்லது) சமம்	90
65ஐ விட அதிகம் (அல்லது) சமம்	78
70ஐ விட அதிகம் (அல்லது) சமம்	54
75ஐ விட அதிகம் (அல்லது) சமம்	16

பின்வரும் புள்ளிகளை பயன்படுத்தி வளர்நிகழ்வரையை வரை : (50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78), (70, 54) மற்றும் (75, 16).

ஆசிரியர் குறிப்பு

அன்பான ஆசிரியர்களே,

தெலங்கானா கலைதிட்ட வடிவமைப்பு பணி (SCF-2011)யின் பரிந்துரையின் படி ஆந்திர மாநில அரசு எல்லா பாடங்களுக்கும் தொடர்புடைய கலைதிட்டத்தை மாற்றியமைக்க முடிவு செய்தது. எல்லா மாணவர்களும் கற்க வேண்டும். மேலும் பள்ளிகளில் கற்பிக்கப்படும் கணிதம் அன்றாட வாழ்வின் நிகழ்வுகளுக்கு தொடர்புடையதாக இருக்க வேண்டும் என்பதே இக்கலைதிட்டத்தின் முக்கியத்துவமாகும். தேசிய கலைதிட்ட அமைப்பு (NCF), NCERT மேலும் ஆந்திர மாநில அரசு ஆகியவை கணிதக் கோட்பாடுகளை புரிந்துகொள்ளல் மூலமாக பகுத்தறிதல், அன்றாட வாழ்க்கை பிரச்சனைகளுக்கு தீர்வு காணுதல் முறை போன்ற பரிந்துரைகளுக்கு முக்கியத்துவம் அளிக்கின்றன. இது உயர்நிலை கல்வி நிலையில் சாதிக்கக் கூடியதே. கணிதத்தின் அடிப்படை கட்டமைப்பை ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்றுள்ளோம். நாம் இப்போது உயர்நிலைப்பள்ளியின் முடிவு நிலையில் உள்ளோம். முந்தைய வகுப்பில் அடிப்படை கணித அமைப்புகள், புதியக் கோட்பாடுகள் பலவற்றை புரிந்துகொள்ள மாணவர்களை ஊக்கப்படுத்தியுள்ளோம். கணித பிரச்சனைகளை தீர்ப்பது, நிரூபிப்பது மேலும் நிரூபணத்திற்கு தேவையான வரையறைகளை உபயோகிப்பது போன்ற அம்சங்களின் மீது மாணவர்களை புலமை பெறச் செய்தோம்.

பத்தாம் வகுப்பு கணிதப் புத்தகத்தை, கணிதக் கோட்பாடுகளை முழுமையாக புரிந்துகொள்ளவும், புதிய கோட்பாடுகளை முழுமையாக புரிந்துகொள்ளும் விதமாகவும் வடிவமைத்துள்ளோம்.

ஆறாம் வகுப்பு முதல் ஒன்பதாம் வகுப்பு வரையிலான கணித புத்தகங்கள் பத்தாம் வகுப்பு கணித கற்பித்தலுக்கும், பயிற்சிக்கும் ஏற்ற வகையில் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. முக்கிய கணித கோட்பாடுகளின் தன்மைகள் இவற்றின் எல்லை, வரையறைகள் போன்றவற்றின் கடினத்தன்மை சிறிது சிறிதாக உயர்த்தப்பட்டது. மாணவர்கள் சுயமாக கற்பதற்கு ஏற்ற வகையில் மாணவர்களின் வசதிக்கேற்ற வகையிலும் பாடபுத்தகம் வடிவமைக்கப்பட்டது. எனவே பாடப்புத்தகத்திலுள்ள அனைத்து அம்சங்களையும் மாணவர்கள் நன்றாக, சுதந்திரமாக தனி சூழலில் கற்கும் விதமாகவும், சிறுசிறு குழுக்களாக பிரிந்து கலந்துரையாடி, விவாதித்து பிரச்சனைகளை தீர்க்கும் விதமாகவும், இதைசெய், முயன்றுபார் போன்ற தலைப்புகளில் சில வினாக்களை கொடுத்துள்ளோம்.

பாடதிட்டத்தில் உள்ள எல்லா பாடப்பொருள்களும் கணிதக் கோட்பாடுகளை பயன்படுத்தியும், சமன்பாடுகளை பயன்படுத்தி பகுத்தறியும் விதமாகவும், புரிந்துகொண்டு ஏற்கும்படியாகவும் கட்டமைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்தமுறை குழுவிவாதம், செயல்வழி கற்றலுக்கு துணைபுரிகிறது. 10ஆம் வகுப்பு பாடதிட்டம் முக்கியமாக (1) எண் அமைப்பு (2) இயற்கணிதம் (3) வடிவியல் (4) அளவியல் (5) புள்ளியல் (6)பகுமுறை வடிவியல் (7) முக்கோணவியல் எனும் 7 வகைகளில் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த அத்தியாயங்களை கற்பிப்பதன் மூலம் மாணவர்களுக்கு பிரச்சனைகளை தீர்க்கும் திறன், தர்க்க சிந்தனை, கணித மொழியில் கூறுவது. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை அலசி ஆராய்தல் போன்ற திறன்கள் வளர்கிறது. கணிதத்தை ஒரு பாடமாக மட்டுமல்லாமல் அன்றாட வாழ்வியலின் ஒரு பகுதியாக மாணவர்கள் நினைவு கொள்வர்.

இந்த பாடப்புத்தகம் எளிய சொற்களையும், உரைநடை மொழியையும் பயன்படுத்தி எழுதப்பட்டுள்ளது. செயல்திட்டங்களுக்கு அதிகம் முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்பட்டதால் மாணவர்கள் சுயமாக கற்பதற்கும், குழுவாக கலந்துரையாடி கற்பதற்கும் இப்பாட புத்தகம் உதவிசெய்யும்.

இதைசெய், முயன்றுபார் போன்ற தலைப்பிலுள்ள வினாக்கள் மாணவர்கள் எந்தளவு பாடப்பொருளை புரிந்துகொண்டனர் என அறிய நமக்கு உதவிசெய்யும். இதைசெய் தலைப்பில் கொடுக்கப்பட்ட வினாக்கள் பாடப்புத்தகத்தில் நாம் கற்றுக்கொண்ட கோட்பாடுகளின் மீது ஆதாரப்பட்டிருக்கும். முயன்றுபார் தலைப்பில் கொடுக்கப்பட்ட வினாக்கள் திறன்கள், கோட்பாடுகளின் பொதுமைபடுத்தல், கோட்பாடுகளின் சரிபார்ப்பு மேலும் வினவுதல் எனும் அம்சங்களின் மீது ஆதாரப்பட்டுள்ளது.

சிந்தித்து விவாதி எனும் தலைப்பு மாணவர்கள் புதிய கோட்பாடுகளை புரிந்து கொண்டு அவற்றை தன் சொந்த வாக்கியங்களில் எழுத ஊக்குவிக்கிறது.

10ம் வகுப்பு பாடதிட்டத்தில் 14 அத்தியாயங்கள் உள்ளது. ஒவ்வொரு அம்சங்களும் எளிதில் புரிந்து கொள்ளும் விதமாகவும், தர்க்க ரீதியாக ஆலோசிக்கத் தூண்டுவதாகவும், கணிதக் கோட்பாடுகளின் மீது ஆசையை வளர்த்துக் கொள்ளும் விதமாகவும் உள்ளது. வண்ணமயமான சித்திரங்கள், படங்கள், படிப்பதற்கு ஏற்றவகையிலான எழுத்தளவு, போதுமான பக்கங்கள் போன்றவை கணிதப் புத்தகத்தின் மீதுள்ள பயத்தை போக்குவனவாக உள்ளன.

அத்தியாயம் 1: மெய்யெண்களின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள், விகிதமுறா எண்கள் மேலும் அவற்றின் தசம விரிவாக்கம், சுழல் தன்மையுள்ள மேலும் சுழல்தன்மையற்ற தசமஎண்கள், முதன் முதலாக மடக்கைகளை அறிமுகப்படுத்தியுள்ளோம். மடக்கை எண்களின் அடிப்படை விதிகள் மேலும் மடக்கை அட்டவணைகள் போன்றவற்றை விவரித்துள்ளோம்.

அத்தியாயம் 2 : கணங்கள், உயர்நிலை அளவில் புதிய அத்தியாயம். இதற்கு முன்னர் 8ம் வகுப்பில் கணங்கள் இருந்த போதிலும் புதிய பாடதிட்டத்தில் 10ம் வகுப்பில் அறிமுகம் செய்துள்ளோம். இந்த அத்தியாயத்தில் கணங்கள் வரையறை, கணங்களின் வகைகள், வெண்படங்கள், கணங்களின் செயல்கள் போன்றவை விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் 3: பல்லுறுப்புக் கோவைகள், பல்லுறுப்புக் கோவைகள் வரையறைப் படிகள், மதிப்புகள் பற்றி விவரிக்கப்பட்டது. நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவைகள் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் மேலும் கனபல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பொதுவடிவம், பூஜ்ஜியங்கள், வரைபடங்கள், பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கெழுக்களுக்கும், பூஜ்ஜியங்களுக்கும் இடையேயான தொடர்பு பற்றி விவரிக்கப்பட்டது.

அத்தியாயம் 4 : இரண்டு மாறிகளை கொண்ட நேரிய சமன்பாட்டு ஜோடிகளின் தீர்வு வரைபடம் மூலம், இயற்கணித முறைகள் மூலம் தீர்ப்பதைப் பற்றி விவரிக்கப்பட்டது.

அத்தியாயம் 5 : இருபடிசமன்பாடுகள், இருபடி சமன்பாடுகள் வரையறை, பொருள், தீர்வுகள் பற்றியும், பரவளையத்தை பயன்படுத்தி மூலங்களின் தன்மைகளை கண்டறியும் முறை பற்றியும் விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் 6 : தொடர்கள் உயர்நிலை அளவில் இது புதிய அத்தியாயம். இதில் கூட்டுத்தொடர் மேலும் பெருக்குத்தொடர் பற்றி விவரிக்கப்பட்டுள்ளது. தொடரிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, nவது உறுப்பு, உறுப்புகளின் மொத்தம் பற்றி விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் 7 : பகுமுறை வடிவியல், இந்த அத்தியாயத்தில் இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டதூரம், முக்கோணங்களின் மையக்கோட்டு சந்தி, முக்கோணங்களின் பரப்பளவிற்கான ஹீரான் சூத்திரம் போன்றவற்றை பற்றி விவரித்துள்ளோம். நேர்கோட்டின் சாய்வு பற்றியும் விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் 8 : வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பண்புகள், அடிப்படை விகிதசமத்தேற்றம், இரண்டு முக்கோணங்கள் வடிவொத்திருக்க தேவையான நிபந்தனைகள், பிதாகரஸ் தேற்றம் அதன் மறுதலைப் பற்றி விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் 9 : வட்டத்தின் தொடுகோடுகள், வெட்டும் கோடுகள், வெட்டும் கோடுகளால் ஏற்படும் வட்டத்துண்டுகள் மேலும் அவற்றின் பரப்பளவு கண்டறிவதை பற்றி விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் 10 : அளவியலில் முப்பரிமாண பொருட்களின் பக்கதளப்பரப்பளவு, கனஅளவுகள் குறித்து விவாதிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் 11 & 12 : திரிகோணமிதி, திரிகோணமிதி பயன்பாடுகள் உயர்நிலை அளவில் முதலாவதாக அறிமுகப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. கர்ணம், பக்கங்களுக்கு இடையேயான தொடர்பு, திரிகோணமிதி விகிதங்களை பயன்படுத்தி தூரங்கள், உயரங்களை கண்டறிதல் ஆகியவை விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் 13 : நிகழ்தகவு 9ம் வகுப்பில் விவாதித்த நிகழ்தகவுடன் மேலும் சில புதிய வார்த்தைகளும், அவைகளுக்கான விவரங்களும் விவாதிக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம் 14 : புள்ளியியல் விவரங்கள் சேகரிப்பு, அதை வகைப்படுத்தல், வகைப்படுத்தாத விவரங்களின் சராசரி, இடைநிலை முகடு அதுபோலவே வகைப்படுத்த விவரங்களின் சராசரி, இடைநிலை, முகடு கண்டறிதல் மூன்றுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு போன்றவை விவரிக்கப்பட்டுள்ளது. இவைகள் மட்டுமில்லாமல் கூடுதலாக இணைப்பு ஒன்று அளிக்கப்பட்டுள்ளது. இது கணிதத்துக்கும், அன்றாட வாழ்வு நிகழ்வுகளுக்கான தொடர்பை வலியுறுத்துகிறது.

எந்தவொரு பாடப்புத்தகத்தின் வெற்றியும் பாடதிட்டங்களை காட்டிலும் அதிகமாக ஆசிரியர் அமுல்படுத்தும் கற்பித்தல் முறைகள் மீதே ஆதாரப்பட்டுள்ளது. ஒரு நல்ல பாடப்புத்தகம் மட்டுமே மாணவர்களுக்கு தரமான கல்வியை அளித்துவிடாது. வகுப்பறையில் பயன்படுத்தப்படும் நல்ல கற்பித்தல் முறைகளே, நாம் விரும்பிய புதுமாற்றங்களை கொண்டுவரும். ஆதலால் கணித கற்பித்தல் என்றால் கற்றல் இலக்குகளை சாதிப்பது மட்டுமல்ல அடிப்படைக் கோட்பாடுகளை புரிந்துகொள்ளல் மூலம் பிரச்சனைகளை தீர்க்கும் திறனை மேம்படுத்துவதே உண்மையான கணித கற்பித்தல் என்பதை உணர வேண்டும்.

ஒவ்வொரு அத்தியாயத்தின் கடைசியிலும் நாம் கற்றது எனும் தலைப்பில் உள்ள அம்சங்கள் திருப்புதலுக்கும், ஆசிரியர்கள் சுயமாக சில பிரச்சனைகளை உருவாக்குவதற்கும் பயன்படுகிறது.

மாணவர்கள் அனைவரும் கணிதத்தை மகிழ்ச்சியுடன் கற்றுக்கொண்டு அவற்றை அவர்களின் அன்றாட வாழ்க்கையின் நிகழ்வுகளுக்கு பயன்படுத்திக் கொள்ள இப்புத்தகத்தில் உள்ள அடிப்படைக் கோட்பாடுகள் துணைபுரியும் என உறுதியாக நம்புகிறேன்.

''மகிழ்ச்சியான கற்பித்தலுக்கு அர்பணித்து கொண்ட
அனைத்து ஆசிரியர்களுக்கும் வாழ்த்துகள் ''

பாடப்பொருள்

I. எண்களின் அமைப்பு (23 பாடப்பிரிவேளைகள்)

(i) **மெய்எண்கள் (15 பிரிவேளைகள்)**

- விகிதமுறா, விகிதமுறு எண்களின் பண்புகள்
- அடிப்படை எண் கோட்பாடுகள்
- $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ... முதலிய விகிதமுறா எண்களின் தசம வடிவங்கள் (முடிவுறு தசமங்கள், முடிவுறா சுழல் தசமங்கள்)
- மெய்எண்களின் பண்புகள் (திருப்புதல் மேலும் உதாரணங்கள் மூலம் நிரூபித்தல்)
- மடக்கைகள் அறிமுகம்
- அடுக்கு குறி வடிவத்தை மடக்கைக்கு மாற்றுவது
- மடக்கைகளின் பண்புகள் $\log_a a = 1; \log_a 1 = 0$
- மடக்கைகள் விதிகள்

$$\log xy = \log x + \log y; \quad \log \frac{x}{y} = \log x - \log y; \quad \log x^n = n \log x$$

- மடக்கைகளின் அன்றாட வாழ்க்கை பயன்கள் (தேர்வுக்குறியது அல்ல)

(ii) **கணங்கள் (8 பிரிவேளைகள்)**

- கணங்கள் மேலும் வடிவங்கள்
- வெற்று கணம், முடிவுறு கணம், முடிவுறா கணம் மேலும் அனைத்து கணம்
- சமான கணங்கள், கணங்கள், ஆதிஎண்
- வெண்படங்கள் மூலம் கணங்களை குறித்துக்காட்டுவது
- கணங்களின் அடிப்படை செயல்கள் கணங்களின் சேர்ப்பு, கணங்களின் வெட்டு

II. இயற்கணிதம் (46 பிரிவேளைகள்)

(i) **பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (8 பிரிவேளைகள்)**

- பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்கள்
- பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் பூஜ்ஜியங்களின் வடிவியல் பொருள்.
- நேரிய, இருபடி, கனபல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வடிவியல் படங்கள்.
- பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல் கோட்பாடு

(ii) **இருமாறிகளின் நேரிய சமன்பாட்டு ஜோடிகள் (15 பிரிவேளைகள்)**

- அன்றாட வாழ்க்கை நிகழ்வுகளை நேரிய சமன்பாட்டு ஜோடிகளாக மாற்றுவது.
- இருமாறிகளின் நேரிய சமன்பாட்டு ஜோடிகளுக்கு வடிவியல் முறைகளில் தீர்வுகளை கண்டறிவது.
- இருமாறிகளின் நேரிய சமன்பாட்டு ஜோடிகளுக்கு இயற்கணித முறைகளில் தீர்வுகளை கண்டறிவது, பிரதியீட்டுமுறை, மாறிகளை நீக்கும் முறை.
- நேரிய சமன்பாட்டு ஜோடிகளாக மாற்றக்கூடிய இரண்டு மாறிகளின் சமன்பாடுகள் அன்றாட வாழ்க்கை நிகழ்வுகளுடன் தொடர்புடையது.
- பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்கள்

(iii) **இருபடி சமன்பாடுகள் (12 பிரிவேளைகள்)**

- இருபடி சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$

- மெய்எண்களை தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பது. காரணிபடுத்தும் முறை – முழுவர்க்கமுறை
- தன்மைக்காட்டி மூலம் தீர்வுகளின் பண்புகளை அறிவது
- அன்றாட வாழ்க்கை நிகழ்வுகளுடன் தொடர்புடைய இருபடி சமன்பாடுகளை தீர்ப்பது.

(iv) **தொடர்கள் (11 பிரிவேளைகள்)**

- கூட்டுத்தொடர் வரையறை
- கூட்டுத்தொடரின் nவது உறுப்பு, nஉறுப்புகளின் மொத்தம்
- பெருக்குத் தொடர் அறிமுகம்
- பெருக்குத் தொடரின் nவது உறுப்பைக் கண்டுபிடித்தல்

III. வடிவியல் (33 பிரிவேளைகள்)

(i) **சர்வசம முக்கோணங்கள் (18 பிரிவேளைகள்)**

- வடிவொத்த வடிவங்கள், சர்வசமவடிவங்கள் வேறுபாடு
- வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பண்புகள்.
- (நிரூபணம்) முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்துக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு மற்ற இரண்டு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கும்.
- (ஆயத்தப்படுத்தல்) முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை.
- (ஆயத்தப்படுத்தல்) இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள் சமமாக இருந்து அவற்றின ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமத்தில் இருந்தால் அவை வடிவொத்த முக்கோணங்கள் (கோ.கோ.கோ)
- (ஆயத்தபடுத்தல்) இரண்டு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒத்த பக்கங்களுக்கு விகித சமத்தில் இருந்தால் அவை வடிவொத்த முக்கோணங்கள். (ப.ப.ப)
- (ஆயத்தம்) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களும், அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தில் ஒத்த பக்கங்களுக்கு, கோணத்திற்கு சமமானால் அவைகள் வடிவொத்த முக்கோணங்கள் (ப.கோ.ப)
- (நிரூபணம்) ஒரு சதுரத்தில் உள்ள இரண்டு முக்கோணங்களின் பரப்பளவின் கூடுதல் அந்த சதுரத்தின் பரப்பளவிற்கு சமம்.
- (நிரூபணம்) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.
- (நிரூபணம்) ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்கு சமமானால் முதல் பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள கோணம் செங்கோணம்.
- (அமைப்பு) கோட்டுத்துண்டை தேவையான விகிதத்தில் பிரிப்பது (அடிப்படை விகித சமத்தேற்றம்)
- (அமைப்பு) கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் அளவுகளுக்கேற்ப வடிவொத்த முக்கோணத்தை வரையறு.
- ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்கோண முனையிலிருந்து கர்ணத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு, இரண்டு முக்கோணங்களை உருவாக்கும். இவைகள் வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ஆகும்.

(ii) **வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் மேலும் வெட்டும் கோடுகள் (15 பிரிவேளைகள்)**

- வட்டத்தின் தொடுகோடு, வெட்டும் கோடு வேறுபாடு (ஆயத்தம்)
- வட்டத்திற்கு வெளியே எந்தப் புள்ளியிலிருந்தும் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளி வட்டத்தின் ஆரத்திற்கு செங்குத்து.
- (நிரூபணம்) வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம்.
- (அமைப்பு) வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளியிலிருந்து அந்த வட்டத்திற்கு தொடுகோடு வரைவது.
- (அமைப்பு) வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள புள்ளியிலிருந்து இரண்டு தொடுகோடு வரைவது.
- வெட்டும் கோட்டால் ஏற்படும் வட்டத்துண்டு.
- வட்டத்துண்டின் பரப்பளவை கண்டுபிடித்தல் (சிறிய வட்டத்துண்டு, பெரிய வட்டத்துண்டு)

IV. ஆயதொலை வடிவகணிதம் (12 பிரிவேளைகள்)

- நேரிய சமன்பாடுகள், வரைபடங்களின் திருப்புதல் மூலம் ஆயதொலை வடிவ கணிதத்தை அறிமுகப்படுத்துதல்.
- இரண்டு புள்ளிகள் $P(x_1, y_1)$ மேலும் $Q(x_2, y_2)$ க்கு இடைப்பட்டதூரம்

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- கொடுக்கப்பட்ட விகிதங்களுக்குக்கேற்ப நேர்கோட்டை பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சுதூரங்கள் (உள்புறமாக m : n).
- கால்பகுதியில் ஏற்படும் முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள்
- இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வு

V. திரிகோணமிதி (23 பிரிவேளைகள்)

(i) **திரிகோணமிதி (15 பிரிவேளைகள்)**

- குறுங்கோணம், செங்கோணங்களை உள்ளடக்கிய முக்கோணத்தின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் அதாவது sine, cosine, tangent, cosecant, secant, cotangent.
- 30°, 45°, 60° முக்கோணவியல் விகிதங்களின் மதிப்புகள் (நிரூபணம்)
- முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள்
  (i) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, (ii) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$, (iii) $\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$

(ii) **திரிகோணமிதி பயன்பாடுகள் (8 பிரிவேளைகள்)**

- ஏற்றகோணங்கள், இறக்கக் கோணங்கள்.
- அன்றாட வாழ்வின் தூரம், உயரம் பற்றிய பிரச்சனைகள்
- இரண்டு செங்கோணங்களுக்கு மிகாத 30°, 45°, 60° குறுங்கோணங்களை கொண்ட ஏற்ற, இறக்கக் கோண தொடர்பான கணக்குளை தீர்ப்பது.

VI. அளவியல் (10 பிரிவேளைகள்)

(i) **புறப்பரப்பளவுகள் மற்றும் கனஅளவுகள்**

- கனச்சதுரம், கனச்செவ்வகம், வட்டநேர் உருளை, கூம்பு, கோளம் மற்றும் அரைகோளங்களின் புறப்பரப்பு மற்றும் கனஅளவுகள் காணுதல்.
- ஏதேனும் இரண்டு வடிவங்களை ஒன்றையொன்று மாற்றுதல் மற்றும் அவற்றின் கனஅளவுகளை காணுதல்.

VII. விவரங்களை கையாளுதல் (25 பிரிவேளைகள்)

(i) **புள்ளியியல்**

- வகைப்படுத்தப்படாத விவரங்களின் சராசரி,இடைநிலை மேலும் முகடு திருப்புதல்.
- வகைப்படுத்தப்பட்ட கூட்டு சராசரி, இடைநிலை மேலும் முகட்டின் பொருளை உணர்ந்து கொள்ளல்.
- எளிய பிரச்சனைகளுக்கு சராசரி, இடைநிலை, முகட்டை கண்டறிதல்.
- மையப்போக்கு அளவைகள் பயன்கள் மற்றும் வளர்நிகழ்வரை (ஓகிவ்)

(ii) **நிகழ்தகவு (10பிரிவேளைகள்)**

- நிகழ்தகவு பொருள் – திருப்புதல்
- அன்றாட வாழ் நிகழ்வுகளுக்கான நிகழ்தகவு
- நிரப்பு நிகழ்ச்சியின் கருத்துகள்.

பின்இணைப்பு

கணித மாதிரியாக்கம் (8 பிரிவேளைகள்)

- கணித மாதிரியாக்கம் விளக்கம்
- கணித மாதியாக்கப்படிகளின் மீது விவாதம்.

கல்வித்தரங்கள்

மாணவர்கள் வகுப்பறையில் என்ன செய்யவேண்டும், அவர்களுக்கு என்ன தெரிந்திருக்கவேண்டும் என்பதை தெளிவாக விவரிக்கும் ஒரு கூற்றே அந்த வகுப்பின் கல்வித்தரங்கள் ஆகும். இந்த கல்வித்தரங்கள் கீழ்கண்டவாறு வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. கணிதத்திலுள்ள வெவ்வேறு பாடப்பொருட்கள் மூலமாக கீழ்குறிப்பிடப்பட்டுள்ள கல்வித்தரங்களை சாதிக்கவேண்டும்.

Areas of Mathematics	Content
1. பிரச்சனைகளை தீர்ப்பது	கணிதக் கோட்பாடுகள், முறைகளை பயன்படுத்தி கணித பிரச்சனைகளை தீர்ப்பது **a. பிரச்சனைகளின் வகைகள் :** புதிர்கள், வழிகணக்குகள், படக்கணக்குகள், கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை புரிந்துக்கொள்ளல், விவரித்தல் அட்டவணைகள், வரைபடங்கள் போன்றவை பிரச்சனைகளின் பல்வேறு வகைகள். பிரச்சனை தீர்வுகள் – படிகள். • பிரச்சனையைப் படிப்பது. • கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை பகுதிகளாக பிரித்து அடையாளம் காணல். • தேவையான விவரங்களை தேர்ந்தெடுத்தல். • பிரச்சனைகளில் மறைந்துள்ள கணிதக் கோட்பாடுகளை புரிந்துகொள்ளல். • பிரச்சனையை தீர்ப்பதற்கான வழிமுறையை தேர்ந்தெடுப்பது. • தேர்ந்தெடுத்த வழிமுறையின்படி பிரச்சனையை தீர்ப்பது. **b. சிக்கல்கள் :** பிரச்சனைகளின் சிக்கல்கள் கீழ்கண்ட அம்சங்களின் மீது ஆதாரப்பட்டிருக்கும். • தொடர்புபடுத்துதல் • பிரச்சனைகளிலுள்ள படிகளின் எண்ணிக்கை • பிரச்சனைகளிலுள்ள செயல்களின் எண்ணிக்கை • கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பிரச்சனையை தீர்ப்பதற்கு எவ்வாறு பயன்படுகிறது. • வழிமுறையின் தன்மை.
2. காரணங்கள் கூறுதல், நிரூபித்தல்	• ஒவ்வொரு படிகளிலுள்ள காரணங்களை விவரிப்பது. • கணித பொதுமைப்படுத்தலை புரிந்துகொண்டு அவற்றை உருவாக்கல்.

• வழிமுறைகளை புரிந்துகொண்டு சரிபார்த்தல்

• தர்க்க விவாதங்களை சோதித்தல்.

• நிரூபணங்களிலுள்ள வழிமுறைகளின் படிகளை புரிந்துக்கொள்ளல்.

• விதிமுறை மேலும் விதி விளக்கமுறைகளின் தர்க்கங்களை புரிந்துகொள்ளல்

• கணிதக் கூற்றுகளை சோதனையிட்டு சரிபார்த்தல்

3. தகவல்கள்

• கணிதக் கோட்பாடுகள், வாக்கியங்களை படிப்பது– எழுதுவது

(உ.ம்) : $3+4=7$

$n_1+n_2= n_2+n_1$

முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் மொத்தம் $=180°$

• கணிதக் கூற்றுகளை உருவாக்குதல்

• கணித சிந்தனைகளை சொந்த வாக்கியத்தில் கூறுதல் உதாரணம் சதுரம் என்பது நான்கு சமபக்கங்களையும், சமமான கோணங்களையும் கொண்ட மூடியபடம்.

• கணித வழிமுறைகளை விளக்குவது.

4. தொடர்புகள்

• கணிதப் பாடப்பொருட்களையும் – கோட்பாடுகளையும் தொடர்புபடுத்துதல்

• அன்றாட வாழ்க்கை நிகழ்வுகளை கணிதத்துடன் தொடர்புபடுத்துதல்.

• வெவ்வேறு பாடப்பொருட்களுடன் கணிதத்தை தொடர்புபடுத்துதல்.

• பிரச்சனையை தீர்த்தலின் பல்வேறு முறைகளுக்கு இடையேயான தொடர்பை அறிதல்.

5. காட்சிப்படுத்தல் மற்றும் அடையாளம்காட்டல்

• அட்டவணைகளிலுள்ள விவரங்களை படிப்பது மேலும் எண்கோடு, படங்கள், செவ்வகப் படங்கள் இருபரிமாண, முப்பரிமாண படங்களின் விவரங்களை படிப்பது.

• அட்டவணைகள், எண்கோடு, படங்கள், செவ்வகப்படங்களை உருவாக்குதல்.

• கணித குறியீட்டு வடிவம் மேலும் படங்கள்.